УДК 530.1(075.8)
С34
ББК 22.38

С и в у х и н Д. В. **Общий курс физики.** Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. V. **Атомная и ядерная физика**. — 2-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2002. — 784 с. — ISBN 5-9221-0230-3; 5-89155-088-1.

Пятый том курса физики, широко известного у нас в стране и за рубежом. Книга написана на основе лекций, которые в течение ряда лет читались автором студентам Московского физико-технического института. Основное внимание уделено выяснению физического смысла и содержания основных законов и понятий атомной и ядерной физики, установлению границ применимости этих законов, развитию у студентов навыков физического мышления и умения ставить и решать конкретные задачи.

Первое издание пятого тома вышло в двух частях (в 1986 г. — первая часть, в 1989 г. — вторая).

Для студентов физических и математических факультетов университетов, физико-технических и инженерно-физических институтов, а также вузов, где физика является основной дисциплиной.

ISBN 5-9221-0230-3 (Т. V)
ISBN 5-9221-0229-X
ISBN 5-89155-088-1 (Т. V)
ISBN 5-89155-077-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Понимание явлений атомной физики, как и всех явлений микромира, невозможно без квантовых представлений. Поэтому в настоящем томе затрагиваются основные понятия и принципы квантовой механики. Делается это на основе экспериментальных фактов, которые одни только с полной убедительностью и вынуждают нас принять квантовые представления. Разумеется, в общей физике количественному рассмотрению доступны только простейшие задачи. Большинство вопросов рассматривается качественно на основе общих принципов.

В книге рассматриваются не только явления, происходящие в электронных оболочках атомов и молекул. Следуя историческому ходу развития, вначале вводится представление о фотонах и рассматриваются оптические явления, связанные с таким представлением. Затем идет основной материал, относящийся уже к атомной физике в узком смысле — физике электронных оболочек атомов. Наконец, коротко говорится о макроскопических квантовых явлениях — сверхтекучести, сверхпроводимости и пр.

Ядерная физика излагается в этой книге как раздел общего курса физики. Книга не ставит целью подробное изложение всех проблем этой науки. Почти все главы и параграфы книги при подробном изложении могли бы составить содержание специальных монографий. К ним и следует обращаться всем специализирующимся в различных областях ядерной физики. Здесь же приводится, да и то часто в общих чертах, только такой материал, в котором должен ориентироваться студент-физик, независимо от того, какую узкую специальность он изберет в дальнейшем.

В ядерной физике приходится в значительно большой степени апеллировать к опытным фактам, а не к теории, как в других разделах общей физики. Причина этого двоякая. Во-первых, еще не существует законченной теории ядерных сил, а следовательно, и основанной на ней будущей фундаментальной и последовательной теории ядра. Приходится довольствоваться основанными на опыте ядерными моделями, каждая из которых имеет ограниченную область применения. Во-вторых, по педагогическим соображениям нецелесообразно уводить студента, изучающего общую физику, в сторону сложных теорий, которые ему еще не доступны.

Эксперименты в области ядерной физики (и в особенности физики элементарных частиц) отличаются высокой степенью автоматизации с широким использованием ЭВМ. Поэтому обучение эксперименту

в этих областях физики должно проводиться не в лекционных аудиториях и лабораториях физического практикума, а в специальных институтах и лабораториях, изучающих ядерную физику и физику элементарных частиц. В общем курсе физики можно остановиться только в самых общих чертах на принципиальной стороне этих вопросов.

В главе XV кратко затронуты некоторые вопросы астрофизики. Источники энергии и эволюция звезд — это вопросы, с которыми должен быть знаком каждый физик. Более того, с ними, по крайней мере качественно, должен быть знаком и всякий образованный человек, независимо от его специальности, ибо их мировоззренческое значение несомненно.

В главе XVI приводятся основные сведения об элементарных частицах. Изложение здесь еще в большей степени не претендует на полноту, чем в остальных главах. Приводятся в основном только те сведения, которые необходимы в ядерной физике в узком смысле слова, т. е. в физике самого атомного ядра.

Физике элементарных частиц в современном ее состоянии должна быть посвящена отдельная книга и даже ряд книг.

Как и предыдущие тома, эта книга составлена на основе лекций, которые автор многократно читал в Московском физико-техническом институте.

Как и в остальных томах «Общего курса физики», в этой книге в качестве основной применяется система единиц СГС в ее гауссовой форме. Используется также оправдавшая себя удобная внесистемная единица энергии электронвольт (эВ) с ее кратными единицами (кэВ, МэВ, ГэВ). Международная система (СИ) совсем не применяется.

По мнению автора, в физике эта система неудовлетворительна. О ее принципиальных недостатках было сказано в предисловиях к I и III томам, а более подробно в § 85 тома III. Автор с удовлетворением прочитал, что в популярной книге по физике элементарных частиц известный физик-теоретик лауреат Нобелевской премии С. Вайнберг (р. 1933) отметил, что, по его мнению, введение СИ в физику было ошибкой. Автор может только присоединиться к этому мнению.

Рукопись этой книги рецензировалась членом-корреспондентом АН СССР профессором С.С. Герштейном, а также на кафедре экспериментальной физики Киевского государственного университета им. Т.Г. Шевченко, возглавляемой членом-корреспондентом АН УССР профессором И.С. Горбанем. Она была внимательно просмотрена заведующим кафедрой теории ядра и элементарных частиц Киевского государственного университета профессором В.К. Тартаковским. Много критических замечаний было сделано Г.И. Новиковой при редактировании книги. Все эти критические замечания способствовали улучшению книги и были учтены при окончательном ее редактировании. Всем перечисленным лицам автор выражает глубокую благодарность.

Глава I
КВАНТЫ СВЕТА

§ 1. Энергия и импульс светового кванта

1. К середине XIX века волновая природа света считалась доказанной окончательно. Ее подтверждали явления интерференции и дифракции света. А опыт Фуко (1819–1868), казалось, исключал всякую возможность корпускулярных представлений о свете (см. т. IV, § 3). Это действительно было бы так, если бы имелась в виду корпускулярная теория в ньютоновской форме (см. § 5).

Однако и волновая теория света, даже в ее электромагнитной форме, оказалась недостаточной для истолкования всей совокупности оптических явлений. Впервые это было осознано при рассмотрении проблемы *равновесного* (*черного*) *излучения.* Настойчивые попытки решить эту проблему в рамках волновых представлений на основе классических электродинамики и статистики закончились неудачей (см. т. IV, § 117). Формула, согласующаяся с опытом во всем диапазоне длин волн, была угадана Планком (1858–1947) в октябре 1900 г., сначала эмпирически. Немного позже Планк нашел и теоретический вывод своей формулы, доложенный им 14 декабря 1900 г. на заседании Немецкого физического общества. Это было исходным пунктом возникновения принципиально новых — *квантовых* — представлений. Сначала они касались только природы света, но затем постепенно проникли во все разделы физики.

Оказалось, что понятия и принципы классической физики, возникшие на основе изучения макроскопических объектов, неприменимы или ограниченно применимы в области атомных и субатомных масштабов. В этой области потребовались новые представления и законы, которые в конце концов и были найдены. Они составили основу новой, так называемой *квантовой* физики. Однако излагать квантовую физику систематически и дедуктивно, полностью отвлекаясь от истории ее развития, как это делается в теоретической физике, в общей физике было бы нецелесообразно. Сначала надо ознакомить начинающего с основными опытными фактами, которые одни только и могут убедить его в недостаточности и ограниченной применимости классических представлений. Они же, и это главное, позволяют наметить пути для введения новых представлений. Именно такой метод изложения принят в настоящей книге, дающей элементарное введение в квантовую физику.

2. Вернемся, однако, к истокам квантовых идей. При выводе своей формулы для равновесного излучения Планк ввел чуждую классической физике гипотезу, что *излучение и поглощение света веществом происходит не непрерывно, а конечными порциями*, или *квантами.* Так

как свойства равновесного излучения в полости не зависят от вещества стенок полости, вещество без ограничения общности он рассматривал как совокупность гармонических осцилляторов. А чтобы согласовать свою гипотезу с законами термодинамики и электродинамики, Планк принял, что энергия кванта $\mathscr{E}$, излучаемая или поглощаемая гармоническим осциллятором частоты ν, определяется выражением

$$\mathscr{E} = h\nu, \tag{1.1}$$

где h — универсальная постоянная, получившая название *постоянной Планка* (см. т. IV, § 118). Ее значение было вычислено самим Планком из экспериментальных результатов, полученных при изучении распределения энергии в спектре излучения *абсолютно черного тела.* Однако постоянная Планка, как и всякая фундаментальная постоянная, входит в множество других физических явлений. Все они дают независимые способы определения этой постоянной и в пределах ошибок измерений приводят к согласующимся результатам. По современным данным

$$h = 6{,}626176(36) \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}\,^{1)}\,. \tag{1.2}$$

В некоторых вопросах, в особенности в теоретической физике, более удобна постоянная

$$\hbar = 1{,}0545887(57) \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}, \tag{1.3}$$

введенная Дираком (1902–1984). Ее также называют *постоянной Планка — перечеркнутой* или *дираковой.* Через эту постоянную энергия кванта излучения выражается формулой

$$\mathscr{E} = \hbar\omega, \tag{1.4}$$

где $\omega = 2\pi\nu$ — *циклическая частота излучения.* Мы будем пользоваться как выражением (1.1), так и выражением (1.4).

3. Сам Планк, как видно из изложенного, полагал, что квантовые свойства света проявляются *только в актах излучения и поглощения*, т. е. *при взаимодействии света с веществом.* Распространение же света в пространстве, по его воззрениям, происходит *непрерывно* и описывается классическими уравнениями Максвелла (1831–1879). Более радикальная и законченная форма была придана квантовой теории света Эйнштейном (1879–1955) в 1905 г. Руководствуясь некоторыми теоретическими соображениями и экспериментальными фактами, Эйнштейн пришел к представлению, что и *при распространении в пространстве свет ведет себя подобно совокупности каких-то частиц*, причем энергия каждой частицы определяется формулой Планка (1.1) или (1.4). Такие частицы позднее получили название *квантов света* или *фотонов.*

---

[1]) Здесь, как и всюду в дальнейшем, в скобках приведено стандартное отклонение последних двух цифр от их среднего значения.

Это не было простым возвратом к ньютоновской корпускулярной теории света. Нельзя смотреть на фотоны как на обычные частицы света, аналогичные материальным точкам классической механики и движущиеся по определенным траекториям в пространстве. Это видно уже из того, что фотонам свойственна *интерференция* и *дифракция.* Они обладают не только корпускулярными, но и *волновыми свойствами.* Такая особенность фотонов называется *корпускулярно-волновым дуализмом.* Было бы безнадежно пытаться истолковать корпускулярно-волновой дуализм в духе представлений классической физики. Человеческое воображение не в состоянии создать образ, обладающий одновременно и свойствами корпускулы, и свойствами волны. Однако природа богаче воображения человека. При ее изучении надо руководствоваться не тем, что доступно воображению человека, а тем, что дают наблюдения и опыт. Отметим уже сейчас, что обычные корпускулы — электроны, нейтроны, атомы, молекулы и пр. — также обладают волновыми свойствами. Опыты, заставляющие принять это заключение, будут рассмотрены в § 18. Поэтому обсуждение вопроса, как современная физика истолковывает корпускулярно-волновой дуализм, мы отложим до § 19, после того как будут изучены волновые свойства вещества.

4. Если фотон обладает энергией, то он должен обладать и импульсом, как этого требует теория относительности. Импульс фотона проявляется, например, в давлении света. Связь между энергией $\mathscr{E}$ и импульсом **p** при движении частицы в теории относительности выражается формулой

$$(\mathscr{E}/c)^2 - \mathbf{p}^2 = (m_0 c)^2 \tag{1.5}$$

(см. т. IV, § 111). (При этом предполагается, что во время движения внутреннее состояние частицы, а с ним и ее масса покоя m_0 остаются без изменения.) Фотон движется в вакууме со скоростью света c, т. е. является *релятивистской частицей.* Если бы масса покоя фотона m_0 была отлична от нуля, то его релятивистская масса

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

была бы бесконечно велика. Поэтому надо допустить, что для фотона $m_0 = 0$. В результате предыдущее соотношение запишется в виде

$$\mathscr{E} = pc. \tag{1.6}$$

(Знак минус при извлечении квадратного корня следует опустить, принимая, что импульс фотона **p** направлен в сторону распространения света.)

Неклассический характер соотношения (1.1) или (1.4) проявляется, между прочим, в том, что по классическим представлениям энергия должна быть связана не с частотой, а с *амплитудой* колебания. По этим представлениям корпускулярно-волнового дуализма не должно быть. Но если такой дуализм все же существует, то связь между корпускулярными и волновыми свойствами излучения не может ограничиваться соотношением (1.1) или (1.4). Корпускулярные свойства излучения

характеризуются *энергией* $\mathscr{E}$ и *импульсом* $\mathbf{p}$, волновые — *частотой* ω и волновым вектором $\mathbf{k}$. В теории относительности величины $\mathscr{E}$ и $\mathbf{p}$ объединяются в один *четырехмерный вектор энергии-импульса* $(\mathscr{E}, c\mathbf{p})$. Фаза волны $\omega t - \mathbf{kr}$, как показано в т. IV, § 107, *инвариантна относительно преобразования Лорентца.* А так как $(t, \mathbf{r}/c)$ — четырехмерный вектор, то отсюда следует, что частота ω и волновой вектор $\mathbf{k}$ также объединяются в *четырехмерный вектор* $(\omega, c\mathbf{k})$. Временные компоненты $\mathscr{E}$ и ω четырехмерных векторов $(\mathscr{E}, c\mathbf{p})$ и $(\omega, c\mathbf{k})$ одинаково преобразуются при преобразованиях Лорентца. Поэтому соотношение (1.1) (или (1.4)) удовлетворяет необходимому требованию *релятивистской инвариантности.* Но релятивистски инвариантное соотношение не может ограничиться связью только между временными компонентами четырехмерных векторов $(\mathscr{E}, c\mathbf{p})$ и $(\omega, c\mathbf{k})$. Связь должна существовать между самими *четырехмерными векторами.* Отсюда следует, что если гипотеза Планка $\mathscr{E} = \hbar\omega$ верна, то из нее и из требования релятивистской инвариантности с неизбежностью вытекает, что $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Поэтому мы в качестве гипотезы принимаем, что

$$\mathscr{E} = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \tag{1.7}$$

При этом для фотона $\mathscr{E}^2 - (\mathbf{p}c)^2 = (m_0c^2)^2 = 0$, т. е. обращение в нуль массы покоя фотона m_0 эквивалентно утверждению, что для фотона четырехмерный вектор энергии-импульса $(\mathscr{E}, c\mathbf{p})$ является световым вектором.

5. При взаимодействии с веществом фотоны могут испускаться, поглощаться и рассеиваться. Сохранение числа фотонов не имеет места. Зато должны выполняться *законы сохранения энергии и импульса.*

Свободный электрон может только рассеять, но не испустить или поглотить фотон. Чтобы показать это простейшим способом, воспользуемся системой отсчета, в которой электрон первоначально покоился. Пусть электрон испустил фотон с импульсом $\mathbf{p}_ф$ и энергией $\mathscr{E}_ф$. Обозначим импульс электрона после испускания через $\mathbf{p}_э$, а энергию — через $\mathscr{E}_э$. Из законов сохранения импульса и энергии следует

$$\mathbf{p}_э + \mathbf{p}_ф = 0, \quad \mathscr{E}_э + \mathscr{E}_ф = m_0c^2,$$

где m_0 — масса покоя электрона. Отсюда

$$(c\mathbf{p}_э)^2 = (c\mathbf{p}_э)^2, \quad \mathscr{E}_э^2 = \mathscr{E}_ф^2 - 2\mathscr{E}_ф m_0c^2 + (m_0c^2)^2.$$

Вычтем первое равенство из второго. Тогда с учетом соотношения (1.6) для фотона и соотношения (1.5) для электрона получим

$$\mathscr{E}_ф m_0c^2 = 0.$$

Отсюда следует $\mathscr{E}_ф = 0$, т. е. испускание невозможно. Таким же рассуждением убеждаемся, что невозможно и поглощение.

Полученный результат в известном смысле тривиален. Доказательство молчаливо предполагало, что масса покоя электрона до испускания равна его массе покоя после испускания. Это значит, что *внутреннее состояние электрона в результате испускания не изменилось.* В таком

случае полная энергия электрона может только возрастать за счет кинетической энергии, получаемой электроном при отдаче во время испускания. Испущенный фотон в свою очередь несет положительную энергию. Если бы испускание было возможно, то оно сопровождалось бы нарушением закона сохранения энергии.

В заключение несколько слов об обозначениях. В физике элементарных частиц под массой частицы принято понимать *массу покоя* и обозначать ее через m (опуская нуль в индексе). Однако, поскольку наряду с массой покоя нам придется пользоваться и релятивистской массой, мы сохраним для этих величин стандартные обозначения m_0 и m. Это в особенности будет делаться тогда, когда конкретный вид частицы не играет роли. Там же, где речь идет об электронах, протонах, нейтронах и других элементарных частицах, под $m_{\rm e}, m_{\rm p}, m_{\rm n}, \ldots$ мы будем понимать их массы покоя. Часто в общих рассуждениях массу покоя удобно обозначать через m_0, чтобы отличить ее от релятивистской массы m. В окончательных же результатах m_0 целесообразно заменить на $m_{\rm e}, m_{\rm p}, m_{\rm n}, \ldots$, чтобы явно указать, о массе покоя какой частицы идет речь.

ЗАДАЧИ

1. Определить длину волны $\lambda_{\rm K}$, при которой энергия светового кванта равна энергии покоя электрона. Такая длина волны называется *комптоновской длиной* для электрона (см. § 3).

Ответ. $\lambda_{\rm K} = h/m_0c \approx 2{,}43 \cdot 10^{-10}$ см, где m_0 — масса покоя электрона.

2. Определить релятивистскую массу m светового кванта с длиной волны λ.

Ответ. $m = (\lambda_{\rm K}/\lambda)m_0$.

3. Если бы фотон обладал массой покоя m_{Φ}, то скорость света в вакууме должна была бы зависеть от длины волны. Исследуя экспериментально эту зависимость, можно было бы оценить нижний предел для массы фотона. Найти выражения для фазовой и групповой скорости света в вакууме в предположении, что $m_{\Phi} \neq 0$.

Решение. Энергия фотона $\hbar\omega$ и его импульс $\hbar k$ связаны соотношением

$$(\hbar\omega)^2 - (c\hbar k)^2 = (m_{\Phi}c^2)^2, \tag{1.8}$$

где, разумеется, под c следует понимать уже не скорость света в вакууме, а некоторую фундаментальную скорость, входящую в теорию относительности. Из уравнения (1.8) и определится фазовая скорость света в вакууме $v = \omega/k$:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{m_{\Phi}c^2}{\hbar\omega}\right)^2} \approx \frac{1}{c}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_{\Phi}c^2}{\hbar\omega}\right)^2\right]. \tag{1.9}$$

На опыте измеряется не фазовая, а групповая скорость света. Для нее из формулы (1.8) получается

$$u = \frac{d\omega}{dk} = c^2\,\frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v}, \tag{1.10}$$

или

$$u = c\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_\Phi c^2}{\hbar\omega}\right)^2\right] = c\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c\lambda}{h}m_\Phi\right)^2\right]. \qquad (1.11)$$

Современные радиолокационные методы измерения скорости света при различных частотах приводят к результату $m_\Phi < 4\cdot 10^{-21}m_e$, где m_e — масса электрона.

§ 2. Фотоэлектрический эффект

1. Одним из явлений, подтверждающих гипотезу фотонов, является *фотоэлектрический эффект*, к рассмотрению которого мы и перейдем.

В 1887 г. Генрих Герц (1857–1894) обнаружил, что освещение ультрафиолетовым светом *отрицательного электрода* искрового промежутка, находящегося под напряжением, облегчает проскакивание искры между его электродами. Занятый в то время исследованиями электромагнитных волн, предсказанных Максвеллом, Герц не обратил на это явление серьезного внимания. Первые исследования явления принадлежат Хальваксу (1859–1922), Риги (1850–1921) и в особенности А. Г. Столетову (1839–1896).

Сущность явления, обнаруженного Герцем, состоит в том, что *при освещении ультрафиолетовыми лучами отрицательно заряженного металлического тела оно теряет отрицательный заряд.* При освещении такими же лучами положительно заряженного тела потери заряда не наблюдается. Более того, если тело не было заряжено, то при освещении оно заряжается *положительно* до потенциала в несколько вольт. После открытия электрона в 1897 г. Дж. Дж. Томсоном (1856–1940) опытами самого Томсона, а также Ленарда (1862–1947) вскоре был найден удельный заряд e/m для частиц, теряемых телами при освещении. Он оказался таким же, как и для частиц катодных лучей. Тем самым было доказано, что при освещении тела теряют *электроны.*

Явление вырывания электронов из вещества при освещении его светом получило название *фотоэлектрического эффекта* или, короче, *фотоэффекта.* Различают *внешний* и *внутренний* фотоэффект. При внешнем фотоэффекте электроны освобождаются светом из поверхностного слоя вещества и переходят в другую среду, в частности в вакуум. При внутреннем фотоэффекте оптически возбужденные электроны остаются внутри освещаемого тела, не нарушая электрическую нейтральность последнего. Для обоснования гипотезы фотонов основное значение имеет *внешний фотоэффект*, который преимущественно и рассматривается в этом параграфе. О внутреннем фотоэффекте и о его применениях будет сказано несколько слов в конце этого же параграфа.

Электроны, вырванные под действием света, называются *фотоэлектронами.* Фотоэлектрическими свойствами обладают как металлы, так и диэлектрики, а также полупроводники и электролиты, причем необходимым (но недостаточным) условием фотоэффекта является заметное поглощение используемого света в поверхностном слое освещаемого

тела. Фотоэлектрический эффект вызывается не только ультрафиолетовыми лучами. Щелочные металлы — литий, натрий, калий, рубидий, цезий — весьма чувствительны к фотоэлектрическому действию и в видимой области спектра. А специальная обработка поверхностей этих и других металлов делает их способными испускать фотоэлектроны даже под действием инфракрасных лучей.

2. На рис. 1 показана принципиальная схема экспериментальной установки для исследования фотоэффекта. Фотоэлектроны, вырванные при освещении из катода, увлекаются приложенным напряжением к аноду и замыкают цепь. По скорости зарядки электрометра (вместо электрометра можно взять чувствительный гальванометр) можно определить силу электрического тока в цепи, а с ней и количество фотоэлектронов, достигающих анода в единицу времени. Опыты подобного рода в ранних исследованиях производились в газах. Но их лучше производить в вакууме, так как газ только осложняет явления, происходящие в поверхностном слое металла.

Фотоэффект с данного вещества сильно зависит от состояния его поверхности. Для получения однозначных результатов исследование этого явления необходимо производить в хорошем вакууме, предварительно тщательно очистив поверхность исследуемого тела. Перед помещением электродов в прибор материал, служащий катодом, подвергают перегонке в вакууме, а затем наносят тонким слоем на какую-либо подложку.

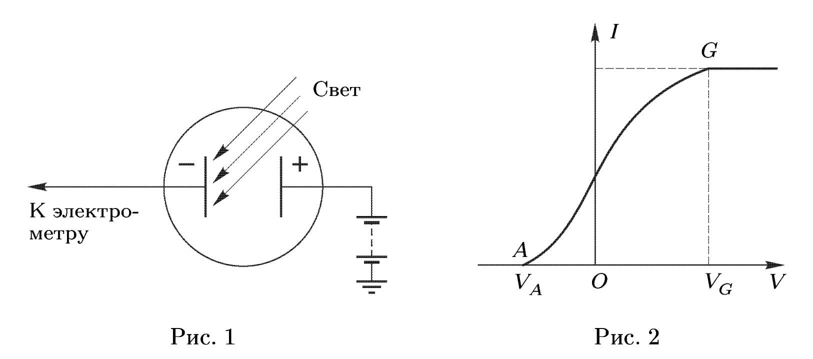


Рис. 1 Рис. 2

Если при постоянных интенсивности и частоте падающего света менять напряжение V между анодом и катодом, то зависимость фототока I от V представится кривой, схематически изображенной на рис. 2. Она называется *характеристикой фотоэлемента*, т. е. того прибора, в котором наблюдается фотоэффект. При увеличении напряжения характеристика переходит в горизонтальную прямую, которой соответствует максимальный ток. Он называется *током насыщения*. Насыщение достигается тогда, когда все электроны, вырванные светом с поверхности катода, попадают на анод. Дальнейшее повышение напряжения не меняет силу фототока: *она определяется только количеством ежесекундно вырываемых электронов*.

Существование тока насыщения экспериментально было установлено А.Г. Столетовым. Им же было доказано на опыте, что *ток насыщения строго пропорционален интенсивности падающего света*, если только частота его остается постоянной. Точнее, ток насыщения пропорционален интенсивности *поглощаемого света*. Однако последняя в свою очередь пропорциональна интенсивности падающего света, а потому в формулировку закона и входит интенсивность того же света. Кроме того, закон пропорциональности Столетова строго соблюдается лишь при условии, когда ток насыщения образован только электронами, освобожденными светом со *светочувствительной поверхности тела*. Для этого светочувствительная поверхность должна помещаться в вакууме. В газонаполненных приборах могут наблюдаться заметные отступления от простой пропорциональности. Такие приборы обычно чувствительнее вакуумных, так как в них к току электронов, освобожденных светом со светочувствительной поверхности тела, добавляется еще *ток ионизации газа*, наполняющего прибор. Поэтому газонаполненными приборами, если они применяются для измерений, надо пользоваться с осмотрительностью.

3. Можно было бы попытаться дать качественное объяснение фотоэффекта с волновой точки зрения. Свободные электроны, в изобилии имеющиеся в металле, удерживаются в нем задерживающим полем, существующим на границе металла. Работа выхода электрона из металла составляет несколько электрон-вольт. В электрическом поле световой волны свободный электрон приходит в колебания. Когда энергия колебаний сделается достаточно большой, электрон может преодолеть задерживающее поле и уйти за пределы металла. Если же электрон связанный, то все будет происходить аналогично, но зависимость энергии колебаний от частоты будет носить более сложный, резонансный характер.

Однако такое объяснение не согласуется с опытом. Кинетическая энергия колеблющегося электрона заимствуется от световой волны. Казалось бы, что энергия вылетевшего электрона должна быть тем больше, чем больше интенсивность падающего света. Но опыты Ленарда и многочисленные исследования других ученых показали, что *максимальная скорость, с которой электроны вылетают из тела, от интенсивности падающего света совсем не зависит, а определяется только его частотой.* (Предполагается, что материал тела и состояние освещаемой поверхности остаются неизменными.)

Другое резкое расхождение с опытом получится, если на основе приведенного объяснения оценить *время возникновения фотоэффекта*. Действительно, возьмем, например, электрическую лампочку мощностью $P = 100$ Вт. Для простоты будем считать ее точечным и изотропно излучающим источником света. По классической волновой теории поток лучистой энергии распространяется от источника света *непрерывно* во все стороны. Пусть свет падает нормально на плоский фотокатод из цинка, расположенный на расстоянии r от лампочки. Энергетическая освещенность, создаваемая лампочкой на фотокатоде, будет $P/(4\pi r^2)$. Работа выхода электрона A из цинка

составляет около 3,74 эВ. Ясно, что для выхода электрона из металла энергия, накопленная им при вынужденных колебаниях, должна быть не меньше A. Максимальная энергия, которую может получить атом от излучения за время t, составляет $\mathscr{E}_{\text{макс}} = (P/4\pi r^2)\sigma t$, где σ — поперечное сечение атома. Энергия, переданная электрону за то же время, меньше $\mathscr{E}_{\text{макс}}$. Но она должна быть не меньше A, чтобы электрон мог выйти из металла, т. е. $\mathscr{E}_{\text{макс}} > A$, а потому должно быть $t >$ $> (4\pi r^2/\sigma P)A$. Среднее расстояние между атомами цинка найдется по формуле $d = (M/\delta N_{\text{A}})^{1/3}$, где N_{A} — постоянная Авогадро, M — молярная масса, δ — плотность цинка. Для цинка $M = 65$ г/моль, $\delta = 7$ г/см^3, а следовательно, $d = 2{,}49 \cdot 10^{-8}$ см. Сечение σ можно оценить по формуле $\sigma \approx d^2 \approx 6 \cdot 10^{-16}$ см^2. Если положить еще $r =$ $= 1$ м, то получится $t \gtrsim 1{,}25$ с. Таким образом, *по классической волновой теории фотоэффект должен протекать с запаздыванием.* Если учесть, что фотоэлементы реагируют на значительно более слабые световые потоки, чем в нашем примере, то и запаздывание фотоэффекта может получиться много больше того, которое мы вычислили. Между тем *опыт показывает, что фотоэффект протекает безынерционно, т. е. фототок появляется мгновенно — одновременно с освещением.* Именно на такой безынерционности основаны практически все научно-технические применения фотоэффекта.

4. Указанные трудности отпадают, если фотоэффект рассматривать с фотонной точки зрения. Взаимодействуя с электроном металла, фотон может обмениваться с ним энергией и импульсом. Такой процесс взаимодействия напоминает удар шаров, а потому его образно называют *столкновением.* Фотоэффект возникает при *неупругом столкновении* фотона с электроном. При таком столкновении фотон поглощается, а его энергия передается электрону. Таким образом, электрон приобретает кинетическую энергию не постепенно, а *сразу — в результате единичного акта столкновения.* Этим и объясняется безынерционность фотоэффекта.

Энергия поглощаемого фотона может затрачиваться на отрыв электрона от атома внутри металла. Оторванный электрон может взаимодействовать с атомом внутри металла, растрачивая энергию на тепло. Максимальной энергией вылетевший электрон будет обладать тогда, когда внутри металла он был *свободен*, т. е. не связан с атомом, а при вылете наружу не расходовал энергию на тепло. В этом случае кинетическая энергия электрона тратится только на преодоление задерживающих сил, действующих в поверхностном слое металла, т. е. на *работу выхода.* Предположим, что электрон получил кинетическую энергию при столкновении *только с одним фотоном.* Многофотонные процессы, которые будут рассмотрены в п. 9, возможны, но при слабых интенсивностях света (линейная оптика) маловероятны. Тогда *максимальная кинетическая энергия, которой будет обладать вылетевший электрон, определится формулой*

$$\frac{1}{2} m_{\text{e}} v_{\text{макс}}^2 = h\nu - A, \tag{2.1}$$

где A — работа выхода, а m_e — масса покоя электрона. Эта формула впервые была получена Эйнштейном и носит его имя.

Прежде чем анализировать формулу Эйнштейна, необходимо выяснить, как может «свободный электрон в металле» поглотить фотон. Не противоречит ли это утверждению, доказанному в конце предыдущего параграфа, согласно которому поглощение фотона свободным электроном несовместимо с законами сохранения энергии и импульса? На самом деле противоречия нет. Противоречие возникает из-за неудачной терминологии. «Свободный электрон в металле» в действительности *не свободен.* Он как бы заперт в ящике, вблизи стенок которого действует задерживающее поле. Фотон взаимодействует не только с электроном, но происходит взаимодействие обеих этих частиц с металлом в целом. При взаимодействии же трех тел законы сохранения энергии и импульса могут выполняться одновременно. Импульс фотона воспринимается как электроном, так и металлом, энергия же передается только электрону, так как масса металла может считаться бесконечно большой.

5. Из формулы Эйнштейна (2.1) вытекают два следствия, находящиеся в строгом согласии с опытом.

1) *Максимальная кинетическая энергия вырванных электронов линейно зависит от частоты освещающего света и не зависит от его интенсивности. Интенсивность оказывает влияние только на количество вырванных электронов, но совсем не влияет на их максимальную кинетическую энергию.* Любопытно, что тангенс угла наклона прямой (2.1) к оси частот ν равен постоянной Планка h (по оси абсцисс отложена частота ν, по оси ординат — максимальная кинетическая энергия электрона $m_e v^2_{\text{макс}}/2$). Это дает новый метод измерения постоянной Планка.

2) *Существует низкочастотная граница (порог) фотоэффекта, т. е. такая частота ν_0, ниже которой фотоэффект не наблюдается.* Она зависит от состава облучаемого тела и состояния его поверхности.

В самом деле, представим работу выхода в виде $A = h\nu_0$, где ν_0 — положительная постоянная, и запишем формулу (2.1) так:

$$\frac{1}{2}\, m_e v^2_{\text{макс}} = h(\nu - \nu_0). \tag{2.2}$$

При $\nu < \nu_0$ правая часть отрицательна. А это невозможно, так как левая часть существенно положительна. Следовательно, при $\nu < \nu_0$ фотоэффект невозможен. Частота ν_0 и есть *низкочастотная граница фотоэффекта.* Существование такой границы совершенно непонятно с волновой точки зрения.

6. Экспериментальная проверка формулы Эйнштейна и следствий из нее имеет громадное значение не только для теории света, но и для всей физики. Она производится путем снятия характеристик фотоэлемента, в котором падающий свет возбуждает электрический ток. Принципиальная схема установки приведена на рис. 1. Существенно, что фототок должен измеряться не только при положительных значениях разности потенциалов между анодом и катодом (ускоряющее поле), *но и при отрицательных* (замедляющее поле). Для повышения

точности измерений прибор конструируют так, чтобы практически все фотоэлектроны, вырванные светом из катода, попадали на анод. С этой целью вместо плоского применяют *сферический конденсатор*, внешней обкладкой которого служит большая металлическая сфера, а внутренней — маленький шарик из исследуемого материала.

Фотоэлектрон, освобожденный светом, может претерпеть столкновение с атомом внутри поверхностного слоя металла. Из-за этого он может замедлиться и даже не выйти наружу. Приложенное электрическое поле способствует ускорению замедлившихся электронов и выходу их из металла. В этом причина, почему сила фототока возрастает с напряжением между катодом и анодом. Для проверки формулы Эйнштейна (2.1) надо измерить максимальную кинетическую энергию фотоэлектрона, которой он обладает по выходе из металла. Такие измерения затруднены *контактной разностью потенциалов*, весьма чувствительной к поверхностной обработке металла, а потому трудно контролируемой. Для исключения влияния контактной разности потенциалов на вольт-амперной характеристике фотоэлемента отмечают две точки: одну A, в которой ток обращается в нуль задерживающим полем; другую G, с которой начинается ток насыщения (см. рис. 2). Показания вольтметра, соответствующие этим точкам, обозначим через V_A и V_G. Это есть именно *показания вольтметра*, а не разности потенциалов между анодом и катодом. К последним должна быть добавлена контактная разность потенциалов V_c между теми же электродами. Полные разности потенциалов равны $V_A + V_c$ и $V_G + V_c$ соответственно.

При показаниях вольтметра меньше V_A все электроны задерживаются и не достигают анода. Когда вольтметр показывает V_A, анода начинают достигать электроны с максимальной скоростью $v_{\text{макс}}$. Приравнивая энергии электрона в точках A и G характеристики, получим

$$\frac{1}{2}\, m_{\text{e}} v_{\text{макс}}^2 = -e(V_A + V_c),$$

где e — заряд электрона по абсолютной величине. (Тепловыми скоростями мы пренебрегаем, так как средняя энергия теплового движения kT пренебрежимо мала по сравнению с энергией фотона $h\nu$.) Когда же вольтметр показывает V_G, наоборот, даже электроны нулевой скорости начинают достигать анода, поэтому

$$0 = -e(V_G + V_c).$$

Из последнего уравнения находится контактная разность потенциалов: $V_c = -V_G$. Первое же уравнение определяет искомую максимальную кинетическую энергию фотоэлектрона:

$$\frac{1}{2}\, m_{\text{e}} v_{\text{макс}}^2 = e(V_G - V_A). \tag{2.3}$$

Из уравнения $V_G = -V_c$ следует, что положение точки V_G на вольт-амперной характеристике фотоэлемента зависит только от контактной разности потенциалов, но не зависит от частоты ν падающего света. Напротив, положение точки V_A меняется с частотой ν, так как от

частоты зависит максимальная энергия $m_e v^2_{\text{макс}}/2$, которой определяется величина $V_A + V_c$. При увеличении частоты характеристики будут смещаться влево, но абсцисса V_G будет оставаться неизменной. Если характеристики строить в таком масштабе, чтобы на них ток насыщения всегда изображался ординатами одинаковой величины, то все они будут проходить через одну и ту же точку G.

В начале п. 6 было отмечено преимущество сферического конденсатора перед плоским. Теперь, после изложения идеи метода определения максимальной кинетической энергии фотоэлектрона, можно указать на другое преимущество. В случае плоского конденсатора для попадания фотоэлектронов на анод имеют значение не полные скорости их, а только составляющие, перпендикулярные к поверхности анода. Касательные составляющие приводят к тому, что характеристика фотоэлемента в точках A и G не пересекает горизонтальные прямые, а подходит к ним *асимптотически*. Это затрудняет определение положения самих точек A и G. В сферическом же конденсаторе с малым внутренним шариком этого не получается, так как все скорости фотоэлектронов практически радиальные, т. е. нормальны к поверхности анода.

Точная экспериментальная проверка формулы Эйнштейна была впервые осуществлена Ричардсоном (1879–1959) и Карлом Комптоном (1887–1954) в 1912 г., а еще более тщательно Милликеном (1868–1953) в 1916 г. Обе работы подтвердили формулу Эйнштейна, хотя и были не совсем свободны от возражений. В наиболее чистых условиях проверка была произведена П.И. Лукирским (1894–1954) и С.С. Прилежаевым в 1926 г. Схема их установки приведена на рис. 3. Прибор представлял собой сферический конденсатор, в котором создавался вакуум, с наружной обкладкой в виде слоя серебра, нанесенного на внутреннюю поверхность сферы S (с диаметром 11 см). Внутренней обкладкой служил шарик N (с диаметром 1,5 см) из металла, с поверхности которого изучался фотоэффект. Чтобы шарик можно было легко заменять, он навинчивался на стержень, связанный со шлифом. Кварцевая изоляция устраняла возможность влияния ползучих зарядов со стекла. Шарик N можно было освещать через отверстие A, закрытое кварцевой пластинкой. Свет поступал от ртутной дуги, предварительно пройдя через монохроматор M. Был изучен фотоэффект с металлов: Al, Zn, Sn, Ni, Ag, Cd, Pb, Cu, Pt. На рис. 4 приведены характеристики фотоэлемента для цинка (λ = 230,2; 253,7; 313,0 нм для кривых *1*, *2*, *3* соответственно). Для других металлов характеристики имели аналогичный вид. Все они построены в таком масштабе, в котором ток насыщения условно принят равным 100. При этом

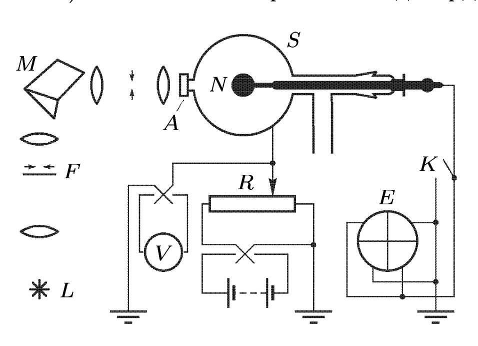


Рис. 3

условии все кривые для одного и того же металла, но при различных длинах волн сверху пересекались в одной и той же точке, в которой они переходили в горизонтальные участки. Это находится в согласии с тем, что было сказано выше. Авторы получили для постоянной Планка значение $h = 6{,}58 \cdot 10^{-27}$ эрг · с (если пересчитать их результат на современное значение заряда электрона).

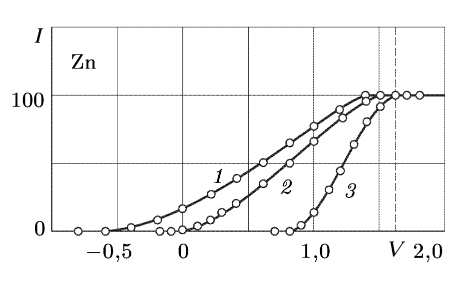


Рис. 4

7. Для рентгеновских лучей энергия светового кванта $h\nu$ велика по сравнению с работой выхода A. Иными словами, частота ν велика по сравнению с частотой ν_0 низкочастотной границы фотоэффекта. В этом случае в уравнении (2.1) величиной A можно пренебречь и написать

$$\frac{1}{2}\, m_e v_{\text{макс}}^2 = h\nu, \tag{2.4}$$

или

$$eV = h\nu, \tag{2.5}$$

где eV — энергия электрона, выраженная через ускоряющее напряжение. Эта формула справедлива *не только для прямого фотоэффекта*, в котором энергия световых квантов переходит в кинетическую энергию электронов. Она относится и к *обратному фотоэффекту*, в котором рентгеновские кванты получаются за счет кинетической энергии электронов, бомбардирующих металл. Именно такой процесс происходит в рентгеновских трубках. В этом случае формула (2.5) определяет *максимальную частоту*, с которой могут испускаться рентгеновские лучи антикатодом при заданном напряжении на трубке. Существование максимальной граничной частоты подтверждается опытом. Это также говорит в пользу квантовой теории света.

При бомбардировке антикатода электроны тормозятся, из-за чего возникает так называемое *тормозное рентгеновское излучение*. Спектр этого излучения при разложении по длинам волн оказывается *сплошным*, как и спектр видимого белого света. По этой причине сплошное рентгеновское излучение называется *белым*. Его спектральная интенсивность при различных напряжениях на трубке представлена кривыми на рис. 5 (для вольфрамового антикатода). В сторону длинных волн кривая интенсивности спадает полого, асимптотически приближаясь к нулю с увеличением длины волны. Напротив, со стороны коротких волн кривая интенсивности резко обрывается при некотором значении длины волны, называемой *коротковолновой границей сплошного рентгеновского излучения*. Эта граница определяется формулой (2.5), из которой следует

$$\lambda_{\text{мин}} = \frac{hc}{eV} = \frac{12{,}40}{V}\ \text{Å}, \tag{2.6}$$

где напряжение на трубке V измеряется в киловольтах. Коротковолновая граница не зависит от материала антикатода, а определяется *только напряжением на трубке*. Если увеличивать напряжение выше определенного предела, зависящего от материала антикатода, то на сплошное излучение накладываются узкие спектральные линии, составляющие так называемое *характеристическое излучение* антикатода. Но и в этом случае коротковолновая граница рентгеновского спектра существует и определяется прежней формулой (2.6). Существование такой границы является одним из наиболее ярких проявлений корпускулярных свойств рентгеновского излучения.

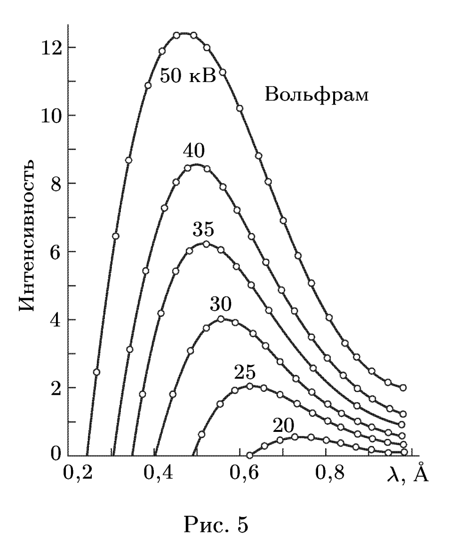


Рис. 5

Измерение коротковолновой границы рентгеновского излучения дает один из методов точного определения постоянной Планка h. Для этого служит формула (2.6). Та же формула применяется для измерения длин волн очень жесткого рентгеновского и гамма-излучения.

8. До сих пор при рассмотрении фотоэффекта мы акцентировали внимание на *корпускулярных* свойствах света. Но фотонам свойственны также и *волновые* свойства света. Проявляются ли они в явлениях фотоэффекта? На этот вопрос следует ответить утвердительно. Волновые свойства проявляются в закономерностях так называемого *селективного* (т. е. избирательного) *фотоэффекта*. Обозначим через I_λ силу фототока насыщения, отнесенную к единичному интервалу длин волн и к единице поглощенной лучистой энергии. Для фотоэффекта, называемого *нормальным*, величина I_λ монотонно убывает с длиной волны, стремясь к нулю на длинноволновой границе $\lambda = \lambda_0$ (рис. 6). Но если электрический вектор падающей волны *не перпендикулярен*

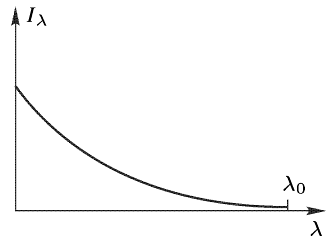




Рис. 6 Рис. 7

к плоскости падения, то у ряда металлов, особенно щелочных, на кривой $I_\lambda(\lambda)$ наблюдается *резко выраженный максимум* в определенной области спектра. У натрия, например, максимум лежит при $\lambda = 340$ нм, у калия при $\lambda = 435$ нм, у алюминия при $\lambda = 215$ нм и т. д. (см. кривую на рис. 7, относящуюся к сплаву калия и натрия). Вероятно, аналогичные максимумы существуют и для других металлов, но лежат далеко в коротковолновой области спектра, а потому труднодоступны для наблюдения. Фотоэффект, характеризующийся подобными максимумами на кривой $I_\lambda(\lambda)$, и называется *селективным.*

Максимум на кривой $I_\lambda(\lambda)$ для селективного фотоэффекта напоминает резонансный максимум при вынужденных колебаниях гармонического осциллятора. Поэтому можно сказать, что электроны в металле при селективном фотоэффекте ведут себя так, как если бы они обладали *собственными частотами*, в окрестности которых и наблюдаются максимумы величины $I_\lambda(\lambda)$.

Другая особенность селективного фотоэффекта, в которой также проявляются волновые свойства света, состоит в том, что *интенсивность фототока сильно зависит от поляризации падающего света и от угла падения. Селективный фотоэффект не наблюдается, когда электрический вектор падающей волны перпендикулярен к плоскости падения, а также при нормальном падении света.* В обоих случаях в падающем свете есть составляющая электрического поля, касательная к границе металла, но нет нормальной составляющей. Явление происходит так, как если бы селективность фотоэффекта была обусловлена составляющей электрического вектора, *нормальной к поверхности металла.* Нормальная составляющая более эффективна для вырывания электрона из металла, чем касательная составляющая. В частности, селективность фотоэффекта выражена наиболее резко при скользящем падении поляризованного света, электрический вектор которого лежит в плоскости падения. Для иллюстрации высказанных утверждений на рис. 8 приведена зависимость $I_\lambda(\lambda)$ от λ для различных поляризаций падающего света, а на рис. 9 — зависимость от угла падения. Рисунки относятся к тому же сплаву калия и натрия, что и рис. 7.

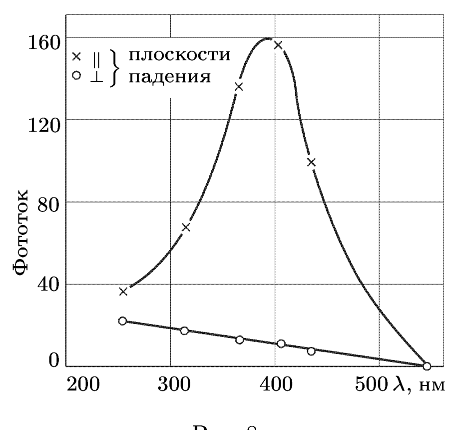


Рис. 8

9. С изобретением лазеров появилась возможность экспериментировать с мощными пучками света и наблюдать *нелинейные* особенности фотоэффекта. Если интенсивность света достаточно велика, то электрон, прежде чем покинуть катод, может претерпеть столкновение не с одним, а с *несколькими фотонами* (*многофотонный процесс*). В этом

случае вместо уравнения (2.1) следует написать

$$\frac{1}{2} m_e v_{\text{макс}}^2 = Nh\nu - A, \tag{2.7}$$

где N — число столкновений электрона с фотонами. Длинноволновая граница фотоэффекта существует по-прежнему, но граничная частота определяется выражением $\nu_0 = A/(hN)$, т. е. уменьшается в N раз по сравнению с однофотонным эффектом. Наблюдению такого многофотонного нелинейного эффекта длительное время препятствовало нагревание металла при лазерном освещении. Оно сопровождается *термоэлектронной эмиссией*, для которой, разумеется, длинноволновая граница не существует. Маскирующее влияние термоэлектронной эмиссии удалось устранить почти полностью применением *сверхкоротких импульсов лазерного излучения* длительностью 10^{-11}–10^{-12} с. Аналогично действует *скользящее освещение фотокатода* (угол падения $\approx 85°$). Таким путем длинноволновая граница многофотонного фотоэффекта надежно зафиксирована при $N = 2, 3, 4, 5$ для различных металлов (Na, Ag, Au и пр.), а также полупроводников при изменении интенсивности света от 0,1 до 10^3 МВт. А исследование влияния поляризации света и угла падения на ток насыщения позволило установить, что многофотонный фотоэффект вызывается исключительно составляющей электрического поля, *нормальной к поверхности катода.*

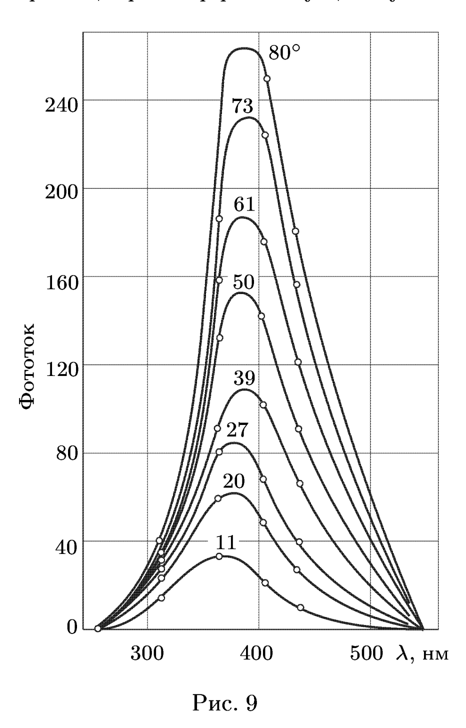


Рис. 9

10. В заключение кратко остановимся на *внутреннем фотоэффекте* и на применениях фотоэффекта. Внутренний фотоэффект может происходить в полупроводниках и диэлектриках. Под действием света часть электронов из валентной энергетической зоны переходит в зону проводимости (см. т. III, § 100). Концентрация носителей тока внутри тела увеличивается — возникает *фотопроводимость*, т. е. повышение электрической проводимости тела под действием света. Перераспределение электронов по различным энергетическим состояниям может привести также к изменению *внутреннего электрического поля* в кристалле. Это ведет к появлению *электродвижущей силы* (фото-ЭДС) на границах двух различных полупроводников или полупроводника

и металла при их освещении. Около границы образуется *переходный слой*, пропускающий ток только в одном направлении, т. е. обладающий *вентильными свойствами* (см. т. III, § 100).

Фотоэффект (как внешний, так и внутренний) используется в *фотоэлектронных приборах*, получивших разнообразные применения в науке и технике (в телевидении, космической технике и т. д.). Нашли широкое применение *фотоэлементы* с внешним фотоэффектом, т. е. двухэлектродные приборы, в которых падающая на поверхность катода лучистая энергия при внешнем приложенном напряжении между электродами превращается в энергию электрического тока. Электрическое сопротивление полупроводников падает при освещении; это используется для устройства *фотосопротивлений*. Возникновение фото-ЭДС при освещении приконтактной области двух различных соприкасающихся полупроводников используется в *фотодиодах* для непосредственного превращения лучистой энергии в электрическую. *Фотоэлектронные умножители* (см. т. III, § 103), усиливающие первоначальный фототок во много раз, позволяют регистрировать очень слабое излучение, вплоть до отдельных квантов.

ЗАДАЧИ

1. Определить максимальную скорость фотоэлектронов, вылетающих из никелевого электрода, освещаемого ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 220$ нм. Работа выхода электрона из никеля $A = 4{,}84$ эВ.

Ответ. $v_{\text{макс}} = c\sqrt{\dfrac{2}{m_e c^2}\left(\dfrac{hc}{\lambda} - A\right)} = 510$ км/с.

2. Найти число электронов N, вырываемых светом в одну секунду из катода вакуумного фотоэлемента, если ток насыщения, протекающий через него при освещении, равен $I = 5 \cdot 10^{-10}$ А.

Ответ. $N = I/e = 3{,}1 \cdot 10^9$ с$^{-1}$.

3. Вычислить длину волны λ для длинноволновой границы фотоэффекта на цинке, если работа выхода электрона из цинка $A = 3{,}74$ эВ.

Ответ. $\lambda = hc/A = 330$ нм.

4. Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов при освещении цезиевого электрода монохроматическим светом оказалась равной $\mathscr{E}_{\text{макс}} = 0{,}15$ эВ. Вычислить длину волны λ света, применявшегося при освещении, если работа выхода электрона из цезия $A = 1{,}89$ эВ.

Ответ. $\lambda = hc/(\mathscr{E}_{\text{макс}} + A) = 600$ нм.

5. Уединенный медный шарик облучается ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 200$ нм. До какого максимального потенциала зарядится шарик, если работа выхода электрона из меди $A = 4{,}47$ эВ?

Ответ. $V = \dfrac{hc/\lambda - A}{e} = 1{,}04$ В.

6. При каких длинах волн λ облучающего света шарик в условиях предыдущей задачи заряжаться не будет?

Ответ. $\lambda \geqslant hc/\lambda = 274$ нм.

7. Вакуумный фотоэлемент с катодом из молибдена освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 250$ нм. При наложении задерживающей разности потенциалов фототок уменьшается и обращается в нуль, когда она достигает значения $V = 1{,}8$ В. Определить внешнюю контактную

разность потенциалов между молибденом и материалом анода, если работа выхода электрона из молибдена $A = 4{,}27$ эВ.

Ответ. $V_c = \dfrac{hc/\lambda - A}{e} - V = -1{,}40$ В.

Отрицательный знак означает, что при контакте молибдена с материалом анода потенциал молибдена окажется ниже.

8. Определить наибольшую скорость электронов v на аноде рентгеновской трубки, если минимальная длина волны сплошного рентгеновского излучения составляет $\lambda = 0{,}1$ нм.

Ответ. $v = h/m_e\lambda = 7{,}3 \cdot 10^3$ км/с.

§ 3. Эффект Комптона

1. В 1922 г. Артур Комптон (1892–1962) открыл явление, которое, как и фотоэффект, подтверждает гипотезу фотонов. Комптон изучал рассеяние *жесткого* рентгеновского излучения на телах, состоящих из *легких атомов* (графит, парафин и пр.). Схема его установки показана на рис. 10. Источником рентгеновского излучения служила рентгеновская трубка с молибденовым антикатодом. Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения выделялся диафрагмами D_1 и D_2 и рассеивался на исследуемом теле R. Для исследования спектрального состава рассеянного излучения оно после прохождения ряда диафрагм попадало на кристалл K рентгеновского спектрографа, а затем в ионизационную камеру или на фотопластинку P. Оказалось, что в рассеянном излучении, наряду с исходной длиной волны λ, появляется *смещенная линия* с длиной волны $\lambda' > \lambda$. Изменение длины волны $\lambda' - \lambda$ в длинноволновую сторону спектра при рассеянии излучения получило название *комптоновского смещения*, а само явление — *эффекта Комптона.* Опыт показал, что *комптоновское смещение $\lambda' - \lambda$ для исследованных веществ не зависит от состава рассеивающего тела и длины падающей волны λ.* Оно пропорционально квадрату синуса половины угла рассеяния θ.

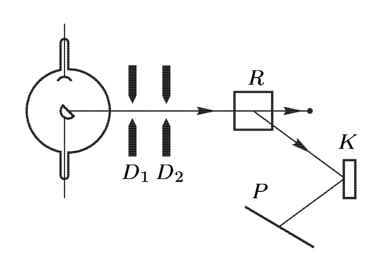


Рис. 10

На рис. 11 представлены результаты измерений на графите при различных углах рассеяния для K-линии молибдена ($\lambda = 0{,}0712605$ нм). Сверху показана форма линии исходного излучения (т. е. угловое распределение интенсивности в линии). Ниже сделано то же самое для рассеянного излучения при различных значениях угла рассеяния. Ясно видно, что первоначально одиночная линия в результате рассеяния становится двойной. Уширение обеих компонент рассеянного излучения обусловлено движением электронов и атомов, на которых происходит рассеяние.

2. Классическая теория не смогла объяснить закономерности комптоновского рассеяния (см. п. 8). Они были поняты только на основе *квантовой теории*, предложенной независимо самим Комптоном

и Дебаем (1884–1966). По их представлениям рассеяние рентгеновского кванта с изменением длины волны есть результат *одиночного акта* столкновения его с электроном.

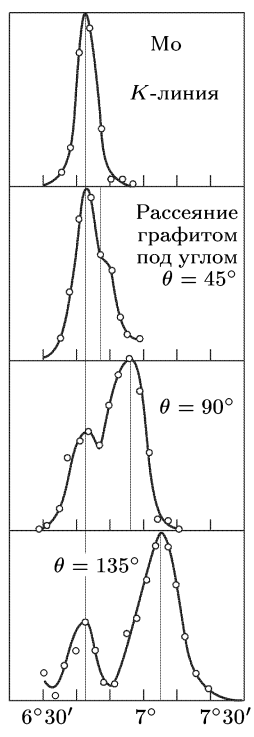


Рис. 11

В легких веществах, с которыми производились опыты Комптона, энергия связи электрона с атомом мала по сравнению с энергией, передаваемой ему рентгеновским квантом при столкновении. Энергия, передаваемая атому квантом при столкновении, тем больше, чем больше угол рассеяния. Поэтому указанное условие выполняется тем лучше, чем больше угол рассеяния. В легких атомах энергией связи электрона внутри атома можно пренебречь при всех углах рассеяния, т. е. все электроны считать свободными. Это и делается в теории Комптона–Дебая. Тогда одинаковость комптоновского смещения $\lambda' - \lambda$ для всех веществ становится понятной само собой. Действительно, в теории с самого начала предполагается, что рассеивающее вещество в сущности состоит только из свободных *электронов*, т. е. индивидуальные особенности вещества никак не учитываются. Но это допустимо только для легких атомов. Для внутренних электронов тяжелых атомов такая идеализация не годится. Учет энергии связи ведет к отступлениям от простой формулы (3.3), выводимой ниже. Такие отступления действительно были обнаружены.

3. Рассмотрим теперь столкновение фотона со свободным электроном. При взаимодействии этих двух частиц должны соблюдаться *законы сохранения энергии и импульса*. Поскольку при столкновении с фотоном электрон может получить релятивистские скорости, столкновение должно рассматриваться на основе *релятивистской механики*. Обозначим через $\mathscr{E}_ф$ и $\mathbf{p}_ф$ энергию и импульс фотона до рассеяния, а через $\mathscr{E}'_ф$ и $\mathbf{p}'_ф$ — после рассеяния. Для электрона полная энергия и импульс до рассеяния будут соответственно $\mathscr{E}_0 = m_0c^2$ и 0 (электрон до рассеяния покоился), а после рассеяния $\mathscr{E}_e$ и $\mathbf{p}_e$. Тогда законы сохранения энергии и импульса дают

$$\mathscr{E}_ф + \mathscr{E}_0 = \mathscr{E}'_ф + \mathscr{E}_e, \quad \mathbf{p}_ф = \mathbf{p}'_ф + \mathbf{p}_e,$$

или

$$\mathscr{E}_e = \mathscr{E}_ф - \mathscr{E}'_ф + \mathscr{E}_0, \quad \mathbf{p}_e = \mathbf{p}_ф - \mathbf{p}'_ф.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\mathscr{E}_e}{c}\right)^2 - \mathbf{p}_e^2 = \frac{(\mathscr{E}_ф - \mathscr{E}'_ф + \mathscr{E}_0)^2}{c^2} - (\mathbf{p}_ф - \mathbf{p}'_ф)^2. \qquad (3.1)$$

Для каждой частицы квадрат четырехмерного вектора в пространстве Минковского есть инвариант, т. е.

$$\left(\frac{\mathscr{E}}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = \mathrm{Inv}, \tag{3.2}$$

причем для фотона этот инвариант равен нулю. Это дает

$$\left(\frac{\mathscr{E}_\text{e}}{c}\right)^2 - \mathbf{p}_\text{e}^2 = \left(\frac{\mathscr{E}_0}{c}\right)^2, \quad \left(\frac{\mathscr{E}_\text{ф}}{c}\right)^2 = \mathbf{p}_\text{ф}^2, \quad \left(\frac{\mathscr{E}'_\text{ф}}{c}\right)^2 = \mathbf{p}'^2_\text{ф}.$$

С учетом этого из (3.1) получаем

$$\frac{\mathscr{E}_\text{ф}\mathscr{E}'_\text{ф}}{c^2} + \frac{\mathscr{E}'_\text{ф}\mathscr{E}_0}{c^2} - \frac{\mathscr{E}_\text{ф}\mathscr{E}_0}{c^2} - \mathbf{p}_\text{ф}\mathbf{p}'_\text{ф} = 0,$$

или

$$1 - \cos\theta = m_0 c\left(\frac{1}{p'_\text{ф}} - \frac{1}{p_\text{ф}}\right),$$

где θ — угол рассеяния, т. е. угол между векторами $\mathbf{p}_\text{ф}$ и $\mathbf{p}'_\text{ф}$.

До сих пор квантовая природа света, во всяком случае в ее специальной форме (1.7), не использовалась. Мы оперировали лишь понятиями энергии и импульса излучения. Наше рассмотрение справедливо *и в классической физике*, поскольку в ней излучению также присущи определенные энергия и импульс, подчиняющиеся законам сохранения. На основе этих законов сохранения мы и рассмотрели взаимодействие электрона с определенной порцией излучения. Теперь мы учтем, что такой порцией излучения является фотон с начальным импульсом $p_\text{ф} = h/\lambda$ и конечным $p'_\text{ф} = h/\lambda'$, где λ и λ' — длины волн падающего и рассеянного излучения. В результате получим

$$\lambda' - \lambda = \lambda_\text{K}(1 - \cos\theta) = 2\lambda_\text{K}\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{3.3}$$

где

$$\lambda_\text{K} = \frac{h}{m_\text{e}c} = 2{,}4263096(15)\cdot 10^{-10}\ \text{см}, \tag{3.4}$$

причем в последней формуле массу покоя электрона мы обозначили через m_e (см. конец § 1).

Из (3.3) следует независимость комптоновского смещения $\lambda' - \lambda$ от вещества рассеивающего тела (для легких атомов). Качественно этот результат уже был получен выше. Формула (3.3) приводит также к независимости комптоновского смещения от первоначальной длины волны λ. Это специфично лишь для *релятивистского* рассмотрения, если дополнительно учесть, что масса покоя одного из сталкивающихся тел (фотона) равна нулю.

Универсальная постоянная λ_K, определяемая формулой (3.4), является одной из важнейших атомных постоянных. Она называется *комптоновской длиной для электрона.* Комптоновская длина представляет собой изменение длины волны фотона при его рассеянии на

угол $\theta = \pi/2$ на свободном неподвижном электроне. Другой физический смысл комптоновской длины будет указан в § 17. Существует комптоновская длина для протона, нейтрона и других элементарных частиц. Она также определяется выражением (3.4), если в нем массу электрона заменить на массу соответствующей частицы. В теоретических исследованиях предпочитают пользоваться другой универсальной постоянной:

$$\lambda\!\!\!^{-}_{\text{K}} = \frac{\hbar}{m_{\text{e}}c} = \frac{\lambda_{\text{K}}}{2\pi} = 3{,}861592(4) \cdot 10^{-11}\ \text{см}. \tag{3.5}$$

Ее также называют *комптоновской длиной для электрона* (*перечеркнутой* или *приведенной*).

Следует особо подчеркнуть, что электрон, на котором рассеивается фотон, в рассматриваемой теории предполагается неподвижным. Если же электрон движется, то при столкновении он может передать свою кинетическую энергию фотону, а сам остановиться. Этот процесс сопровождается уменьшением длины волны фотона и называется *обратным эффектом Комптона.*

4. Формула (3.3) показывает, что рассеяние фотонов на неподвижных свободных электронах всегда должно сопровождаться комптоновским увеличением длины волны. Каково же происхождение несмещенной линии (см. рис. 11)? Она вызывается связанными электронами. В этом случае рассеяние происходит на *атомах*, массы которых могут считаться бесконечно большими. Для бесконечно тяжелого атома комптоновская длина, а с ней и смещение $\lambda' - \lambda$, согласно формулам (3.3) и (3.4), обращаются в нуль. Атом получает импульс от падающего фотона, но его энергия остается без изменения. С ростом атомного номера относительное число связанных электронов увеличивается. Поэтому происходит и возрастание интенсивности несмещенной компоненты по сравнению с интенсивностью смещенной.

Как же меняется соотношение между интенсивностями смещенной и несмещенной компонент при изменении угла рассеяния? Выше было отмечено, что условие, при котором электрон может считаться свободным, выполняется тем лучше, чем больше угол рассеяния. Отсюда следует, что при увеличении угла рассеяния увеличивается относительная доля свободных электронов, а с ней и отношение интенсивностей смещенной и несмещенной компонент.

Чем больше энергия фотона, тем в меньшей степени проявляется связь электрона с атомом. Вот почему для наблюдения эффекта Комптона должны применяться *жесткие рентгеновские лучи.* Однако когда энергия фотона начинает превышать удвоенную энергию покоя электрона $2m_{\text{e}}c^2$, при взаимодействии его с веществом начинается процесс *образования пар*, т. е. превращение фотона в пару электрон–позитрон. С увеличением энергии фотона этот процесс идет относительно все быстрее и быстрее и при энергиях, значительно превышающих $2m_{\text{e}}c^2$, подавляет комптоновское рассеяние. Для видимого света энергия связи электронов в атоме превышает энергию фотона. Вот почему в видимой области эффект Комптона не наблюдается.

Отметим еще, что рассеяние фотонов на атомах *когерентно*, а на свободных электронах *некогерентно*. Последнее очевидно, поскольку свободные электроны и их движения независимы, а потому независимы и рассеяния на них. Колебания же связанных электронов, вызванные падающей волной, согласованы. Поэтому волны, рассеянные на связанных электронах, могут интерферировать между собой и с падающей волной. Именно такая интерференция проявляется при прохождении рентгеновских лучей через кристаллы и определяется известными условиями Лауэ и Вульфа–Брэгга (см. т. IV, § 61).

5. При рассеянии рентгеновского фотона на свободном электроне электрон получает отдачу, как это изображено параллелограммом на рис. 12. Из этого параллелограмма получаем

$$p'_{\text{е}}\cos\varphi + p'_{\text{ф}}\cos\theta = p_{\text{ф}}, \quad p'_{\text{е}}\sin\varphi = p'_{\text{ф}}\sin\theta.$$

Исключая отсюда $p'_{\text{е}}$ и учитывая соотношение $p_{\text{ф}}/p'_{\text{ф}} = \lambda'/\lambda$, получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\theta}{\lambda'/\lambda - \cos\theta}.$$

Отношение λ'/λ найдем с помощью формулы (3.3). После несложных преобразований получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)}{1 + \lambda_{\text{К}}/\lambda} = \frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)}{1 + h\nu/(m_{\text{e}}c^2)}. \tag{3.6}$$

Этой формулой определяется направление вылета электрона отдачи. Аналогично нетрудно получить его энергию и импульс (см. задачу 2 к этому параграфу).

6. Процесс, изображенный на рис. 12, наблюдался в камере Вильсона (1869–1959). Напомним, что в камере Вильсона быстрым адиабатическим расширением создается пересыщенный водяной пар (см. т. II, § 119). Заряженная частица, пролетая через камеру, ионизует окружающий воздух. На ионах оседают капельки тумана, делающие видимым след заряженной частицы. Такой след называется *треком*. Направление движения электрона отдачи (OA на рис. 12) можно, следовательно, фиксировать в камере Вильсона. Энергия же и величина импульса электрона отдачи определятся длиной его пробега, т. е. длиной трека. Импульс $p'_{\text{е}}$ электрона отдачи может, таким образом, считаться известным.

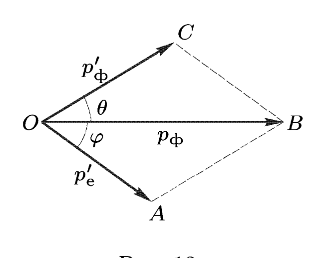


Рис. 12

Но как определить отрезки OB и OC, изображающие импульсы падающего и рассеянного фотонов? Фотоны не заряжены и не оставляют следов в камере Вильсона. Однако начало отрезка OB отмечается точкой, в которой начинается трек электрона отдачи, а длина этого отрезка определяется величиной импульса падающего фотона. Этими

данными отрезок OB определен полностью. Остается определить только отрезок OC, для чего достаточно знать положение точки C. Но она будет определена, если рассеянный фотон сам претерпит комптоновское рассеяние, в результате чего будет отмечен новый электрон отдачи. В этом случае все три отрезка OA, OB и OC будут известны, и можно убедиться, что OB действительно является диагональю параллелограмма, построенного на OA и OC, как того требует квантовая теория эффекта Комптона. Можно, в частности, убедиться, что между углами рассеяния фотона и электрона отдачи действительно выполняется соотношение (3.6). Конечно, все это нельзя получить с полной достоверностью в результате только одного опыта. На основании одного опыта нельзя утверждать, что новый трек оставлен не каким-то случайным электроном, не имеющим отношения к рассматриваемому явлению, а именно новым электроном отдачи, о котором говорилось выше. Это можно утверждать только с той или иной *степенью вероятности*, на основе статистической обработки результатов очень большого числа опытов. Такая статистическая обработка и подтвердила правильность исходных положений фотонной теории эффекта Комптона. Она показала, в частности, что *законы сохранения энергии и импульса выполняются в элементарных актах рассеяния фотонов на электронах.*

7. Д.В. Скобельцыным (р. 1892) наблюдались электроны отдачи в камере Вильсона, помещенной в сильное магнитное поле, при облучении ее γ-лучами радиоактивного препарата. Их траекториями были окружности радиуса

$$R = \frac{cp'_{\mathrm{e}}}{eB}, \tag{3.7}$$

где B — напряженность магнитного поля. Измерив этот радиус, можно с помощью этой формулы вычислить импульс, а затем по формуле

$$\mathscr{E}^2 = (p'_{\mathrm{e}}c)^2 + (m_0c^2)^2 \tag{3.8}$$

и энергию электрона. Оказалось, что это действительно *релятивистские электроны*, а потому пользоваться теорией относительности для них обязательно.

8. В связи с последним результатом затронем вопрос о невозможности классического истолкования эффекта Комптона. Поскольку электроны в легких атомах могут считаться свободными, никакими собственными частотами они не обладают. Рассмотрим с классической точки зрения их поведение в поле монохроматической электромагнитной волны. Пренебрежем сначала действием магнитного поля. В этом приближении, если пренебречь также затуханием, электрон приходит в колебания, частота которых совпадает с частотой электромагнитной волны. Колеблющийся электрон переизлучает электромагнитные волны, которые и представляют собой рассеянное излучение. Поэтому с классической точки зрения частота рассеянного излучения должна совпадать с частотой падающего.

Этот вывод, однако, был получен в пренебрежении действием магнитного поля. Если учесть магнитное поле $\mathbf{B}$ и снова пренебречь затуханием, то движение свободного электрона будет описываться уравнением

$$\dot{\mathbf{p}} = -e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,[\mathbf{vB}]\right).$$

В нерелятивистском приближении это — линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Благодаря этому при вынужденных колебаниях электронов могут возбудиться частоты, отличные от частоты падающей волны. Конечно, такая возможность может проявиться только тогда, когда скорость электрона v не пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света. Особо существенной она может быть при релятивистских скоростях, когда движение электрона к тому же осложнено нелинейными эффектами. Но в эффекте Комптона появляются именно релятивистские электроны отдачи, как это следует из опытов с камерой Вильсона. Казалось бы, появляется надежда, что при рассеянии на свободных электронах может возникать изменение частоты электромагнитной волны.

Однако если бы даже это изменение частоты подчинялось наблюдаемой зависимости от угла рассеяния, такую надежду следует оставить. Достаточно поставить вопрос, откуда в непрерывной электромагнитной волне могут появиться релятивистские электроны отдачи? (А опыт показывает, что, как и в случае фотоэффекта, они при освещении гамма-лучами появляются без запаздывания!) Невообразимо, как может непрерывная электромагнитная волна сжаться в плотный сгусток энергии и сосредоточить свое действие на отдельном электроне! Поэтому следует признать, что опыт вынуждает нас принять квантовую точку зрения, согласно которой комптоновское рассеяние излучения и электроны отдачи появляются в результате *одиночного действия* фотона на отдельный электрон.

ЗАДАЧИ

1. В результате комптоновского рассеяния на свободном покоящемся электроне длина волны фотона с энергией $\mathscr{E}_{\text{ф}}$ увеличилась в α раз. Найти кинетическую энергию $\mathscr{E}_{\text{e}}$ электрона отдачи.

Ответ. $\mathscr{E}_{\text{e}} = \mathscr{E}_{\text{ф}}(\alpha - 1)/\alpha$.

2. Фотон рентгеновского излучения с энергией $\mathscr{E}_{\text{ф}}$ в результате комптоновского рассеяния на свободном покоящемся электроне отклонился от первоначального направления на угол θ. Определить кинетическую энергию $\mathscr{E}_{\text{кин}}$ и импульс p'_{e} электрона отдачи. Показать на основе геометрических соображений, что импульс электрона по абсолютной величине окажется больше импульса падающего фотона, если фотон отклонится от первоначального направления на угол $\theta = \pi/2$.

Ответ.

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} = \frac{hc}{\lambda}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\lambda_{\text{K}}\sin^2(\theta/2)}\right), \quad (p'_{\text{e}}c)^2 = \mathscr{E}_{\text{кин}}^2 + 2m_{\text{e}}c^2\mathscr{E}_{\text{кин}}.$$

3. Фотон с длиной волны λ рассеялся на движущемся свободном электроне. В результате электрон остановился, а фотон отклонился от первоначального направления на угол θ. Найти изменение длины волны фотона $\lambda' - \lambda$ в таком процессе. Свести эту задачу к задаче о рассеянии фотона на неподвижном электроне.

Ответ. $\lambda' - \lambda = -(2h/m_e c)\sin^2(\theta/2)$. В результате рассеяния длина волны фотона уменьшается.

4. Гамма-квант с энергией $h\nu$ рассеивается на неподвижном электроне. Найти направления рассеянного кванта, чтобы при взаимодействии с веществом он мог породить электрон–позитронную пару. Найти также предельное значение $\theta_{\text{пред}}$ угла рассеяния, при котором этот процесс возможен для гамма-квантов очень высоких энергий.

Ответ. Рассеянный гамма-квант может породить электрон-позитронную пару, если рассеяние происходит внутрь конуса

$$\cos\theta > \frac{1}{2} + \frac{m_e c^2}{h\nu}.$$

Если же направление рассеяния лежит вне этого конуса, то рождение электрон–позитронных пар невозможно. Для квантов очень высоких энергий $(h\nu \to \infty)$ пары могут образовываться, если угол рассеяния не превосходит $\theta_{\text{пред}} = 60^\circ$.

5. Показать, что при взаимодействии с веществом фотон сколь угодно высокой энергии, испытавший комптоновское рассеяние на неподвижном электроне строго назад $(\theta = \pi)$, не может породить электрон–позитронную пару.

6. Пусть ν — частота фотона до комптоновского рассеяния на электроне в системе отсчета, где электрон покоится после соударения с фотоном, а ν' — частота фотона после соударения в системе отсчета, где электрон покоился до соударения (т. е. в лабораторной системе). Показать, что $\nu = \nu'$ (теорема взаимности).

Решение. Обозначим рукописными буквами $\mathscr{P}$ и $\mathscr{H}$ четырехмерные импульсы электрона и фотона $(\mathbf{p}, \mathscr{E}/c)$ до соударения. Те же величины после соударения обозначим такими же буквами, но со штрихами. При упругом столкновении четырехмерный импульс системы фотон–электрон сохраняется:

$$\mathscr{P} + \mathscr{H} = \mathscr{P}' + \mathscr{H}'.$$

Переписав это соотношение в виде $\mathscr{P} - \mathscr{H}' = \mathscr{P}' - \mathscr{H}$ и возведя его в квадрат, получим

$$\mathscr{P}^2 + \mathscr{H}'^2 - 2\mathscr{P}\mathscr{H}' = \mathscr{P}'^2 + \mathscr{H}^2 - 2\mathscr{P}'\mathscr{H}.$$

Квадрат 4-импульса частицы в пространстве Минковского [1] есть инвариант. Для электрона он равен

$$\mathscr{P}^2 = \mathbf{p}^2 - \frac{\mathscr{E}_e^2}{c^2} = \mathbf{p}'^2 - \frac{\mathscr{E}_e'^2}{c^2} = -m_0^2 c^2,$$

где через m_0 обозначена масса покоя электрона. Для фотона такой же инвариант равен нулю: $\mathscr{H}^2 = 0$ (так как масса покоя фотона равна нулю).

[1] Напомним, что в таком пространстве квадрат 4-вектора равен разности квадратов пространственной и временной составляющих. В скалярное произведение 4-векторов произведение временных составляющих также входит со знаком минус.

Таким образом,

$$\mathscr{P}\mathscr{K}' = \mathscr{P}'\mathscr{K}.$$

В системе отсчета, где электрон до столкновения покоился,

$$\mathscr{P} = (0, m_0 c), \quad \mathscr{K}' = (\mathbf{p}'_{\text{ф}}, h\nu'/c), \quad \text{так что} \quad \mathscr{P}\mathscr{K}' = -m_0 h\nu'.$$

В системе же отсчета, где электрон покоится после соударения,

$$\mathscr{P}' = (0, m_0 c), \quad \mathscr{K} = (\mathbf{p}_{\text{ф}}, h\nu/c), \quad \mathscr{P}'\mathscr{K} = -m_0 h\nu.$$

Отсюда $\nu = \nu'$, что и требовалось доказать.

7. Показать, что частота фотона после комптоновского рассеяния в системе отсчета, в которой электрон покоится после соударения, равна частоте падающего фотона в лабораторной системе.

8. Показать, что при комптоновском рассеянии в системе отсчета, все время связанной с электроном, частоты падающего и рассеянного фотонов одинаковы, а импульсы равны по величине, но противоположно направлены.

§ 4. Эффект Доплера при движении источника света в вакууме с фотонной точки зрения

1. Фотоэлектрический эффект и эффект Комптона — типично *квантовые явления*, не допускающие классической трактовки. В этом и следующих трех параграфах рассматриваются явления, которые допускают классическое и квантовое объяснения, согласующиеся между собой. Рассмотрим сначала эффект Доплера (1803–1853) в нерелятивистском приближении.

Возьмем какую-либо инерциальную систему отсчета, в которой источник света массы M движется в вакууме со скоростью v. Энергия источника слагается из кинетической энергии $Mv^2/2$ и внутренней энергии $\mathscr{E}$ возбужденных атомов. При испускании света внутренняя энергия источника изменяется. Начальное значение ее обозначим через $\mathscr{E}$, конечное — через $\mathscr{E}'$. Кроме того, из-за давления излучения источник испытывает отдачу — его скорость получает приращение $(v' - v)$. По законам сохранения энергии и импульса

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \mathscr{E} = \frac{1}{2}Mv'^2 + \mathscr{E}' + \mathscr{E}_{\text{изл}}, \tag{4.1}$$

$$Mv = Mv' + \mathbf{p}_{\text{изл}}, \tag{4.2}$$

где $\mathscr{E}_{\text{изл}}$ и $\mathbf{p}_{\text{изл}}$ — энергия и импульс излучения в рассматриваемой инерциальной системе отсчета.

Возведем второе уравнение в квадрат, разделим полученное соотношение на $2M$ и вычтем его из первого. Тогда получим

$$\mathscr{E} - \mathscr{E}' = \mathscr{E}_{\text{изл}} - \mathbf{v}'\mathbf{p}_{\text{изл}} - \frac{\mathbf{p}^2_{\text{изл}}}{2M},$$

или на основании (4.2)

$$\mathscr{E} - \mathscr{E}' = \mathscr{E}_{\text{изл}} - \mathbf{v}\mathbf{p}_{\text{изл}} + \frac{\mathbf{p}^2_{\text{изл}}}{2M}.$$

Если масса источника M велика, то последним членом в этом уравнении можно пренебречь. В этом приближении

$$\mathscr{E} - \mathscr{E}' = \mathscr{E}_{\text{изл}} - \mathbf{v}\mathbf{p}_{\text{изл}}. \tag{4.3}$$

В этом соотношении можно еще исключить импульс излучения. Излучение — существенно *релятивистский объект.* Для него импульс выражается через энергию соотношением $p_{\text{изл}} = \mathscr{E}_{\text{изл}}/c$. Подстановка этого выражения в предыдущее уравнение дает

$$\mathscr{E} - \mathscr{E}' = \mathscr{E}_{\text{изл}}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right), \tag{4.4}$$

где θ — угол между направлением движения излучающего тела и направлением излучения (т. е. угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{p}$).

Соотношение (4.4) было получено *без использования каких бы то ни было квантовых представлений.* При его выводе использовались только законы сохранения энергии и импульса, справедливые как в классической, так и в квантовой физике. Примем теперь, что излучение происходит в форме фотонов. Предположим, что испущен один фотон. Если частоту фотона в системе отсчета, в которой излучатель движется (т. е. в рассматриваемой нами инерциальной системе отсчета), обозначить через ν', то $\mathscr{E}_{\text{изл}} = h\nu'$. Частоту же излучения в системе отсчета, где излучатель покоится, обозначим через ν. Тогда, рассматривая процесс испускания в такой системе, можно написать $\mathscr{E} - \mathscr{E}' = h\nu$, так как в этой системе изменение внутренней энергии излучателя происходит только за счет испускания светового кванта. Подставляя эти выражения в соотношение (4.4) и сокращая на h, получим

$$\nu' = \frac{\nu}{1 - \dfrac{v}{c}\cos\theta}. \tag{4.5}$$

Эта формула верна только в *первом порядке*, т. е. с точностью до членов первой степени относительно v/c, так как она была получена на основе нерелятивистской механики. Поэтому вместо формулы (4.5) с той же точностью можно пользоваться формулой

$$\nu' = \nu\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta\right). \tag{4.6}$$

2. Получим теперь для эффекта Доплера *релятивистскую формулу*, которой можно пользоваться уже при любых значениях скорости v. В этом случае нет смысла разделять полную (релятивистскую) энергию тела на кинетическую и внутреннюю. Под $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$ мы будем теперь понимать *полные энергии* тела в рассматриваемой инерциальной системе отсчета до и после испускания света соответственно. Соответствующие энергии покоя тела до и после испускания обозначим через $\mathscr{E}_0$ и $\mathscr{E}'_0$. Снова будем оперировать с энергиями и импульсами, вводя квантовые представления лишь на заключительном этапе вычислений.

Законы сохранения энергии и импульса при испускании света удобно записать в форме

$$\mathscr{E}' = \mathscr{E} - \mathscr{E}_{\text{изл}}, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{p}_{\text{изл}}. \tag{4.7}$$

Возведем оба равенства в квадрат, умножив предварительно второе из них на c, а затем вычтем почленно. С учетом соотношений

$$\mathscr{E}^2 - (\mathbf{p}c)^2 = \mathscr{E}_0^2, \quad \mathscr{E}'^2 - (\mathbf{p}'c)^2 = \mathscr{E}_0'^2, \quad \mathscr{E}_{\text{изл}} = cp_{\text{изл}}$$

получим

$$\mathscr{E}_0'^2 = \mathscr{E}_0^2 - 2\mathscr{E}\mathscr{E}_{\text{изл}} + 2c^2\mathbf{p}'\mathbf{p}_{\text{изл}}.$$

Учтем теперь, что

$$p = mv = \frac{\mathscr{E}}{c^2}\,v = \frac{\mathscr{E}\beta}{c},$$

где $\beta = v/c$. Тогда

$$\mathscr{E}_0^2 - \mathscr{E}_0'^2 = 2\mathscr{E}\mathscr{E}_{\text{изл}}(1 - \beta\cos\theta), \tag{4.8}$$

или

$$\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_0' = \frac{2\mathscr{E}}{\mathscr{E}_0 + \mathscr{E}_0'}\,\mathscr{E}_{\text{изл}}(1 - \beta\cos\theta).$$

Здесь, как и прежде, θ означает угол между направлением движения излучающего тела и направлением распространения излучения. Если масса тела велика, то в знаменателе последнего соотношения можно положить $\mathscr{E}_0' = \mathscr{E}_0$. Учтя еще, что $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0/\sqrt{1-\beta^2}$, придем к соотношению

$$(\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_0')\sqrt{1-\beta^2} = \mathscr{E}_{\text{изл}}(1 - \beta\cos\theta). \tag{4.9}$$

Теперь воспользуемся квантовыми соотношениями $\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_0' = h\nu$ и $\mathscr{E}_{\text{изл}} = h\nu'$, совершенно такими же, как и в нерелятивистском случае. В результате и получим *релятивистскую формулу* для эффекта Доплера:

$$\nu' = \nu\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta\cos\theta}. \tag{4.10}$$

3. Обе формулы фотонной теории для эффекта Доплера, нерелятивистская (4.5) и релятивистская (4.10), совпадают с соответствующими формулами, которые дает классическая волновая теория света (см. т. IV, § 107, 108). Глубокая причина такого совпадения состоит в том, что в фотонной теории обе формулы получаются из соотношений (4.3) и (4.9). Эти же соотношения, поскольку они выведены из одних только законов сохранения энергии и импульса при испускании света, остаются справедливыми независимо от того, представляет ли свет непрерывные волны или состоит из отдельных фотонов. Единственное предположение квантового характера, которое было сделано при выводе формул для частоты испускаемого света, состоит в том, что энергия фотона однозначно определяется его частотой. Более того, связь между этими величинами должна быть специального вида:

энергия фотона пропорциональна частоте света. Значение же коэффициента пропорциональности, т. е. постоянная Планка h, выпадает из окончательных формул для частоты колебаний. А то обстоятельство, что связь между $\mathscr{E}$ и ν должна быть именно такой, видно из того, что при преобразовании Лорентца величины $\mathscr{E}$ и ν преобразуются одинаково. Только благодаря этому, как уже отмечалось выше, соотношение $\mathscr{E} = h\nu$ релятивистски инвариантно.

Мы вернемся к эффекту Доплера в § 6, где предполагается, что источник света движется не в вакууме, а в среде с показателем преломления n.

§ 5. Отражение и преломление света в фотонной теории. Фотоны в среде

1. В XIX веке считалось, что опытом Фуко окончательно опровергнута корпускулярная теория света. Этот опыт доказал, что скорость света в воде меньше, чем в вакууме. Однако по волновой теории такое соотношение между скоростями относится к *фазовой скорости* света. В опыте же Фуко, если бы свет действительно представлял собой волны, то измерялась бы *групповая скорость* (см. т. IV, § 108). Поэтому с чисто логической точки зрения аргументация физиков XIX века должна быть дополнена указанием на то, что в опыте Фуко скорость света измерялась в практически недиспергирующих средах. В этом случае фазовая скорость совпадает с групповой. Заключение о несостоятельности корпускулярной теории остается верным, с той существенной оговоркой, что оно относится не к корпускулярной теории вообще, а к корпускулярной теории *в форме Ньютона.* Как же обстоит дело в фотонной теории Эйнштейна?

Отражение и преломление света в корпускулярной теории Ньютона рассматривалось на основе классической ньютоновской механики. К фотонам классическая механика неприменима. Природа фотонов — *двойственная.* При распространении они ведут себя как *волны* и только при взаимодействии с веществом проявляют *свойства частиц.* А поскольку отражение и преломление являются специальными случаями распространения света, фотонная теория при рассмотрении этих явлений должна приводить к тем же результатам, что и классическая волновая теория.

2. Этот вопрос заслуживает более подробного рассмотрения, которое и приводится ниже. В среде, как и в вакууме, можно ввести представление о распространении света в виде фотонов. При этом среду мы будем считать *неподвижной.* Иными словами, будем рассматривать явления в системе отсчета, относительно которой среда неподвижна. Такая система является *выделенной*, или *привилегированной.* Вопрос заключается в том, каковы энергия и импульс фотона в среде? Заметим, что *энергия и импульс фотона слагаются из энергии и импульса электромагнитного поля и среды.* Но в нашем рассмотрении идет речь о сумме этих величин, т. е. о *полных* энергии и импульсе, связанных

с распространением фотона в среде. Среду мы будем считать изотропной и характеризовать ее свойства показателем преломления $n(\omega)$.

По фотонным представлениям при отражении и преломлении *общее число фотонов не меняется. Если граница неподвижна, то не меняются и энергии отраженного и прошедшего фотонов.* Докажем это утверждение сначала для отражения, предполагая, что фотон падает на среду из вакуума. Энергия падающего фотона $\mathscr{E}_e = \hbar\omega$, т. е. однозначно определяется частотой ω. Такое же соотношение между энергией и частотой должно существовать и для отраженного фотона, поскольку он распространяется в таком же вакууме, как и падающий фотон. Но при отражении от неподвижной границы частота ω не меняется. В противном случае происходило бы изменение цвета отраженного луча, чего на самом деле не происходит. Таким образом, энергия отраженного фотона $\mathscr{E}_r$ также равна $\hbar\omega$, т. е. $\mathscr{E}_r = \mathscr{E}_e$.

3. Для прошедшего фотона указанное утверждение не столь очевидно. Чтобы его доказать, рассмотрим плоскопараллельный пучок, состоящий из N_e монохроматических фотонов, падающий из вакуума под любым углом на неподвижную границу среды. Пусть число отраженных фотонов будет N_r, прошедших N_d, а соответствующие им энергии $\mathscr{E}_r$ и $\mathscr{E}_d$. По закону сохранения энергии

$$N_e\mathscr{E}_e = N_r\mathscr{E}_r + N_d\mathscr{E}_d. \tag{5.1}$$

Условие сохранения общего числа фотонов:

$$N_e = N_r + N_d. \tag{5.2}$$

Наконец, по доказанному $\mathscr{E}_r = \mathscr{E}_e$. Отсюда получается $\mathscr{E}_d = \mathscr{E}_e$, что и требовалось доказать. Таким образом, и для фотонов в среде справедливо соотношение $\mathscr{E} = \hbar\omega$.

Рассмотрим теперь импульс фотона в среде. Как и в случае энергии, можно написать

$$N_e p_e = N_r p_r + N_d p_d, \quad N_e = N_r + N_d, \tag{5.3}$$

где индексы e, r, d относятся к падающему, отраженному и прошедшему фотонам. Рассмотрим сначала поведение касательных составляющих импульсов. Направим ось X вдоль границы раздела, а ось Z — перпендикулярно к ней. Любая теория должна приводить к закону отражения, из которого следует, что $p_{ex} = p_{rx}$. Но тогда для p_{ex}, p_{rx}, p_{dx} получается в точности такая же система уравнений, как и для соответствующих энергий. Из нее находим

$$p_{ex} = p_{rx} = p_{dx}, \tag{5.4}$$

т. е. касательные составляющие импульсов всех трех фотонов одинаковы.

Совсем иначе ведут себя нормальные составляющие. В этом случае по-прежнему

$$N_e p_{ez} = N_r p_{rz} + N_d p_{dz}.$$

Однако если падающий фотон приближается к среде, то отраженный удаляется от нее, так что $p_{rz} = -p_{ez}$. В результате получится

$$(N_e + N_r)p_{ez} = N_d p_{dz},$$

или

$$(N_e + N_r)p_{ez} = (N_e - N_r)p_{dz},$$

или, наконец,

$$p_d = \frac{N_e + N_r}{N_e - N_r}\,\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\,p_e,$$

где φ — угол падения, а ψ — угол преломления.

Конечно, связь между p_d и p_e определяется свойствами среды и не может зависеть от характера поляризации падающего света. Это позволяет упростить вычисления. Предположим, что падающий свет поляризован перпендикулярно к плоскости падения. Тогда электрические векторы всех фотонов будут коллинеарны, так что на основании формулы Френеля

$$\frac{N_r}{N_e} = \frac{n\cos\psi - \cos\varphi}{n\cos\psi + \cos\varphi}$$

(см. т. IV, § 65). Действительно, в монохроматической волне все фотоны когерентны, и поэтому N_r/N_e дает отношение *амплитуд*, а не интенсивностей отраженной и падающей волн. Выбор знака в последней формуле определен из тех соображений, что числа фотонов N_r и N_e существенно положительны. В результате получается

$$p_d = np_e. \tag{5.5}$$

4. Резюмируя изложенное, приходим к заключению, что, как и в вакууме, энергия и импульс фотона в веществе определяются формулами

$$\mathscr{E} = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \tag{5.6}$$

Однако в веществе волновое число

$$k = n\omega/c, \tag{5.7}$$

т. е. в n раз больше, чем в вакууме. Если ввести фазовую скорость $v = c/n$ и длину волны $\lambda = 2\pi v/\omega$ в рассматриваемой среде, то получатся формулы

$$k = \omega/v = 2\pi/\lambda, \tag{5.8}$$

одинаково применимые к вакууму и веществу, так как в вакууме $v = c$. Связь между энергией и импульсом фотона в среде принимает вид

$$\mathscr{E} = pv = pc/n. \tag{5.9}$$

Разумеется, это соотношение справедливо только в привилегированной системе отсчета, в которой среда покоится.

Из изложенного видно, что фотонная теория преломления света аналогична ньютоновской. Обе теории определяют угол преломления светового луча из закона сохранения импульса, точнее — его тангенциальной составляющей. Только ньютоновская теория связывает этот

закон с направлением силы, действующей на световую корпускулу нормально к границе раздела, что в случае фотона лишено смысла. Количественное же различие между результатами обеих теорий связано с тем, что *импульс ньютоновской корпускулы пропорционален ее скорости v, а импульс фотона в среде обратно пропорционален.* По этой причине фотонная теория приводит к такому же выражению для показателя преломления, как и классическая волновая теория.

Представление о фотонах в среде применимо не только к преломлению света, но и ко многим другим явлениям, о которых говорится в последующих параграфах.

5. В заключение — одно принципиальное замечание, затрагивающее уже *физическое толкование* корпускулярно-волнового дуализма. Как уже было отмечено выше, общее число фотонов при отражении и преломлении не меняется. Если на границу раздела падает всего один фотон, то после падения он будет обнаружен либо в виде отраженного, либо в виде прошедшего фотона. Импульс у отраженного фотона — такой же по величине, как и у падающего, но имеет иное направление. Импульс прошедшего фотона меняет не только направление, но и величину. Не является ли это нарушением закона сохранения импульса в *элементарном процессе*, т. е. для единичного фотона? Не является ли этот закон лишь статистическим законом, как это фактически требовалось в пп. 2 и 3? Такое заключение отвергается современной квантовой теорией.

Явления интерференции фотонов приводят к заключению, что при падении фотона на границу раздела возникает *новое состояние*, не поддающееся описанию на языке классической теории. Оно характеризуется тем, что *фотон отчасти находится о состоянии отражения, отчасти в состоянии преломления. Закон сохранения импульса соблюдается и в элементарном процессе.* Если же произвести опыт по обнаружению фотона (в квантовой механике его называют *измерением*), то будет обнаружен либо отраженный, либо прошедший фотон. Но измерение меняет состояние системы, нарушения закона сохранения импульса не происходит. В каком состоянии будет обнаружен фотон, — в состоянии отражения или в состоянии преломления, — это заранее предсказать с достоверностью невозможно. Можно указать лишь *вероятности* того и другого состояний.

§ 6. Излучение Вавилова–Черенкова. Эффект Доплера при движении источника света в среде

1. Пусть источник света движется в изотропной среде с показателем преломления $n(\omega)$. Законы сохранения энергии и импульса при испускании света можно записать совершенно так же, как и в случае вакуума, т. е. в виде (4.7), сохранив при этом прежние обозначения. Разумеется, мы пользуемся привилегированной системой отсчета, в которой рассматриваемая среда *неподвижна.* С помощью одних только законов сохранения, конечно, нельзя решить вопрос, произойдет или не

произойдет испускание света. Для этого необходимо привлечь более детальные электродинамические уравнения. Но *если законы сохранения не выполняются, то испускание невозможно.* Законы сохранения не раскрывают механизма явления. Они могут дать только *необходимое*, но не достаточное условие испускания.

С уравнениями (4.7) мы поступим в точности так же, как в § 4, с той только разницей, что связь энергии с импульсом излучения запишем в виде $p_{\text{изл}} = n\mathscr{E}_{\text{изл}}/c$. Тогда получим

$$\mathscr{E}_0^2 - \mathscr{E}_0'^2 = \mathscr{E}_{\text{изл}}^2(n^2 - 1) - 2\mathscr{E}\mathscr{E}_{\text{изл}}(\beta n\cos\theta - 1). \tag{6.1}$$

При $n = 1$, как и должно быть, это соотношение переходит в (4.8). Однако, в отличие от вакуума, уравнение (6.1) учитывает то обстоятельство, что в явлении участвуют не только излучающий атом и само излучение, но и *среда*, в которой движется атом. Это учитывается феноменологически — посредством показателя преломления среды.

2. Применим уравнение (6.1) к движению частицы, *внутреннее состояние которой при движении не меняется*, т. е. частица все время находится в одном и том же квантовом состоянии. В случае устойчивой частицы это будет всегда, когда энергии взаимодействия ее с окружающей средой недостаточно, чтобы перевести частицу в более высокое энергетическое состояние. Так будет обстоять дело, например, при движении электрона, протона и другой, даже неустойчивой, элементарной частицы, если только во время полета она не распадется или не испытает какого-либо другого превращения. Во всех этих случаях от внутренних степеней свободы частицы можно отвлечься, считая ее как бы бесструктурной. Масса m_0, а с ней и энергия покоя $\mathscr{E} = m_0c^2$ частицы во время движения остаются постоянными. В уравнении (6.1) следует положить $\mathscr{E}_0' = \mathscr{E}_0$, что дает

$$\mathscr{E}_{\text{изл}}(n^2 - 1) - 2\mathscr{E}(\beta n\cos\theta - 1) = 0,$$

если только испускание света действительно происходит ($\mathscr{E}_{\text{изл}} \neq 0$). С учетом соотношения $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0/\sqrt{1-\beta^2}$ отсюда получаем

$$\mathscr{E}_{\text{изл}} = \frac{2\mathscr{E}_0}{\sqrt{1-\beta^2}(n^2 - 1)}(\beta n\cos\theta - 1), \tag{6.2}$$

а потому

$$\cos\theta = \frac{1}{\beta n} + \frac{\sqrt{1-\beta^2}(n^2-1)}{2\beta n}\left(\frac{\mathscr{E}_{\text{изл}}}{\mathscr{E}_0}\right). \tag{6.3}$$

Если частица испустила один квант, то $\mathscr{E}_{\text{изл}} = \hbar\omega$, а потому

$$\cos\theta = \frac{1}{\beta n(\omega)} + \frac{\sqrt{1-\beta^2}(n^2(\omega)-1)}{2\beta n(\omega)}\frac{\hbar\omega}{\mathscr{E}_0}. \tag{6.4}$$

Второе слагаемое в этой формуле учитывает отдачу, которую получает излучающая частица при испускании кванта $\hbar\omega$. Если пренебречь этим

слагаемым (что допустимо, когда оно по модулю очень мало по сравнению с единицей), то получится классическая формула

$$\cos\theta = \frac{1}{\beta n(\omega)}. \tag{6.5}$$

Из формулы (6.5) следует, что $\cos\theta > 0$, т. е. испускание света может происходить *только вперед*. Для испускания света частоты ω необходимо, чтобы было $\beta n(\omega) > 1$. То же получается и из общей формулы (6.4), так как оба слагаемых в правой части этой формулы существенно положительны. Если ввести фазовую скорость света в среде по формуле $n(\omega) = c/v_{\text{фаз}}$, то получится

$$v > v_{\text{фаз}}, \tag{6.6}$$

т. е. *для испускания света необходимо, чтобы скорость частицы превосходила фазовую скорость света в среде.* Отсюда следует, что испускание невозможно при движении частицы в вакууме, так как в этом случае $v_{\text{фаз}} = c$. Энергия излучения черпается за счет кинетической энергии частицы, так как при испускании света внутреннее состояние частицы остается без изменения. По этой причине движение частицы замедляется. Однако ускорение само по себе на механизм явления не влияет. В этом смысле говорят, что испускание света возможно и при *равномерном движении* заряженной частицы в среде, если только выполнено условие (6.6).

Рассмотренное явление было открыто в 1934 г. и экспериментально исследовано П. А. Черенковым (р. 1904) в лаборатории и под руководством С. И. Вавилова (1891–1951). Его называют *излучением Вавилова–Черенкова.* Классическая теория явления была создана И. Е. Таммом (1895–1971) и И. М. Франком (р. 1908), а квантовая — В. Л. Гинзбургом (р. 1916) (см. т. IV, § 38).

3. Рассмотрим теперь случай, когда *при движении внутреннее состояние излучающей частицы изменяется.* Примером может служить движущийся атом или ион. В этом случае испускание света происходит за счет внутренней и кинетической энергии атома. Как и в § 4, частоту излучаемого света неподвижного атома обозначим через ω, а движущегося — через ω'. (Эти обозначения отличаются от обозначений предыдущего пункта.) Кроме того,

$$\mathscr{E}_0^2 - \mathscr{E}_0'^2 = (\mathscr{E}_0 + \mathscr{E}_0')(\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_0') = [2\mathscr{E}_0 - (\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_0')](\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_0').$$

При подстановке этого выражения в (6.1), ради упрощения, пренебрежем квадратами малых величин $\mathscr{E}_{\text{изл}}$ и $(\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_0')$. Обе эти величины, как видно из дальнейшего, пропорциональны $\hbar^2$. В указанном приближении, следовательно, учитываются члены, линейные по $\hbar$ и отбрасываются члены, пропорциональные $\hbar^2$. Благодаря этому из окончательного выражения для частоты излучаемого света выпадает постоянная Планка $\hbar$, и для эффекта Доплера получается классический результат. В нем, с точностью до малых квантовых поправок, содержатся все существенные выводы. Выполнив указанную подстановку и учтя при

этом, что $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0/\sqrt{1-\beta^2}$, получим классическую формулу

$$\mathscr{E}_{\text{изл}} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}(\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_0')}{1-\beta n\cos\theta}. \tag{6.7}$$

Возможны три случая.

1) $1-\beta n > 0$, т. е. скорость источника меньше фазовой скорости света в среде. В этом случае тем более $1-\beta n\cos\theta > 0$, т. е. знаменатель в (6.7) положителен. Так как при испускании всегда $\mathscr{E}_{\text{изл}} > 0$, то испускание возможно лишь при условии $\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_0' > 0$, т. е. атом в результате испускания должен переходить с более высокого на более низкий энергетический уровень. В частности, невозбужденный атом в рассматриваемом случае излучать не может. Чтобы от энергии перейти к частоте, заметим, что $\mathscr{E}_{\text{изл}} = \hbar\omega'$, а $\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_0' = \hbar\omega$, так как в случае неподвижного атома вся его внутренняя энергия при переходе с верхнего уровня $\mathscr{E}_0$ на нижний $\mathscr{E}_0'$ превращается в излучение. В результате из (6.7) получается формула

$$\omega' = \frac{\omega\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta n\cos\theta} = \frac{\omega\sqrt{1-\beta^2}}{1-(v/v_{\text{фаз}})\cos\theta}. \tag{6.8}$$

Она отличается от соответствующей формулы для вакуума (4.10) только тем, что вместо скорости c в ней стоит фазовая скорость света в среде. На поперечном эффекте Доплера ($\cos\theta = 0$) влияние среды никак не сказывается. Он определяется исключительно релятивистским замедлением времени (см. т. IV, § 107).

2) $1-\beta n < 0$, т. е. скорость источника больше фазовой скорости света в среде. В этом случае, на который обратили внимание В. Л. Гинзбург и И. М. Франк, говорят о *сверхсветовом* или *аномальном эффекте Доплера*. Здесь в свою очередь есть две возможности.

Во-первых, испускание света происходит под таким углом θ, что знаменатель в (6.7) положителен, т. е. $\cos\theta < 1/\beta n$. Иными словами, излучение направлено *вне черенковского конуса*, т. е. конуса, определяемого уравнением $\cos\theta = 1/\beta n$. Как и в случае (1), испускание возможно, если $\mathscr{E}_0 > \mathscr{E}_0'$, т. е. атом должен переходить с более высокого энергетического уровня на более низкий. Частота ω' определяется прежней формулой (6.8).

Во-вторых, испускание света происходит под таким углом θ, что знаменатель в (6.7) отрицателен, т. е. $\cos\theta > 1/\beta n$. Это значит, что излучение распространяется *внутри* черенковского конуса $\cos\theta = 1/\beta n$. Для возможности испускания необходимо, чтобы было $\mathscr{E}_0 < \mathscr{E}_0'$, — при испускании атом должен переходить с более низкого на более высокий уровень, т. е. возбуждаться. Испускание света и возбуждение атома происходят за счет кинетической энергии атома. В этом случае $\mathscr{E}_0' - \mathscr{E}_0 = \hbar\omega$, т. е. ω означает частоту, с которой испускался бы свет неподвижным атомом при переходе с верхнего уровня $\mathscr{E}_0'$ на нижний $\mathscr{E}_0$. Она равна той частоте света, которую способен поглощать неподвижный атом при обратном переходе с нижнего уровня $\mathscr{E}_0$ на верхний $\mathscr{E}_0'$.

Что касается $\mathscr{E}_{\text{изл}}$, то эта величина определяется прежним выражением $\mathscr{E}_{\text{изл}} = \hbar\omega'$. Поэтому получается формула

$$\omega' = \frac{\omega\sqrt{1-\beta^2}}{\beta n\cos\theta - 1} = \frac{\omega\sqrt{1-\beta^2}}{(v/v_{\text{фаз}})\cos\theta - 1}. \tag{6.9}$$

3) $1 - \beta n = 0$, т.е. атом движется со скоростью, равной фазовой скорости света в среде. В этом случае, если атом заряжен, появляется излучение Вавилова–Черенкова.

§ 7. Фотоны в гравитационном поле

1. Рассмотрим с квантовой точки зрения изменение частоты света и искривление светового луча в гравитационном поле. Первый эффект уже рассматривался классически в т. I (§ 72) и в т. IV (§ 109) на основе принципа эквивалентности поля тяготения и ускоренного движения. Полученные там результаты выводятся здесь из закона сохранения энергии с использованием связи между энергией и частотой фотона: $\mathscr{E} = \hbar\omega$.

Согласно теории относительности всякая энергия обладает массой, причем инертная и гравитационная массы равны между собой. Применим это положение к ограниченному пучку света с энергией $\mathscr{E}$, распространяющемуся в постоянном гравитационном поле. Гравитационный потенциал поля $\varphi(\mathbf{r})$ может меняться в пространстве. Поскольку свет обладает гравитационной массой $m = \mathscr{E}'/c^2$, гравитационное поле над ним совершает работу. Если свет переходит из точки с гравитационным потенциалом φ в точку с гравитационным потенциалом $\varphi + d\varphi$, то энергия света получает приращение

$$d\mathscr{E} = -Gm\,d\varphi = -G\frac{\mathscr{E}}{c^2}\,d\varphi,$$

где G — гравитационная постоянная. Интегрируя это уравнение между точками 1 и 2, получим

$$\ln\frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1} = \frac{G}{c^2}(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{7.1}$$

Это соотношение имеет общий характер и не содержит еще никаких квантовых предположений. Оно в равной мере справедливо и в классической, и в квантовой физике. Но получить из него соотношение для частот возможно лишь с использованием зависимости между энергией и частотой, которая дается в квантовой теории. В самом деле, допустим, что световой пучок состоит всего из одного фотона частоты ω. В этом случае $\mathscr{E} = \hbar\omega$, и соотношение (7.1) переходит в

$$\ln\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{G}{c^2}(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{7.2}$$

Постоянная Планка выпала из окончательного результата. Результат не зависит от ее числового значения. Так и должно быть во всех случаях, если окончательный результат совпадает с классическим.

Первоначально соотношение (7.2) было проверено астрономически — по смещению спектральных линий в поле тяготения звезд. Открытие эффекта Мёссбауэра (р. 1929) позволило Паунду (р. 1919) и Ребке в 1960 г. проверить его в земных условиях. В их опытах было измерено изменение частоты света при прохождении в поле тяжести Земли всего 19,6 м по вертикали. Этот вопрос будет разобран в ядерной физике.

2. Искривление светового луча в поле тяготения также может быть разобрано на основе принципа эквивалентности без привлечения квантовых представлений. Впервые вопрос был поставлен и решен именно таким путем Эйнштейном в 1911 г., еще до создания общей теории относительности. Впрочем, *полное решение вопроса может быть дано только в рамках общей теории относительности.* Решение, приводимое ниже, дает правильный результат лишь с точностью до числового множителя. Оно по существу классическое, хотя по форме выглядит как квантовое.

Предположим, что фотон пролетает мимо Солнца или другого массивного небесного тела массы M. Если бы не было поля тяготения, то он двигался бы прямолинейно. Фотон обладает инертной массой, которую мы обозначим через m (разумеется, речь идет о релятивистской массе, так как масса покоя фотона равна нулю). По принципу эквивалентности инертная масса всегда равна массе гравитационной. Поэтому фотон будет подвергаться воздействию силы тяготения GMm/R^2, направленной к центру Солнца (R — расстояние от центра Солнца). Влияние касательной составляющей этой силы было выяснено в предыдущем пункте — она вызывает изменение частоты световой волны. Нормальная составляющая искривляет траекторию фотона, т. е. световой луч. Поэтому при прохождении мимо Солнца световой луч должен отклоняться к его центру.

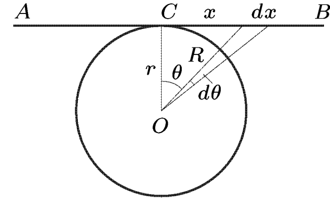


Рис. 13

Вычислим угол отклонения светового луча. В отсутствие поля тяготения луч был бы прямой линией AB (рис. 13). Будем считать, что в поле тяготения он мало отличается от AB. Задача сводится к вычислению импульса $\int F_n\,dt$ нормальной силы F_n, действующей на фотон, за все время движения. Интеграл должен быть вычислен вдоль *истинной траектории* фотона. Но в рассматриваемом случае можно применить *метод возмущений*, заменив при вычислении интеграла истинную траекторию невозмущенной прямолинейной траекторией AB фотона. Допустим, что невозмущенный луч касается края Солнца. Тогда, как видно из рис. 13,

$$F_n = G\frac{Mm}{R^2}\cos\theta = G\frac{Mm}{r^2}\cos^3\theta,$$

$$x = r\,\mathrm{tg}\,\theta, \quad dx = \frac{r}{\cos^2\theta}\,d\theta,$$

где r — радиус Солнца. Следовательно,

$$\int F_n\,dt = \int F_n \frac{dx}{c} = \frac{GMm}{cr} \int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\theta\,d\theta = \frac{2GMm}{cr}.$$

Этот импульс нормальной силы должен быть равен изменению количества движения фотона. В рассматриваемом приближении количество движения фотона меняется только по направлению, но не по величине. Его изменение равно $mc\varphi$, где φ — угол поворота светового луча. Приравнивая оба выражения, получим

$$\varphi = \frac{2GM}{c^2 r}.$$

Общая теория относительности приводит к вдвое большему результату:

$$\Phi = \frac{4GM}{c^2 r}. \tag{7.3}$$

Для Солнца эта величина равна $\Phi = 1{,}75''$, что согласуется с экспериментом.

§ 8. Некоторые опыты по обнаружению корпускулярных свойств света

1. А.Ф. Иоффе (1880–1960) и Н.И. Добронравов (1891–1949) в 1925 г. экспериментально подтвердили квантовую картину фотоэффекта, о которой говорилось в § 2. Вместо видимых и ультрафиолетовых лучей они пользовались рентгеновскими лучами, кванты которых много крупнее. В их опытах микроскопическая пылинка, заряжавшаяся и перезаряжавшаяся при освещении рентгеновскими лучами, уравновешивалась в электрическом поле конденсатора, аналогичного тому, с помощью которого Милликен определял заряд электрона. Пока заряд пылинки оставался постоянным, она неподвижно висела в электрическом поле конденсатора и наблюдалась сбоку с помощью микроскопа. Но если пылинку освещали слабым потоком рентгеновских лучей, то происходил фотоэффект. Время от времени на пылинку попадал рентгеновский квант, освобождавший электрон. Заряд пылинки менялся на заряд одного электрона, и пылинка выходила из равновесия. На опыте оказалось, что именно такой квантовой картине фотоэффекта соответствовало поведение пылинки.

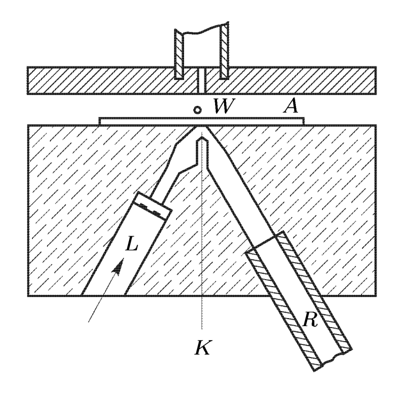


Рис. 14

На рис. 14 показана схема опыта Иоффе и Добронравова. В толстой эбонитовой пластинке просверлены отверстия L и R. Через отверстие R из образовавшейся полости откачивался воздух, чтобы полость стала прозрачной для ультрафиолета. Через отверстие L,

закрывавшееся кварцевым окошком, проходили ультрафиолетовые лучи, освещавшие конец алюминиевой проволочки K с диаметром 0,2 мм. Образовавшиеся фотоэлектроны ускорялись электрическим напряжением 12 000 В, приложенным между проволочкой и алюминиевой фольгой A, закрывающей полость сверху. Толщина фольги ($\sim 5 \cdot 10^{-3}$ мм) подбиралась так, что она практически не поглощала рентгеновские лучи, возбуждавшиеся в ней при торможении электронов. Освещение кончика проволочки K подбиралось настолько слабым, что число фотоэлектронов и связанных с ними рентгеновских импульсов составляло около 1000 в секунду. Алюминиевая фольга одновременно служила нижней обкладкой конденсатора. От нее на расстоянии примерно 0,02 см уравновешивалась висмутовая пылинка W размером около $6 \cdot 10^{-5}$ см.

Опыты показали, что в среднем раз в 30 минут пылинка выходила из равновесия, т. е. с такой средней частотой рентгеновские лучи вырывали из нее электрон. В течение указанного времени образовывалось около $N = 30 \cdot 60 \cdot 1000 = 1{,}8 \cdot 10^6$ ренгтгеновских импульсов. По классическим представлениям энергия каждого импульса должна распространяться во все стороны в виде сферической волны. Каждый из таких импульсов отдавал бы пылинке ничтожную часть своей энергии из-за малости телесного угла, под которым пылинка видна из ближайшего места фольги, где возбуждались рентгеновские лучи. Кроме того, эта энергия распределялась бы между множеством электронов пылинки. При таких условиях было бы совершенно невероятно, чтобы в течение 30 минут большая доля энергии электронов пылинки сосредоточилась только на одном электроне, который должен вылететь из пылинки. Ясно, что с точки зрения классической волновой теории результаты опытов Иоффе и Добронравова непонятны. Напротив, в квантовой теории они вполне естественны.

Следующее элементарное вычисление показывает, что квантовая интерпретация явления выдерживает и количественную проверку. Если считать, что для рентгеновского фотона все направления движения после вылета равновероятны, то вероятность попадания фотона в пылинку будет равна $\Omega/4\pi$, где Ω — телесный угол, под которым пылинка видна из точки, откуда исходят рентгеновские лучи. Если ежесекундно источник испускает в среднем n фотонов, то за время t он испустит $N = nt$ фотонов. Из них на пылинку попадет в среднем $N\Omega/4\pi = nt\Omega/4\pi$ фотонов. Среднее время t в течение которого на пылинку попадает один фотон, определится из условия $nt\Omega/4\pi = 1$, откуда

$$t = \frac{4\pi}{n\Omega}.$$

В опытах Иоффе и Добронравова было $n = 1000$ с$^{-1}$, $\Omega = (\pi/4) \times (6 \cdot 10^{-5}/0{,}02)^2$, если пылинку считать шариком. Подстановка этих значений в предыдущее выражение дает $t \approx 1800$ с $= 30$ мин, что согласуется со временем, наблюдавшимся в опытах Иоффе и Добронравова.

2. По классическим представлениям лучистая энергия распространяется от источника в разные стороны одновременно. Но это не так, если распространение происходит квантами. Отдельные кванты испускаются независимо друг от друга. Этот эффект, если он действительно существует, должен быть выражен тем отчетливее, чем крупнее кванты. Для его обнаружения на опыте Боте (1891–1957) в 1924 г. пользовался рентгеновскими лучами.

В опытах Боте кванты излучения обнаруживались счетчиками Гейгера (1882–1945). Счетчик Гейгера представляет собой маленький цилиндрический конденсатор A, наполненный газом под давлением в несколько мм рт. ст. (рис. 15). Внутренней обкладкой конденсатора служит тонкая металлическая

нить, натянутая вдоль оси цилиндрика, или тщательно заточенное металлическое острие, укрепленное внутри цилиндрика на изоляторе. Внутренняя и наружная обкладки конденсатора соединены через батарею B и очень большое сопротивление R, нижний конец которого заземлен. Таким образом, между обкладками конденсатора поддерживается разность потенциалов около 1000 В. Вблизи нити или острия создается сильное резко неоднородное электрическое поле. Если в счетчик попадает какая-либо частица (в том числе и фотон), то она ионизует молекулы газа. Образовавшиеся электроны и ионы ускоряются этим полем и при столкновениях с молекулами газа сами ионизуют их. Новые ионы и электроны также ускоряются, и т. д. Возникает электронно-ионная лавина, через счетчик проходит импульс электрического тока заметной силы. Из-за этого приложенное напряжение перераспределяется. Основная часть напряжения будет приходиться на сопротивление R, а напряжение на конденсаторе счетчика упадет почти до нуля. Ток через счетчик прекратится, напряжение на конденсаторе возрастет, счетчик вернется в рабочее состояние. Импульс электрического тока, прошедший через счетчик, можно обнаружить чувствительным электрометром E, присоединенным к внутренней обкладке конденсатора счетчика. По этим импульсам можно регистрировать (считать) каждую отдельную частицу, вызвавшую первичную ионизацию газа, если только время зажигания разряда меньше времени между попаданиями в счетчик двух последовательных частиц. Современные счетчики снабжены автоматически действующими устройствами, производящими такую регистрацию. Счетчик Гейгера сыграл и продолжает играть большую роль при изучении ядерной физики, космических лучей, элементарных частиц и пр.

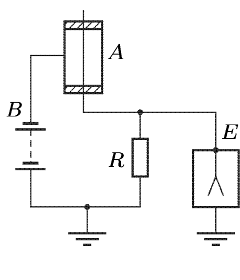


Рис. 15

В опыте Боте применялись два быстродействующих счетчика C_1 и C_2 (рис. 16), регистрировавших прохождение каждого рентгеновского кванта. Симметрично между счетчиками помещалась тонкая железная или медная фольга A. Фольга освещалась сбоку рентгеновскими лучами R достаточной жесткости и благодаря этому сама становилась источником характеристического рентгеновского излучения (рентгеновская флуоресценция). Попадание рентгеновского кванта в один из счетчиков вызывало немедленное (менее чем через 0,001 с) вздрагивание нити электрометра. Такие вздрагивания регистрировались автоматически на движущейся ленте. Если бы из источника A во все стороны распространялись волны, как того требует классическая теория, то срабатывания счетчиков происходили бы одновременно и согласованно (с малыми случайными вариациями). Если же источник A испускал бы рентгеновские кванты вправо и влево беспорядочно и независимо, то срабатывания счетчиков были бы также беспорядочными во времени и независимыми. Опыт показал, что все происходит так, как если бы рентгеновское излучение флуоресценции распространялось в виде квантов, случайно направленных то к правому, то к левому счетчику. Так и должно быть по квантовым представлениям.

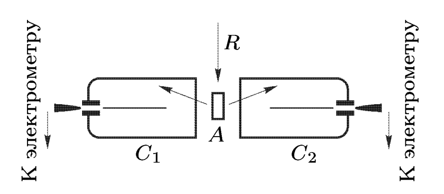


Рис. 16

3. В обоих описанных опытах, по существу, изучались *флуктуационные явления* в слабых потоках рентгеновского излучения. Наблюдать аналогичные явления с видимым светом затруднительно из-за малой величины световых квантов в этой области спектра. Чувствительность существующих объективных методов регистрации еще недостаточна, чтобы регистрировать отдельные кванты видимого света. Наблюдения слабых световых потоков проводил С. И. Вавилов. Он воспользовался тем, что периферические участки сетчатки человеческого глаза (палочки), достаточно долго пробывшего в темноте, обладают необходимой чувствительностью к слабому свету, с которым приходилось иметь дело на опыте. Вавилов воспользовался также существованием порога зрительного ощущения. Если число квантов, попадающих при кратковременной вспышке на периферический участок сетчатки, превышает некоторую минимальную величину n_0, то глаз видит вспышку. Если же оно меньше n_0, то вспышка не видна совсем. По оценке Вавилова n_0 составляет всего несколько десятков и, возможно, даже несколько квантов. Существование порога зрительного ощущения систематически использовалось Вавиловым при изучении люминесценции и вместе с Черенковым при открытии явления, носящего их имя. Используя указанные свойства глаза, Вавилов разработал чувствительный метод визуальных наблюдений флуктуации интенсивности видимого света в слабых световых потоках. В результате многолетних экспериментальных исследований таких флуктуации Вавилов пришел к заключению, что они происходят аналогично флуктуациям числа молекул газа, т. е. так, как если бы свет состоял из конечных порций, или квантов.

Глава II

СТРОЕНИЕ, ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ УРОВНИ И СПЕКТРЫ АТОМА

§ 9. Ядерная модель атома и опыты Резерфорда

1. В первой четверти XX-го века было установлено, что атом состоит из положительно заряженного *ядра* и окружающей его *электронной оболочки.* Линейные размеры ядра порядка 10^{-13}–10^{-12} см. Размеры самого атома, определяемые электронной оболочкой, примерно в 10^5 раз больше. Однако почти вся масса атома (не менее 99,95 %) сосредоточена в ядре. Это связано с тем, что ядро состоит из «тяжелых» протонов и нейтронов, а электронная оболочка — из одних только «легких» электронов ($m_\text{p} = 1836{,}15 m_\text{e}$, $m_\text{n} = 1838{,}68 m_\text{e}$). Число электронов в оболочке нейтрального атома равно заряду ядра, если за единицу принять элементарный заряд (т. е. заряд электрона по абсолютной величине). Но электронная оболочка может терять или приобретать электроны. Тогда атом становится электрически заряженным, т. е. превращается в положительный или отрицательный *ион.*

Химические свойства атома определяются электронной оболочкой, точнее, ее наружными электронами. Такие электроны сравнительно слабо связаны с атомом и поэтому наиболее подвержены электрическим воздействиям со стороны наружных электронов соседних атомов. То же относится к силам притяжения или отталкивания между нейтральными атомами и молекулами (к молекулярным силам). Напротив, протоны и нейтроны прочно связаны внутри ядра. Чтобы воздействовать на ядро, нужны силы, в миллионы раз превосходящие те силы, которые достаточны для отрыва наружных электронов атома. Однако строение и свойства электронной оболочки определяются в конце концов электрическим полем ядра атома.

2. Если изложенная модель атома соответствует действительности, то атом должен быть в высокой степени прозрачным для пронизывающих его частиц. Для пучка электронов это было установлено еще Ленардом. Однако окончательное экспериментальное доказательство этой модели атома было дано Резерфордом (1871–1937) в 1911 г. Поэтому она по справедливости называется *моделью Резерфорда.* По предложению и под руководством Резерфорда его ученики Гейгер и Марсден (1889–1970) исследовали количественно рассеяние α-частиц, испускаемых радиоактивными веществами. В их опытах параллельный пучок α-частиц направлялся в вакууме на тонкую металлическую фольгу и рассеивался ею. Применялся визуальный метод регистрации рассеянных α-частиц. При ударе о флуоресцирующий экран из сернистого цинка α-частица оставляла на нем вспышку (сцинтилляцию). Отдель-

ные сцинтилляции можно было наблюдать в темноте через лупу или микроскоп. И экспериментаторы производили подсчет таких сцинтилляций.

Оказалось, что подавляющее число α-частиц рассеивалось на небольшие углы порядка 1–3°. Угловое распределение таких частиц хорошо описывалось кривой случайных ошибок Гаусса (1777–1855). Однако наблюдались также отдельные α-частицы, отклоняющиеся на большие углы, доходившие до 150°. Относительное число таких частиц было ничтожно. Например, при прохождении через платиновую фольгу пучка α-частиц от RaC [1]) из 8000 падающих частиц в среднем только одна частица отклонялась на угол, превышавший 90°. Но и этого было бы слишком много, если бы большие отклонения возникали в результате накопления множества случайных отклонений.

Резерфорд сделал вывод, что каждое большое отклонение появляется в результате *единичного акта* взаимодействия какого-то практически точечного силового центра с близко пролетающей α-частицей. Таким силовым центром и является положительно заряженное *ядро атома.* Сама α-частица есть также атомное ядро, именно ядро атома гелия. Это подтверждается тем, что α-частица может быть получена в результате двукратной ионизации атома гелия, как это было уже ранее установлено тем же Резерфордом. Электростатическое взаимодействие между этими двумя ядрами и вызывает рассеяние α-частиц на большие углы.

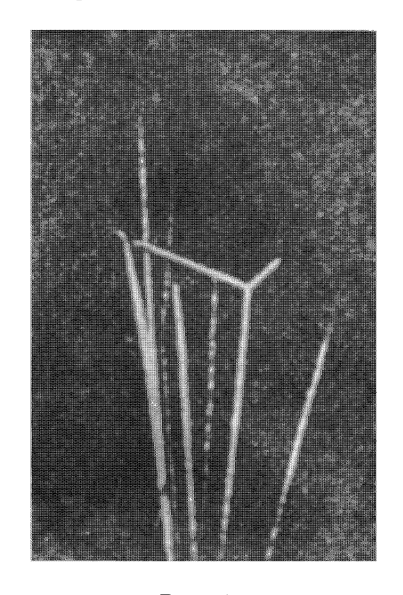


Рис. 17

Изложенное подтверждается снимками треков α-частиц в камере Вильсона. Обычно конец трека α-частицы никакими особенностями не отличается. Но изредка наблюдаются треки, заканчивающиеся изломами и «вилками». Такой случай воспроизведен на рис. 17. Здесь зафиксировано столкновение α-частицы с ядром. В результате столкновения направление движения α-частицы резко изменилось, а пришедшее в движение ядро оставило новый трек, который вместе с треком самой α-частицы образовал «вилку».

3. Резерфорд разработал и количественную теорию рассеяния α-частиц. В этой теории к взаимодействию α-частицы с ядром приме-

[1]) На самом деле исследовавшиеся α-частицы испускались RaC$'$, являющимся короткоживущим продуктом RaC. (Период полураспада RaC$'$ — около 10^{-6} с.)

няется *закон Кулона.* Это, конечно, гипотеза, так как α-частица может подходить к ядру на расстояния порядка 10^{-12} см (см. задачу 1 к этому параграфу), а на таких расстояниях закон Кулона не был проверен экспериментально. Разумеется, движение α-частицы в поле ядра Резерфордом рассматривалось *классически.* Применимость классической механики в рассматриваемом случае можно обосновать с помощью квантовой механики, возникшей несколько позднее (см. § 20). Наконец, масса ядра предполагается большой по сравнению с массой α-частицы, так что ядро может считаться неподвижным. От последнего предположения легко освободиться, заменив массу α-частицы *приведенной массой.*

В опытах Резерфорда применялись очень тонкие металлические фольги с толщиной порядка 10^{-5}–10^{-4} см. В таких случаях при рассеянии на большие углы можно было не учитывать многократные столкновения α-частицы с атомными ядрами. Вероятность двукратных, а тем более многократных столкновений с большими отклонениями ничтожна. Ничтожна вероятность рассеяния на большие углы и на электронах ввиду малости их масс. Многократные столкновения с ядрами и с электронами атомных оболочек играют роль только при очень малых углах рассеяния. Такие углы мы исключим из рассмотрения. Тогда, учитывая взаимодействие α-частицы только с одним ядром, к которому α-частица подходит наиболее близко, мы придем к *задаче двух тел.* От всех остальных ядер α-частица проходит много дальше, и поэтому взаимодействием с ними пренебрегается. Таким образом, теория Резерфорда применима для больших отклонений, когда отклонение вызывается только электрическим полем *одного ядра*, так что по сравнению с этим отклонением все прочие отклонения, вместе взятые, пренебрежимо малы. Соответствующее рассеяние называется *резерфордовским.* Оно является *упругим* в том смысле, что кинетическая энергия α-частицы в результате рассеяния не изменяется, т. е. не растрачивается на возбуждение атомов, а тем более атомных ядер.

Сформулированная задача формально аналогична *задаче Кеплера* (1571–1630) о движении планеты вокруг Солнца. И тут и там сила взаимодействия тел — центральная и меняется обратно пропорционально квадрату расстояния между ними. В случае планеты это сила притяжения, в случае α-частицы — сила отталкивания. Это проявляется в том, что планета (в зависимости от ее полной энергии) может двигаться и по эллипсу, и по гиперболе, а α-частица — только по гиперболе. Но в математических вычислениях это не имеет значения. Угол рассеяния α-частицы θ равен углу между асимптотами ее гиперболической траектории (рис. 18). Для него была получена формула

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \frac{mbv^2}{2Ze^2} \tag{9.1}$$

(см. т. I, § 58). Здесь m — масса α-частицы, v — ее скорость в «бесконечности», т. е. вдали от ядра, Ze — заряд ядра, $2e$ — заряд α-частицы,

равный удвоенному элементарному заряду e. (Число Z называется *зарядовым числом* ядра. Ради краткости его часто называют просто *зарядом ядра*, подразумевая, что за единицу принят элементарный заряд e.) Через b обозначено *прицельное расстояние*, т. е. длина перпендикуляра, опущенного из ядра на невозмущенную прямолинейную траекторию α-частицы (или, что то же самое, на касательную к реальной траектории, когда α-частица находилась бесконечно далеко от ядра).

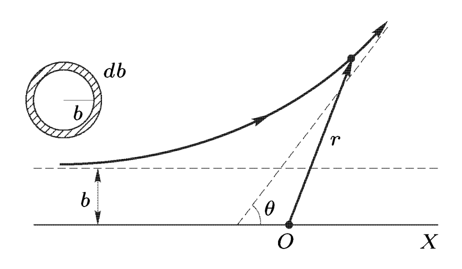


Рис. 18

4. Экспериментальной проверке в области атомных явлений, разумеется, доступна не сама формула (9.1), а *статистические следствия* из нее. Введем так называемое *дифференциальное эффективное сечение рассеяния*. Обозначим через I интенсивность плоскопараллельного пучка α-частиц, налетающих на ядро, т. е. число α-частиц пучка, проходящих в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к потоку. Из этого числа через элементарную площадку $d\sigma$, также перпендикулярную к потоку, проходит $dN_1 = I\,d\sigma$ α-частиц. После рассеяния эти частицы попадают в элементарный телесный угол $d\Omega$. Конечно, величина телесного угла $d\Omega$ и направление его оси определяются величиной и положением площадки $d\sigma$. Поэтому dN_1 имеет также смысл числа α-частиц, рассеиваемых ядром в единицу времени в телесный угол $d\Omega$. Отношение dN_1 к I равно $d\sigma$ и имеет размерность площади. Оно и называется *дифференциальным эффективным сечением ядра для рассеяния α-частиц в телесный угол $d\Omega$*. Это понятие применяется к рассеянию не только α-частиц, но и *любых частиц*, а также к *другим процессам*, происходящим с частицами. Таким образом, по определению

$$d\sigma = \frac{dN_1}{I}, \tag{9.2}$$

т. е. *дифференциальное эффективное сечение рассеяния есть отношение числа частиц, рассеянных атомом в единицу времени в телесный угол $d\Omega$, к интенсивности I падающих частиц.*

Определим теперь дифференциальное сечение для рассеяния α-частиц на отдельном ядре атома. Задача сводится к определению величины площадки $d\sigma$, пройдя через которую α-частица после рассеяния попадает внутрь заданного телесного угла $d\Omega$. Возьмем за ось X прямолинейную траекторию той α-частицы, которой соответствует прицельное расстояние $b = 0$ (такая частица испытала бы с ядром лобовое столкновение). Используя цилиндрическую симметрию, для упрощения заменим $d\sigma$ на кольцевую площадку $d\sigma = 2\pi b\,db$, перпендикулярную к потоку. Внутренний радиус такой площадки равен b, наружный $b + db$, а центр расположен на оси X (рис. 18, слева вверху). Интервалу $b,\, b + db$ соответствует интервал углов рассеяния θ, $\theta + d\theta$,

причем по формуле (9.1)

$$db = \frac{Ze^2}{mv^2}\,\frac{d\theta}{\sin^2(\theta/2)}.$$

Введя телесный угол $d\Omega = 2\pi\sin\theta\,d\theta$, в который рассеиваются α-частицы, прошедшие через кольцевую площадку, нетрудно получить

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}. \tag{9.3}$$

В таком виде формула (9.3) справедлива для *любой* элементарной площадки $d\sigma$, а не только для кольцевой. Она и называется *формулой Резерфорда* (см. задачу 3 к § 20).

5. Прежде чем пойти дальше, введем понятие *полного сечения рассеяния* или какого-либо другого процесса. Оно определяется как *отношение полного числа частиц, претерпевших рассматриваемый процесс в единицу времени, к интенсивности падающего пучка частиц*. Полное сечение σ может быть получено из дифференциального сечения $d\sigma$ путем интегрирования его по всем возможным значениям $d\Omega$. В случае рассеяния α-частиц в формуле (9.3) следует сначала положить $d\Omega = 2\pi\sin\theta\,d\theta$, а затем выполнить интегрирование в пределах от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$ (см. задачу 2 к этому параграфу). Это дает $\sigma = \infty$. Результат этот понятен. Чем дальше площадка $d\sigma$ удалена от оси X, тем меньше угол рассеяния θ. Частицы, проходящие через удаленные площадки, практически не отклоняются, т. е. проходят в окрестности угла рассеяния $\theta = 0$. Суммарная площадь таких площадок, а с ней и полное число рассеянных частиц бесконечно велики. Бесконечно велико и полное поперечное сечение рассеяния. Впрочем, этот вывод имеет формальный характер, так как при малых углах рассеяния формула Резерфорда (9.3) неприменима.

6. Приведем теперь формулу (9.3) к виду, доступному для экспериментальной проверки. Акты рассеяния α-частиц различными атомами *независимы*. Отсюда следует, что если n — число ядер (атомов) в единице объема, то число α-частиц, рассеиваемых объемом V в единицу времени в телесный угол $d\Omega$, определяется выражением

$$dN = VnI\,d\sigma = VnI\left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}. \tag{9.4}$$

В таком виде формула Резерфорда и была подтверждена на опыте. В частности, на опыте было показано, что при постоянстве $d\Omega$ величина $dN\sin^4(\theta/2)$ постоянна, т. е. не зависит от угла рассеяния θ, как это и должно быть согласно формуле (9.4).

Подтверждение формулы Резерфорда на опыте может рассматриваться как *косвенное доказательство закона Кулона* на таких малых расстояниях, на какие могут сближаться центры α-частицы и взаимодействующего с ней ядра. Другим доказательством могут служить опыты Блэкетта (1897–1974) по рассеянию α-частиц в газах. Фотографировалось большое количество треков α-частиц в камере Вильсона,

измерялись угловые отклонения их и подсчитывалось, как часто встречаются определенные углы рассеяния. Эти опыты также подтвердили формулу Резерфорда. Но главной целью их была проверка закона Кулона. Оказалось, что при расстояниях между центрами α-частицы и взаимодействующего ядра в случае воздуха от $3 \cdot 10^{-12}$ до $5 \cdot 10^{-10}$ см, а в случае аргона от $7 \cdot 10^{-12}$ до 10^{-9} см закон Кулона подтверждается экспериментально. Отсюда не следует, что этот закон справедлив на любых расстояниях между центрами взаимодействующих ядер. Опыты по упругому рассеянию легких ядер, ускоренных ускорителями, также на легких, но неподвижных ядрах показали, что наблюдаются резкие отступления от закона Кулона, когда указанное расстояние уменьшается до 10^{-12} см и меньше. На таких расстояниях проявляют свое действие *ядерные силы* притяжения, перекрывающие кулоновские силы отталкивания ядер.

7. Формулу (9.4) можно применить для измерения заряда ядра. Для этого надо измерить dN и I. После этого можно вычислить Z, так как все прочие величины в формуле (9.4) могут считаться известными. Основная трудность состоит в том, что величины dN и I очень сильно отличаются друг от друга. В первых опытах они измерялись на различных установках, т. е. в разных условиях, что вносило значительные ошибки. В опытах Чэдвика (1891–1974) этот недостаток был устранен. Рассеивающая фольга имела форму кольца AA' (рис. 19), радиоактивный препарат R (источник α-частиц) и флуоресцирующий экран S из ZnS устанавливались на оси кольца на одинаковых расстояниях от него. Для подсчета сцинтилляций от α-частиц, рассеянных фольгой, отверстие кольца AA' закрывалось экраном, непрозрачным для α-частиц. Наоборот, для измерения I производился подсчет сцинтилляций, когда отверстие было свободно, а кольцо AA' закрыто. Так как в этом случае число сцинтилляций было очень велико, то для его уменьшения перед экраном S устанавливался вращающийся диск с узким вырезом. Зная ширину выреза и сосчитав число сцинтилляций, можно вычислить I. Чэдвик нашел для платины $Z = 77{,}4$, серебра $Z = 46{,}3$, меди $Z = 29{,}3$. Атомные или порядковые номера этих элементов в периодической системе Менделеева равны соответственно 78, 47, 29. Тем самым был подтвержден уже известный результат, впервые установленный Мозли (1887–1915), что заряд ядра Z совпадает с атомным номером элемента (см. § 48).

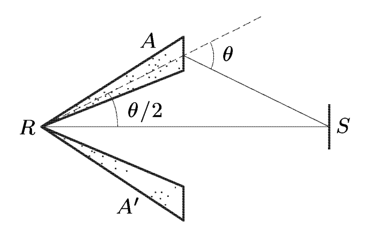


Рис. 19

8. Вернемся снова к модели атома, обоснованной опытами Резерфорда. Могут ли атомное ядро и окружающая его электронная оболочка образовать устойчивую систему, какой, несомненно, является атом? Если бы это было возможно, то эти частицы не могли бы находиться в покое. В противном случае получилась бы электростатическая система (практически) точечных зарядов, между которыми действуют

кулоновские силы, а такая система, согласно теореме Ирншоу (см. т. III, § 9), неустойчива. Кулоновы силы меняются обратно пропорционально квадрату расстояния между взаимодействующими частицами. Но так же меняются гравитационные силы между телами планетной системы. Устойчивость планетной системы обеспечивается вращением планет вокруг Солнца. Поэтому Резерфорд естественно пришел к *планетарной модели атома*, в которой электроны вращаются вокруг ядра.

Однако, согласно классической электродинамике, при движении заряда меняется и электромагнитное поле, источником которого является заряд. В частности, *электрический заряд, движущийся ускоренно, излучает электромагнитные волны.* Вращающийся электрон имеет ускорение, а потому должен непрерывно излучать. Теряя энергию на излучение, электрон непрерывно приближался бы к ядру и в конце концов упал бы на него (см. задачу 4 к этому параграфу). Таким образом, и при наличии движения получается *неустойчивая* модель атома. Можно было бы предположить, что закон Кулона и прочие законы, определяющие электромагнитное поле в электродинамике, нарушаются в случае элементарных частиц и малых расстояний. Можно было бы учесть ядерные силы и ввести неизвестные нам гипотетические силы, обеспечивающие устойчивость атома. Но и это не спасает положения. Каковы бы ни были силы, согласно общим принципам классической механики спектр излучения атома должен состоять из нескольких основных частот и соответствующих им обертонов. Опыт приводит к совсем иной закономерности, выражаемой *комбинационным принципом Ритца* (1878–1909) (см. § 11). Приходится констатировать, что классическая механика и электродинамика оказались не в состоянии объяснить *существование атомов* как устойчивых систем атомных ядер и электронов. Решение этой проблемы было получено только в рамках квантовой механики,

ЗАДАЧИ

1. На какое расстояние r при лобовом столкновении могут сближаться центры α-частицы с энергией $\mathscr{E} = 6$ МэВ и неподвижного ядра золота? Заряд ядра золота $Z = 79$.

О т в е т. $r = 2Ze^2/\mathscr{E} = 3{,}8 \cdot 10^{-12}$ см.

2. Определить сечение $\Delta\sigma$ резерфордовского рассеяния α-частицы на атомном ядре на угол рассеяния, превышающий θ.

О т в е т.

$$\Delta\sigma = 4\pi \left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}. \tag{9.5}$$

3. В опытах по рассеянию α-частиц применялась платиновая фольга толщиной $\delta = 8 \cdot 10^{-5}$ см. Пробег α-частицы от радия C$'$ в воздухе (при 15 °C и давлении 760 мм рт. ст.) оказался равным 6,96 см. Из графика, выражающего соотношение между пробегом и кинетической энергией $\mathscr{E}$ α-частицы, можно найти, что $\mathscr{E} \approx 5{,}9$ МэВ. Определить относительную долю α-частиц, рассеивавшихся на угол, превышающий $\theta = 90°$. Плотность платины $\rho = 21{,}5$ г/см^3, заряд ядра $Z = 78$, атомная масса $A = 195$.

Решение. Согласно формуле (9.5) поперечное сечение рассеяния в углы $\theta > \pi/2$ определяется выражением

$$\Delta\sigma = 2\pi \left(\frac{Ze^2}{\mathscr{E}}\right)^2,$$

так как кинетическая энергия α-частицы $\mathscr{E} = mv^2/2$. Число рассеивающих ядер в фольге $N = S\delta n$, где S — полная площадь фольги, а n — число ядер в единице объема. На одно ядро приходится площадь $s = S/N = 1/\delta n$. В углы $\theta > \pi/2$ попадают α-частицы, рассеивающиеся только в результате единичных актов столкновения с ядрами. Такие столкновения *независимы*. Поэтому относительная доля частиц, рассеиваемых в такие углы, будет

$$\frac{\Delta\sigma}{s} = 2\pi \left(\frac{Ze^2}{\mathscr{E}}\right)^2 \delta n.$$

Подставляя сюда $n = \rho N_{\text{A}}/A$, где N_{A} — постоянная Авогадро, получим

$$\frac{\Delta\sigma}{s} = 2\pi \left(\frac{Ze^2}{\mathscr{E}}\right)^2 \frac{\rho}{A}\,\delta N_{\text{A}} = \frac{1}{8200}.$$

4. Через какой промежуток времени t электрон, вращающийся вокруг протона по окружности радиуса $a_0 = 0{,}53 \cdot 10^{-8}$ см, упал бы на ядро вследствие потерь энергии на излучение, если бы к нему были применимы классические механика и электродинамика?

Решение. Несмотря на наличие излучения, при приближенном вычислении ускорения электрона можно пользоваться формулой $|\dot{v}| = v^2/a$, где a — переменное расстояние электрона от ядра. При вращении по окружности $mv^2/a = e^2/a^2$, откуда

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{2a}.$$

Полная энергия электрона

$$\mathscr{E} = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{a} = -\frac{e^2}{2a}.$$

Потеря энергии на излучение в единицу времени

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\,\dot{v}^2 = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\,\frac{v^4}{a^2} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{m^2c^3a^4}.$$

Подставив сюда выражение для $\mathscr{E}$ получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{4}{3}\,\frac{e^4}{m^2c^3a^4},$$

откуда

$$a_0^3 - a^3 = 4\frac{e^4}{m^2c^3}\,t.$$

Полагая здесь $a = 0$, находим искомое время падения:

$$t = \frac{m^2c^3a_0^3}{4e^4} = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\text{с}.$$

§ 10. Определение заряда ядра из рассеяния рентгеновских лучей

1. В § 3 при рассмотрении рассеяния рентгеновских лучей на свободных электронах мы интересовались только изменением длины волны в зависимости от угла рассеяния. Для решения этого вопроса была достаточна простая квантовая теория, основанная только на законах сохранения энергии и импульса. Если же требуется определить интенсивность и поляризацию рассеянного излучения в различных направлениях, то необходимо уже пользоваться полной системой уравнений квантовых электродинамики и релятивистской механики. Именно так такая задача была решена О. Клейном (1894–1977) и Нишиной (1890–1951) в 1929 г. и более строго И. Е. Таммом в 1930 г. Рассмотрение этого вопроса далеко выходит за рамки настоящего руководства. Однако и простая классическая теория приводит к правильному результату в предельном случае, когда энергия падающего кванта $h\nu$ мала по сравнению с собственной энергией электрона $m_e c^2$ (или, что то же самое, когда длина волны λ велика по сравнению с комптоновской длиной λ_K для электрона). Такой случай представляет определенный интерес, так как для легких элементов он дает независимый метод определения заряда ядра Z. Рассмотрим этот вопрос при указанном условии, что $h\nu \ll m_e c^2$. Однако рентгеновские кванты будем предполагать все же настолько жесткими, что их энергия велика по сравнению с энергией связи электронов, так что электроны могут считаться свободными. Удовлетворить обоим условиям можно только для *легких элементов.*

2. Свободный электрон в монохроматическом электрическом поле $E = E_0 \cos\omega t$ получает ускорение

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m}\,E = -\frac{e}{m}\,E_0 \cos\omega t$$

(если пренебречь действием магнитного поля). Согласно классической электродинамике такой электрон излучает, теряя энергию в виде рассеянного излучения. Энергия, рассеиваемая электроном в единицу времени, дается выражением

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\,\ddot{x}^2 = \frac{2}{3}\,\frac{e^4}{m^2c^3}\,E_0^2 \cos^2\omega t$$

(см. т. III, § 141). Среднее по времени значение этой величины равно

$$-\overline{\frac{d\mathscr{E}}{dt}} = \frac{1}{3}\,\frac{e^4}{m^2c^3}\,E_0^2.$$

Рассеянием на тяжелых атомных ядрах можно полностью пренебречь, так как в этом случае в знаменатель последней формулы войдет большая величина — масса заряженной частицы в квадрате.

Если падающая волна плоская, то плотность потока электромагнитной энергии численно равна вектору Пойнтинга

$$S = \frac{c}{4\pi}\,EH = \frac{c}{4\pi}\,E_0^2 \cos^2\omega t.$$

Ее среднее значение по времени $\overline{S} = (c/8\pi)E_0^2$. Разделив среднюю рассеиваемую энергию на $\overline{S}$, получим *полное поперечное сечение рассеяния* на свободном электроне:

$$\sigma_\mathrm{T} = \frac{8\pi}{3}\,\frac{e^4}{m_\mathrm{e}^2c^4} = 0{,}6652448(33)\cdot 10^{-24}\ \text{см}^2. \tag{10.1}$$

Эта формула была получена еще Томсоном на заре электронной теории. Величина σ_T называется *томсоновским поперечным сечением рассеяния для электрона*. Ее можно представить в виде

$$\sigma_\mathrm{T} = \frac{8}{3}\,\pi r_\mathrm{e}^2, \tag{10.2}$$

где r_e — так называемый *классический радиус электрона*:

$$r_\mathrm{e} = \frac{e^2}{m_\mathrm{e}c^2} = 2{,}8179380(70)\cdot 10^{-13}\ \text{см}. \tag{10.3}$$

Согласно (10.1) интенсивность рассеяния в рентгеновской области спектра совсем не зависит от частоты падающего излучения. Напротив, в оптической области интенсивность света, рассеянного атомами и молекулами, а также любыми малыми неоднородностями среды, пропорциональна четвертой степени частоты (см. т. IV, § 98). Это различие связано с тем, что в рентгеновской области спектра ускорение электрона (а от него зависит рассеяние) определяется самим электрическим полем. В оптической же области размеры атомов и молекул малы по сравнению с длиной световой волны. В пренебрежении резонансными эффектами здесь напряженностью электрического поля определяется дипольный момент частицы $p = \beta E$. Рассеяние же пропорционально квадрату его второй производной по времени, т. е. четвертой степени частоты ω. То же относится и к неоднородностям среды, если только их линейные размеры малы по сравнению с λ.

Точная формула Клейна–Нишины для полного сечения комптоновского рассеяния на неподвижном свободном электроне имеет вид

$$\frac{\sigma}{\sigma_\mathrm{T}} = \frac{3}{4}\left\{\frac{1+\gamma}{\gamma^3}\left[\frac{2\gamma(1+\gamma)}{1+2\gamma} - \ln(1+2\gamma)\right] + \frac{1}{2\gamma}\,\ln(1+2\gamma) - \frac{1+3\gamma}{(1+2\gamma)^2}\right\}, \tag{10.4}$$

где $\gamma = h\nu/m_\mathrm{e}c^2$ — отношение энергии падающего кванта к энергии покоя электрона. Формула эта хорошо согласуется с опытными данными. По сравнению с формулой Томсона (10.2) она дает монотонное убывание σ с возрастанием энергии падающего кванта. Это убывание иллюстрируется табл. 1. Максимального значения σ достигает при $\gamma \to 0$. Оно равно σ_T.

3. Перейдем теперь к рассеянию падающего пучка рентгеновского излучения всем атомом. В случае достаточно жесткого излучения электроны атомной оболочки будут рассеивать это излучение *независимо*, т. е. *некогерентно*. Тем более это будет справедливо для электронов различных атомов. Заметив это, рассмотрим параллельный пучок

рентгеновских лучей с единичной площадью поперечного сечения, распространяющийся в направлении оси X. Между двумя поперечными сечениями этого пучка с координатами x и $x + dx$ находится $n\,dx$ атомов, где n — число атомов в единице объема. Если атом нейтрален,

Таблица 1

Поперечное сечение комптоновского рассеяния при различных энергиях первичных фотонов

γ	σ/σ_{T}	γ	σ/σ_{T}
0,05	0,913	5	0,191
0,1	0,84	10	0,123
0,2	0,737	20	0,0754
0,33	0,637	50	0,0376
0,5	0,563	100	0,0215
1	0,431	200	0,0122
2	0,314	500	0,00556
3	0,254	1000	0,00304

то в нем содержится Z электронов. В единицу времени они рассеивают энергию $Z\sigma I$, а электроны всех $n\,dx$ атомов — энергию $Z\sigma In\,dx$, где I — интенсивность падающего пучка. Из-за такого рассеяния интенсивность пучка уменьшается на $I\varkappa\,dx$, где $\varkappa$ называется *коэффициентом рассеяния* и определяется выражением

$$\varkappa = \sigma n Z. \tag{10.5}$$

Ослабление пучка происходит не только из-за рассеяния, но и из-за *поглощения* рентгеновских лучей. Поглощение сопровождается выделением тепла внутри тела, так что оно принципиально может быть отделено от рассеяния. Сам коэффициент рассеяния $\varkappa$ пропорционален n, т. е. плотности ρ тела. Поэтому на опыте целесообразно измерять отношение $\varkappa/\rho$. Очевидно, $\rho = nAm_{\text{H}}$, где m_{H} — масса атома водорода, A — относительная атомная масса рассеивающего вещества. Используя для σ томсоновское значение (10.1), нетрудно получить

$$\frac{\varkappa}{\rho} = \frac{\sigma_{\text{T}}}{m_{\text{H}}}\frac{Z}{A} \approx 0{,}40\,\frac{Z}{A}\ \text{см}^2/\text{г}. \tag{10.6}$$

Найденная на опыте величина $\varkappa/\rho$ оказалась для легких элементов не зависящей от длины волны и равной приблизительно 0,20 см^2/г. Используя это значение, из (10.6) получаем $Z/A \approx 1/2$, т. е у легких элементов (за исключением водорода) зарядовое число Z (численно совпадающее с порядковым номером элемента) равно приблизительно половине массового числа A. Это действительно приближенно оправдывается в начале периодической системы элементов. Физическая причина такой закономерности и отступлений от нее будет выяснена при изучении атомного ядра.

§ 11. Спектральные закономерности

1. Накаленные твердые тела испускают *сплошные спектры*. У газов (наряду со сплошной областью) наблюдаются *линейчатые* и *полосатые спектры*. Линейчатый спектр состоит из ряда закономерно расположенных более или менее узких спектральных линий. В полосатом спектре полосы кажутся сплошными при наблюдении в спектроскоп малой разрешающей силы. При применении спектрального аппарата высокой разрешающей силы они распадаются на множество тесно расположенных спектральных линий.

К началу XX-го века было выяснено, что *линейчатые спектры газов испускаются атомами и ионами, а полосатые — молекулами*. Поэтому их называют также *атомными* и *молекулярными спектрами*. Атомный спектр водорода удается наблюдать при электрическом разряде в вакуумной водородной трубке только тогда, когда большая часть молекул водорода диссоциировала на атомы. Но в парах йода полосы молекулярного спектра в основном исчезают уже в процессе диссоциации молекул I_2 на атомы I.

Наличие многих спектральных линий атома указывает на сложность его внутренней структуры. Неудивительно, что богатейший материал, накопленный эмпирически при изучении спектров, послужил в XX-м веке основным фундаментом, на котором развилась теория строения атома.

Положение спектральной линии в спектре характеризуется *длиной волны* λ или *частотой* $\nu = c/\lambda$. Частота более удобна для выражения спектральных закономерностей. Но для ее вычисления надо знать скорость света c, а она была измерена с недостаточной точностью, во всяком случае до самого последнего времени. Длина же волны λ измеряется спектральным аппаратом с высокой точностью — до седьмого десятичного знака и выше. Поэтому вместо ν спектроскописты употребляют так называемое *спектроскопическое волновое число* $\overline{\nu}$. Это есть число волн, укладывающихся в вакууме на 1 см длины:

$$\overline{\nu} = 1/\lambda\ ^{1)}. \tag{11.1}$$

В спектроскопии частоту и спектроскопическое волновое число принято обозначать одной и той же буквой ν. Во избежание недоразумений

[1]) В настоящее время приведенные соображения утратили свое значение. Методами нелинейной оптики удалось на опыте измерить частоту световых колебаний и притом с точностью, превышающей измерение длины волны в спектроскопии. Скорость же света в вакууме связана с частотой ν и длиной волны λ соотношением $c = \lambda\nu$. Поэтому в октябре 1983 г. Генеральная конференция по мерам и весам приняла новое определение метра. По этому определению скорость света в вакууме принимается равной

$$c = 2{,}99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с } \textit{точно}.$$

Метр же определяется через расстояние, проходимое светом в вакууме в течение одной секунды. Поэтому в принципе было бы безразлично, пользоваться ли в спектроскопии величиной $1/\lambda$ или величиной c/λ.

мы этого делать не будем. Частоту будем обозначать через ν, а спектроскопическое волновое число — через $\overline{\nu}$, т. е. в последнем случае ставить над ν черточку. Впрочем, вместо $\overline{\nu}$ предпочтительнее пользоваться обозначением $1/\lambda$.

2. Основным законом спектроскопии, установленным эмпирически в 1908 г., является *комбинационный принцип Ритца.* Он состоит в том, что все многообразие спектральных линий рассматриваемого атома может быть получено путем попарных комбинаций гораздо меньшего числа величин, называемых *спектральными термами* или сокращенно просто *термами.* Частота (волновое число) каждой спектральной линии выражается разностью двух термов:

$$\overline{\nu} = \frac{1}{\lambda} = T_{n_1} - T_{n_2}. \tag{11.2}$$

Термы принято считать существенно положительными и нумеровать их так, чтобы с возрастанием номера терма его величина уменьшалась. В приведенной формуле, например, должно быть $n_1 < n_2$, $T_{n_1} > T_{n_2}$. Если фиксировать n_1 и придавать n_2 всевозможные возрастающие значения, начиная с $n_2 = n_1 + 1$, то получится система линий, называемая *спектральной серией.* Совокупность спектральных серий составляет *спектр* рассматриваемого элемента (атома).

Рассмотрим две спектральные линии одной и той же серии:

$$\overline{\nu}_{12} = T_{n_1} - T_{n_2}, \quad \overline{\nu}_{13} = T_{n_1} - T_{n_3},$$

предполагая, что $\overline{\nu}_{12} > \overline{\nu}_{13}$ (а следовательно, $n_2 > n_3$). Вычитая из первого равенства второе, получим

$$\overline{\nu}_{12} - \overline{\nu}_{13} = T_{n_3} - T_{n_2}.$$

Но это есть волновое число какой-то спектральной линии того же элемента, принадлежащей к серии с начальным термом T_{n_3}. Таким образом, из комбинационного принципа следует, что *разность частот (волновых чисел) двух спектральных линий одной и той же серии атома дает частоту (волновое число) спектральной линии какой-то другой серии того же атома.* Впрочем, такой линии может не оказаться в спектре, так как на комбинации термов друг с другом накладываются некоторые ограничения, называемые *правилами отбора.*

3. Аналитические выражения для термов подавляющего большинства элементов неизвестны. В лучшем случае они представляются приближенными эмпирическими или полуэмпирическими формулами. Для атомов щелочных металлов такие формулы будут приведены в § 34. Исключение составляет простейший атом — атом водорода, состоящий из одного протона и одного электрона. Для атома водорода терм с высокой степенью точности имеет вид

$$T_n = \frac{R_{\text{H}}}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{11.3}$$

где $R_{\rm H}$ — постоянная, называемая *постоянной Ридберга* (1854–1919) для водорода. Ее числовое значение равно

$$R_{\rm H} = 109678{,}76(1)\ \text{см}^{-1}. \tag{11.4}$$

Такое же выражение, но с другим числовым значением постоянной Ридберга справедливо для всех изотопов водорода и всех одноэлектронных ионов (см. § 27).

Из выражения (11.3) путем комбинаций получаются следующие спектральные серии:

Серия Лаймана:

$$\overline{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_{\rm H}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{11.5}$$

Эта серия была открыта Лайманом (1874–1954) в 1916 г. в ультрафиолетовой области спектра.

Серия Бальмера:

$$\overline{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_{\rm H}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 3, 4, 5, \ldots \tag{11.6}$$

Четыре первые линии этой серии лежат в видимой области спектра и обозначаются через H_α, H_β, H_γ, H_δ, остальные — в области ультрафиолета. На этих четырех линиях Бальмером (1825–1898) в 1885 г. и была выявлена закономерность, выражаемая формулой (11.6). С этого началось систематическое исследование спектральных серий. Мы приводим схематическое изображение серии Бальмера (рис. 20). Таблица 2, в которой приведены вычисленные и наблюденные значения длин

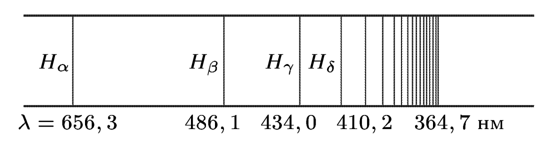


Рис. 20

волн для первых девяти линий серии Бальмера, показывает, с какой высокой точностью формула (11.6) согласуется с опытом. Длины волн отнесены к воздуху, где они были экспериментально измерены. Поэтому вычисленные по формуле (11.6) длины волн были пересчитаны для воздуха.

Серия Пашена:

$$\overline{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_{\rm H}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 4, 5, 6, \ldots \tag{11.7}$$

Эту серию предсказал Ритц в 1908 г. на основе комбинационного принципа. Все линии этой серии получаются путем комбинаций из линий серии Бальмера. Рассматриваемая серия в том же году была обнаружена Пашеном (1865–1947) в инфракрасной области спектра.

Таблица 2

Длины волн бальмеровской серии водорода

n	Обозначение	λ, нм вычислено	λ, нм наблюдено	n	Обозначение	λ, нм вычислено	λ, нм наблюдено
3	H_α	656,279	656,285	8	H_ζ	388,905	388,906
4	H_β	486,133	486,132	9	H_η	383,539	383,540
5	H_γ	434,047	434,046	10	H_θ	379,790	379,791
6	H_δ	410,174	410,173	11	H_ι	377,067	377,065
7	H_ε	397,008	397,007				

Серия Брэккета:

$$\overline{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_{\text{H}}\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 5, 6, 7, \ldots \tag{11.8}$$

Серия Пфунда:

$$\overline{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_{\text{H}}\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 6, 7, 8, \ldots \tag{11.9}$$

Эти серии лежат в далекой инфракрасной области спектра. Они были открыты в 1922 г. и 1924 г. соответственно. Конечно, серия Брэккета получается путем комбинаций из линий серии Пашена, а серия Пфунда (1879–1949) — из линий серии Брэккета.

Максимальная длина волны для серии Лаймана получается при $n = 2$. Она равна $\lambda = 4/3R_{\text{H}} = 121{,}56713$ нм. Соответствующая линия называется *резонансной линией водорода*. Максимальная частота (волновое число) получится по формулам (11.5)–(11.9) при $n = \infty$. Эта частота называется *границей серии*. Для серии Бальмера, например, граница серии равна

$$\overline{\nu}_\infty = \frac{R_{\text{H}}}{4} = 27\,419{,}69\ \text{см}^{-1} \quad \text{или} \quad \lambda_\infty = \frac{4}{R_{\text{H}}} = 364{,}70142\ \text{нм}.$$

При приближении к границе серии спектральные линии сгущаются — разность длин волн между ними асимптотически стремится к нулю; стремятся к нулю и интенсивности линий. За границей серии спектр не обрывается, а становится сплошным. Эта закономерность проявляется в спектральных сериях не только водорода, но и других элементов. Здесь также существуют границы серий, за которыми следует сплошной спектр.

§ 12. Постулаты Бора

1. Законы классической физики, по существу, приспособлены для описания *непрерывных процессов*. Между тем резкость спектральных линий, испускаемых атомами химических элементов, указывает на то, что процессам внутри атомов свойственна известная *прерывность* или

дискретность. Наряду с непрерывностью дискретность должна быть отражена в основных физических законах. Это ясно понял Нильс Бор (1885–1962), сформулировавший в 1913 г. два постулата.

1) *Атом (и всякая атомная система) может находиться не во всех состояниях, допускаемых классической механикой, а только в некоторых избранных (квантовых) состояниях, характеризующихся определенными прерывными, дискретными значениями энергии* $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3, \ldots$ *В этих состояниях, вопреки классической электродинамике, атом не излучает. Поэтому они называются стационарными состояниями.*

Квантовая механика, пришедшая на смену теории Бора, автоматически приводит к стационарным состояниям с дискретными уровнями энергии. Правда, она допускает и стационарные состояния с непрерывными уровнями энергии. Однако в последнем случае электроны и ядра не образуют связанную систему. По крайней мере некоторые из них движутся инфинитно. В атомах же и молекулах составляющие их частицы связаны, т. е. движутся финитно. В этих случаях энергетические уровни дискретны, как того и требует первый постулат Бора (см. § 13, п. 3, а также § 22). Однако, как уже было упомянуто выше, постулат Бора в квантовой механике не является независимым утверждением. Он является следствием основных принципов квантовой механики.

Сам Бор первоначально принял, что движение электронов в стационарных состояниях атомов характеризуется теми же понятиями и величинами, что и движение частиц в классической механике. Иными словами, оно происходит по определенным траекториям и в каждый момент времени характеризуется определенными значениями координат и скоростей электронов. Такая точка зрения несовместима с основными принципами квантовой механики. Квантовая механика отвергает представление о траекториях, по которым якобы движутся электроны и другие микрочастицы (см. § 20). Поэтому мы, принимая первый постулат Бора, будем характеризовать стационарные состояния только значениями энергии, но не будем вводить никаких наглядных представлений о движении электронов в атомах.

2) *При переходе из стационарного состояния с большей энергией* $\mathscr{E}_{n_2}$ *в стационарное состояние с меньшей энергией* $\mathscr{E}_{n_1}$, *энергия атома изменяется на* $\mathscr{E}_{n_2} - \mathscr{E}_{n_1}$. *Если такое изменение происходит из-за излучения, то при этом испускается один фотон с энергией*

$$h\nu \equiv \hbar\omega = \mathscr{E}_{n_2} - \mathscr{E}_{n_1}. \tag{12.1}$$

Такое же соотношение справедливо и для случая поглощения, когда падающий фотон переводит атом с низшего энергетического уровня на более высокий, а сам исчезает. Соотношение (12.1) называется *правилом частот Бора.*

2. Таким образом, атомная система переходит из одного стационарного состояния в другое *скачками.* Такие скачки называются *квантовыми.* Что происходит с системой во время скачка, т. е. между двумя последовательными стационарными состояниями, — на этот вопрос теория Бора не давала ответа. Некоторые ведущие физики считали

подобные вопросы принципиально не имеющими смысла, так как (по их мнению) они не допускают экспериментальной проверки. Они выдвигали в качестве теоретико-познавательного принципа требование, чтобы наука не пыталась описывать явления природы способами, не допускающими экспериментальной проверки. Наука должна оперировать только тем, что принципиально доступно наблюдению. Но в такой общей формулировке это требование совершенно бессодержательно, из него нельзя получить ничего нового. Оно получило бы содержание, если бы было указано, что принципиально доступно наблюдению, а что принципиально недоступно. Но никакого общего критерия для решения этого вопроса заранее указать нельзя. На этот вопрос может ответить *только теория*, а правильность последней контролируется опытом. Различные теории отличаются одна от другой, между прочим, тем, как они решают поставленный вопрос. Отказ теории Бора от ответа на вопрос, что происходит во время квантового скачка, указывает на ее недостаток, на ее неполноту. Однако если бы теория отказалась от рассмотрения конкретных явлений до решения этого вопроса, то она вне всяких сомнений оказалась бы бесплодной. Здесь дело обстоит так же, как с законом всемирного тяготения. Ньютон потому достиг успеха, что он сосредоточил внимание на выводе конкретных следствий из указанного закона, совершенно оставив в стороне вопрос о физической природе тяготения.

3. Возможны и *многофотонные процессы*, когда переход атома с одного уровня на другой сопровождается испусканием или поглощением не одного, а сразу нескольких фотонов. Но такие процессы *нелинейны*. Они могут происходить только в сильных полях, например в таких, которые возникают в гигантских импульсах лазерного излучения. Их мы рассматривать не будем.

Наконец, возможны и *безызлучательные переходы*, когда энергия выделяется или поглощается, например, не в виде света, а в виде тепла. Атом может совершить переход с одного уровня на другой не обязательно в результате излучения или поглощения фотона, а, скажем, в результате столкновения с другой частицей.

4. Правило частот Бора (12.1) объясняет комбинационный принцип Ритца. Из него для спектроскопического волнового числа $\overline{\nu} = \nu/c$ получается

$$\overline{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\mathscr{E}_{n_2}}{ch} - \frac{\mathscr{E}_{n_1}}{ch}. \qquad (12.2)$$

Сравнивая это соотношение с (11.2), находим

$$T_n = -\frac{\mathscr{E}_n}{ch}. \qquad (12.3)$$

Тем самым раскрывается физический смысл спектральных термов. Они определяются энергетическими уровнями атома.

Становится понятным и другой экспериментальный результат. Если в спектре излучения атомарного водорода наблюдается серия Лаймана, то наблюдаются и все прочие спектральные серии: Бальмера, Пашена и пр. Напротив, в спектре поглощения несветящегося атомарного

водорода наблюдается только серия Лаймана, а все прочие серии не наблюдаются. Дело в том, что для появления в спектре излучения серии Лаймана необходима энергия, достаточная для удаления электрона с самого низкого энергетического уровня. При этом могут возбуждаться и вышележащие энергетические уровни, т. е. удаляться электроны с них, так как для этого требуются меньшие энергии. В результате станут возможными переходы между всевозможными энергетическими уровнями, т. е. в спектре излучения появятся всевозможные спектральные серии. Иначе происходит со спектром поглощения. Если водород не излучает, то его атомы находятся в нормальном состоянии, т. е. на самом низком энергетическом уровне. На других уровнях атомов нет. Поэтому при поглощении света возможны только переходы с самого низкого энергетического уровня на более высокие. При таких переходах в спектре поглощения появится только серия Лаймана. Чтобы при поглощении возникли и другие серии, необходимо, чтобы уже до освещения были возбуждены и другие энергетические уровни. Но тогда появится и спектр испускания рассматриваемого газа. Линии поглощения таких серий могут наблюдаться только на фоне спектра испускания газа. Поэтому необходимо, чтобы последние были менее яркими, чем соответствующие линии освещающего излучения. Аналогично ведут себя и спектры других атомов.

5. Совокупность значений энергии стационарных состояний атома $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3, \ldots$ образует *энергетический спектр атома.* По классической теории излучаемые частоты атома (в простейшем случае одномерного движения) также можно представить в виде ряда $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$, перенумеровав их одним индексом. В этом некоторые авторы видят какое-то противоречие между классической теорией и опытом. Действительно, говорят они, опыт приводит к комбинационному принципу Ритца. Согласно этому принципу и теории Бора каждая частота получается путем комбинации двух термов и должна нумероваться *двумя индексами*, например $\nu_{12}, \nu_{13}, \ldots$ Первый индекс указывает номер начального, второй — конечного термов. Поэтому частоты должны образовывать не одномерный ряд, а прямоугольную таблицу, или *матрицу.* Такое возражение является недоразумением. Мы указываем на него только потому, что оно действительно встречается и может быть воспринято читателем как действительное, а не фиктивное возражение. На самом деле, как хорошо известно из математики, элементы прямоугольной матрицы образуют либо конечное, либо счетное множество. Их всегда можно перенумеровать с помощью *одного индекса*, даже в том случае, когда число элементов в каждой строке и каждом столбце матрицы бесконечно велико.

§ 13. Спектр водорода

1. Определение значений энергии атома $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3, \ldots$ в стационарных состояниях называется *квантованием*, точнее — *квантованием энергии* атома. Бор предложил правило квантования для водородного атома, приводящее к правильным результатам. Проблема квантования

в общем виде была сформулирована в квантовой механике, и притом не только для водородного атома, но и для *любых* атомных систем (см. § 22). Она довольно сложна. Правило квантования Бора представляет только исторический интерес. Тем не менее полезно привести простое решение задачи о квантовании для атома водорода или водородоподобного атома, близко примыкающее к идеям Бора. В основе такого решения лежит аналогия с классической механикой и эмпирически установленное выражение для спектральных термов атома водорода.

Примем, что спектральные термы и соответствующие им уровни энергии атома водорода имеют *бальмеровский вид*:

$$T_n = \frac{Z^2 R}{n^2}, \tag{13.1}$$

$$\mathscr{E}_n = -chT_n = -ch\frac{Z^2 R}{n^2}, \tag{13.2}$$

где R — *постоянная Ридберга*, а зарядовое число Z ядра введено ради удобства. Целое число n называется *главным квантовым числом*. С возрастанием n соседние уровни энергии атома сближаются, и при $n \to \infty$ расстояние между ними стремится к нулю. Дискретность энергетического спектра становится все менее и менее заметной. Поэтому можно ожидать, что в таком предельном случае квантовая система будет вести себя, как классическая. Это положение было выдвинуто Бором и названо им *принципом соответствия*.

Принцип соответствия позволяет выразить постоянную Ридберга R через фундаментальные постоянные, характеризующие атом. Для общности будем рассматривать *водородоподобный атом*. Так называется ион с зарядом ядра $+Ze$, вокруг которого вращается один электрон. При $Z = 1$ он переходит в обычный нейтральный атом водорода H, при $Z = 2$ — в однократно ионизованный атом гелия He^+, при $Z = 3$ — в дважды ионизованный атом лития Li^{++} и т. д. Разумеется, наше рассуждение будет предполагать справедливость выражения (13.2) и для водородоподобного атома. Одинакова ли постоянная Ридберга для различных водородоподобных атомов — это будет выяснено в дальнейшем.

2. Для простоты Бор принял, что электрон вращается вокруг ядра по окружности. Позднее Зоммерфельд (1868–1951) обобщил рассуждения Бора на случай эллиптических орбит. Однако с появлением квантовой механики это обобщение потеряло значение, и мы его рассматривать не будем. Ограничимся более простым случаем круговых орбит. По классическим представлениям частота излучаемого света равна частоте обращения электрона по круговой орбите. Для низких частот это безусловно верно, как показывает сравнение классической теории с опытом в области радиодиапазона. К таким частотам и относятся приводимые ниже вычисления. Здесь частоты, вычисленные по квантовой и классической теориям, должны совпадать, как этого требует принцип соответствия. Ядро мы будем считать бесконечно тяжелым, а потому неподвижным. При вращении по окружности радиуса r с циклической

частотой ω

$$m\omega^2 r = \frac{Ze^2}{r^2}, \tag{13.3}$$

откуда $\omega = Ze^2/(Lr)$, где $L = mr^2\omega$ — момент количества движения электрона. Полная энергия электрона слагается из кинетической и потенциальной энергий и равна

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\, mr^2\omega^2 - \frac{Ze^2}{r} = -\frac{Ze^2}{2r}.$$

Следовательно, по классической теории должно быть

$$\omega = -\frac{2\mathscr{E}}{L}. \tag{13.4}$$

С другой стороны, уровни энергии водородоподобного атома должны иметь бальмеровский вид (13.2). Отсюда следует, что при переходах атома с одного уровня на другой величина $\mathscr{E}_n n^2$ должна сохраняться: $\mathscr{E}_n n^2 = \text{const}$. Поэтому при больших квантовых числах n и малых их изменениях Δn должно выполняться соотношение

$$\frac{\Delta\mathscr{E}}{\mathscr{E}_n} + 2\frac{\Delta n}{n} = 0.$$

Отсюда с учетом правила частот Бора $\Delta\mathscr{E} = \hbar\omega$ получается

$$\omega = -\frac{2\mathscr{E}}{\hbar n}\,\Delta n, \tag{13.5}$$

причем у $\mathscr{E}$ мы опустили индекс n и считаем $\Delta n > 0$, чтобы не вводить отрицательных частот. Наименьшая частота соответствует переходу $\Delta n = 1$. Это — *основная частота*. Значениям $\Delta n = 2, 3, \ldots$ соответствуют ее *гармоники*, или *обертоны*. По принципу соответствия основная частота в формуле (13.5) должна совпадать с классической частотой (13.4). Это возможно только тогда, когда

$$L = n\hbar. \tag{13.6}$$

Значит, по теории Бора момент количества движения, по крайней мере при больших квантовых числах n, *квантуется*, т. е. может принимать только избранные значения (13.6).

Из формулы (13.3) теперь получаем

$$(mr^2\omega)^2 = Ze^2 rm = (n\hbar)^2.$$

Отсюда

$$r = \frac{n^2\hbar^2}{Ze^2 m}, \tag{13.7}$$

а следовательно,

$$\mathscr{E}_n = -\frac{Ze^2}{2r} = -\frac{(Ze^2)^2 m}{2\hbar^2 n^2}. \tag{13.8}$$

Сравнением этой формулы с (13.2) находим

$$R_\infty = \frac{me^4}{4\pi c\hbar^3} = \frac{2\pi^2 me^4}{ch^3} = 109\,737{,}309 \pm 0{,}12\ \text{см}^{-1}. \qquad (13.9)$$

Мы снабдили R индексом ∞, чтобы указать, что при получении формулы (13.9) масса ядра M считалась бесконечной, а само ядро неподвижным. В этом приближении постоянная Ридберга одинакова для всех водородоподобных атомов.

Теоретическое значение постоянной Ридберга (13.9), хотя и очень близко к экспериментальному значению для атомов водорода $R_\text{H} = 109\,677{,}576\ \text{см}^{-1}$, но при спектроскопической точности измерений их различие все же очень велико. Оно связано с тем, что при выводе формулы (13.9) не учитывалась конечность массы ядра M. Чтобы учесть это, надо массу электрона m заменить на приведенную массу $Mm/(M+m)$. Тогда получится

$$R = \frac{R_\infty}{1 + m/M}. \qquad (13.10)$$

В этом приближении постоянная Ридберга зависит от массы ядра, а потому ее значения для различных водородоподобных атомов отличаются друг от друга, хотя и очень мало. Для атома водорода формула (13.10) дает $R = 109\,677{,}6\ \text{см}^{-1}$, что хорошо согласуется с экспериментом.

Формула (13.10) может служить для вычисления постоянной Ридберга R_∞ для бесконечно тяжелого ядра. Для этого достаточно воспользоваться спектроскопическим значением R, например, для водорода, а также значением m/M из масс-спектроскопических измерений.

3. Формула (13.8) получена для больших значений квантовых чисел n. Но она остается справедливой *при любых значениях* n, так как при ее выводе был постулирован бальмеровский вид термов (13.1), в котором на значения n не наложено никаких ограничений. Наша задача состояла лишь в том, чтобы на основе принципа соответствия получить теоретические формулы (13.9) и (13.10) для постоянных Ридберга R_∞ и R. Но эти постоянные, очевидно, не зависят от n, а потому их значения и можно было получить, проводя вычисления при больших n.

В спектроскопии спектральные термы и уровни энергии принято изображать горизонтальными линиями, а переходы между ними — стрелками. Стрелкам, направленным от высших уровней энергии к низшим, соответствуют линии излучения; стрелкам, проведенным в обратных направлениях, — линии поглощения. В качестве примера на рис. 21 таким путем изображен спектр водорода. Уровни энергии здесь нумеруются квантовым числом n. За нуль принята энергия уровня с $n = \infty$. Этот уровень изображен верхней горизонтальной штриховой прямой. Все энергетические уровни, расположенные ниже, дискретны. Им соответствуют отрицательные значения полной энергии атома. Выше штриховой линии энергия не квантуется, т. е. энергетический спектр непрерывен. Но при $\mathscr{E} < 0$ движение электрона финитно, а при $\mathscr{E} > 0$ — инфиннтно. Это непосредственно следует из соответствующей теоремы классической механики (см. т. I, § 25, 57), поскольку при больших n

ее можно применять. Соответствующая теорема может быть доказана и в последовательной квантовой механике (см. § 22), т. е. совершенно строго.

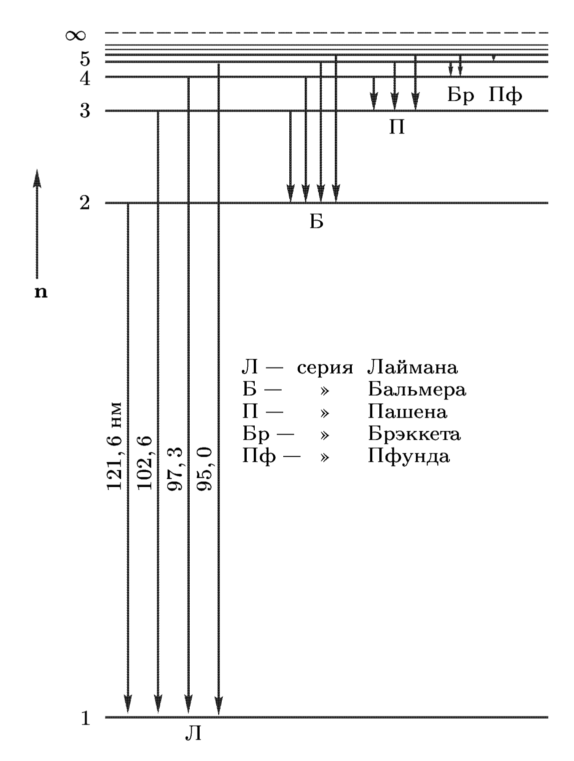


Рис. 21

Таким образом, *ядро и электрон образуют связанную систему — атом — только в случае дискретного энергетического спектра.* При непрерывном энергетическом спектре электрон может как угодно далеко удаляться от ядра. В этом случае пару частиц — ядро и электрон — можно лишь условно называть атомом. Если понимать под атомом только связанные состояния, то можно сказать, что уровни энергии атома всегда дискретны, как это и постулировал Бор.

Наличие несвязанных электронов делает, однако, возможными квантовые переходы между состояниями непрерывного энергетического спектра, а также между такими состояниями и состояниями дискретного спектра энергии. Это проявляется в виде сплошного спектра испускания или поглощения, накладывающегося на линейчатый спектр атома. Вот почему, в частности, спектр атома не обрывается на границе серии, а продолжается за нее в сторону более коротких волн, где он становится сплошным. Квантовые переходы из состояний непрерывного энергетического спектра, т. е. из состояний, в которых

атом ионизован, в состояния дискретного спектра сопровождаются рекомбинацией электронов с соответствующими положительными ионами. Излучение, возникающее при таких переходах, называется *рекомбинационным.*

Переход атома из нормального состояния на более высокий энергетический уровень дискретного спектра есть *возбуждение атома.* Переход же атома с одного из уровней дискретного спектра в область сплошного спектра превращает атом в несвязанную систему. Это есть процесс *ионизации атома.* Если вначале атом находился в нормальном состоянии, то, очевидно, минимальная энергия ионизации атома определяется выражением $\mathscr{E}_{\text{ион}} = \mathscr{E}_\infty - \mathscr{E}_1 = -\mathscr{E}_1$, т. е. для водородоподобного атома

$$\mathscr{E}_{\text{ион}} = (Ze^2)^2 \frac{m}{2\hbar^2} = 2\pi c\hbar Z^2 R_\infty = chZ^2 R_\infty, \tag{13.11}$$

или

$$\mathscr{E}_{\text{ион}} = 21{,}8 \cdot 10^{-12} Z^2 \text{ эрг} = 13{,}6 Z^2 \text{ эВ}. \tag{13.12}$$

4. До 1913 г., т. е. до появления теории Бора, водороду приписывались еще две серии:

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\text{H}} \left(\frac{1}{1{,}5^2} - \frac{1}{\overline{n}^2} \right), \quad \overline{n} = 2, 3, 4, \ldots, \tag{13.13}$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\text{H}} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(\overline{n} + 1/2)^2} \right), \quad \overline{n} = 2, 3, 4, \ldots \tag{13.14}$$

Серия (13.13) была открыта Фаулером (1889–1944) в смеси H и He, а серия (13.14) наблюдалась Пикерингом в спектре планетарной туманности (ζ Кормы). Однако, согласно теории Бора, линии этих серий принадлежат не водороду H, а однократно ионизованному гелию He^+. Они содержатся в спектральных сериях последнего:

$$\frac{1}{\lambda} = 4R_{\text{He}} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 4, 5, 6, \ldots, \tag{13.13a}$$

$$\frac{1}{\lambda} = 4R_{\text{He}} \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 5, 6, 7, \ldots, \tag{13.14a}$$

если пренебречь различием постоянных Ридберга для водорода и гелия. В действительности эти постоянные немного отличаются одна от другой, как видно из формулы

$$\frac{R_{\text{He}}}{R_{\text{H}}} = \frac{1 + m_{\text{e}}/M_{\text{H}}}{1 + m_{\text{e}}/M_{\text{He}}} = 1{,}00041. \tag{13.15}$$

Если, однако, не учитывать различие между R_{He} и R_{H}, то в этом приближении линии серии (13.13) совпадут с линиями серии (13.13a) при четных n, а линии серии (13.14) — с линиями серии (13.14a) при нечетных n. И действительно, серии (13.13a) и (13.14a) получались экспериментально в чистом гелии. Конечно нет никаких оснований

делить единые серии (13.13а) и (13.14а) на две половины, выделяя из них серии Фаулера (13.13) и Пикеринга (13.14). В действительности R_{He} немного больше R_{H}. Благодаря этому спектральные линии однократно ионизованного гелия He^{+} оказываются немного смещенными в коротковолновую сторону спектра относительно соответствующих бальмеровских линий водорода. Такой эффект называется *изотопическим смещением спектральных линий.*

Разумеется, этот эффект существует и для других химических элементов и их ионов, хотя для многоэлектронных атомов его и нельзя трактовать столь же просто, как в случае атомов водородоподобных. Действительно, различные изотопы одного и того же химического элемента или иона отличаются только массами ядер. Но они имеют одинаковые заряды ядер, а потому и одинаковые электронные оболочки. Процессы же излучения света происходят как раз *в электронных оболочках.*

Говорить об изотопическом смещении линий гелия относительно линий водорода на первый взгляд кажется нелогичным, поскольку гелий не является изотопом водорода. Однако в эффекте смещения спектральных линий речь идет не об атомах гелия, а о его *однократно ионизованных* атомах. Последние же в рассматриваемом вопросе ведут себя как изотопы водорода. Так же обстоит дело и в случае других элементов.

Заметим, что изотопическое смещение спектральных линий обусловлено не только различием масс изотопов, но и *различием размеров их атомных ядер.* Забегая вперед, это нетрудно понять, если проблему квантования рассматривать на основе уравнения Шредингера (см. § 22). В самом деле, для различных изотопов кулоновские и ядерные силовые поля внутри ядра несколько отличаются друг от друга. Различны также размеры областей, занимаемых этими полями. Это ведет к небольшому различию волновых функций и соответствующих им собственных значений энергии. Влияние размеров ядра на изотопическое смещение спектральных линий особенно существенно для тяжелых ядер. Здесь изотопическое смещение, вызванное различием размеров ядер, того же порядка, что и изотопическое смещение, вызванное различием их масс.

5. Известно, что наряду с обычным водородом существуют два изотопа его, называемые *дейтерием* и *тритием.* Ядро атома обычного водорода состоит всего из одного протона. Такой водород называется *протием.* Ядро атома дейтерия называется *дейтроном*, а ядро атома трития — *тритоном.* Дейтрон состоит из протона и нейтрона, тритон — из протона и двух нейтронов. Эти ядра тяжелее ядра протия соответственно в 2 и 3 раза. Атом дейтерия обозначается через D или ^{2}H, а атом трития — через T или ^{3}H. Дейтерий — стабильный изотоп, а тритий — радиоактивный. Тритий образуется искусственно при бомбардировке ускоренными дейтронами литиевой или бериллиевой мишеней. В ничтожных количествах он образуется также в атмосфере под действием космических лучей. В природных соединениях воды на каждые 6800 атомов протия приходится в среднем один атом дейтерия. Благодаря

относительно большой разности масс D и H различие их физических свойств выражено значительно сильнее, чем для других изотопов. Так, плотность тяжелой воды D_2O примерно на 10% больше плотности обыкновенной воды H_2O, а температура плавления (при нормальном атмосферном давлении) составляет 3,8 °C. Но изотопическое смещение спектральных линий для D и H невелико. Действительно, например,

$$\frac{R_D}{R_H} = \frac{1 + m_e/M_H}{1 + m_e/M_D} = 1{,}000272.$$

Отсюда следует, что для изотопического сдвига частот или длин волн дейтерия относительно водорода получается

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{R_D - R_H}{R_H} = m_e\left(\frac{1}{M_H} - \frac{1}{M_D}\right) = 0{,}000272.$$

Так, бальмеровская линия D_α дейтерия смещена относительно соответствующей линии H_α водорода в коротковолновую сторону спектра всего на $|\Delta\lambda| = 0{,}179$ нм.

6. Расчеты, приведенные выше, обоснованы только при больших квантовых числах n. Однако Бор первоначально принял, что электроны в стационарных состояниях движутся по определенным орбитам, как частицы в классической механике. С этой точки зрения и при малых n должна быть справедлива не только формула (13.8) для энергии стационарного состояния, но и формула (13.7), определяющая радиус орбиты электрона. Квантовая механика от орбит отказалась. Однако формула (13.7) сохраняет смысл и в квантовой механике. Она по порядку величины определяет размеры атома в соответствующих стационарных состояниях. Точный смысл этого выражения будет указан в § 27. Сейчас же заметим, что радиус орбиты электрона в нормальном состоянии атома обычного водорода (т. е. при $n = 1$) называется *боровским радиусом* и обозначается через $r_Б$. Согласно (13.7) он равен

$$r_Б = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0{,}52917 \cdot 10^{-8}\ \text{см}. \tag{13.16}$$

По порядку эта величина совпадает с размерами атомов, к которым ранее приводила кинетическая теория вещества. Напряженность электрического поля ядра на первой боровской орбите атома водорода

$$E = \frac{e}{r_Б^2} = 17{,}2 \cdot 10^6\ \text{СГСЭ} = 51{,}5 \cdot 10^8\ \text{В/см}.$$

Вообще, величина $E \sim 10^8$ В/см является характерным масштабом для напряженностей внутриатомных электрических полей. Во внешних полях с напряженностью такого порядка атомы быстро ионизуются.

Легко видеть, что скорость движения электрона по стационарной круговой орбите определяется выражением

$$v = \frac{Z}{n}\alpha c, \tag{13.17}$$

где α — безразмерная постоянная:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137{,}03604(11)} \approx \frac{1}{137}, \tag{13.18}$$

называемая *постоянной тонкой структуры*. Для движения по первой боровской орбите атома водорода

$$v = \alpha c = \frac{c}{137} = 0{,}00730c. \tag{13.19}$$

Если постоянную α ввести в формулу (13.8), то получится

$$\mathscr{E}_n = -\frac{Z^2}{2n^2}\,\alpha^2 mc^2, \tag{13.20}$$

т. е. $\mathscr{E}$ выразится через собственную энергию электрона mc^2.

ЗАДАЧИ

1. Найти границы спектральной области, в пределах которой расположены линии серии Бальмера атомарного водорода.

Ответ. $\lambda_{\text{Б}\infty} \leqslant \lambda < \lambda_{\text{Бк}}$, где $\lambda_{\text{Б}\infty} = 4/R_{\text{H}} = 364{,}705$ нм, $\lambda_{\text{Бк}} = 36/(5R_{\text{H}}) = 656{,}468$ нм (красная линия).

2. Используя данные, полученные при решении предыдущей задачи, определить длины волн коротковолновых границ водородных серий Лаймана и Пашена.

Ответ. Для серии Лаймана $\lambda_{\text{Л}\infty} = \lambda_{\text{Б}\infty}/4 = 91{,}1762$ нм. Для серии Пашена $\lambda_{\text{Пш}\infty} = (9/4)\lambda_{\text{Б}\infty} = 820{,}586$ нм.

3. Вычислить энергию, которую надо сообщить атому водорода, чтобы его серия Бальмера содержала только одну спектральную линию.

Ответ. $\mathscr{E}_1 \leqslant \mathscr{E} \leqslant \mathscr{E}_2$, где $\mathscr{E}_1 = (8/9)hcR_{\text{H}} = 12{,}09$ эВ, $\mathscr{E}_2 = (15/16)hcR_{\text{H}} = 12{,}75$ эВ.

4. Какие спектральные линии появятся в спектре атомарного водорода при облучении его ультрафиолетовым светом с длиной волны 100 нм?

Ответ. $\lambda_1 = (4/3)R_{\text{H}} = 121{,}5682$ нм, $\lambda_2 = (9/8)R_{\text{H}} = 102{,}57317$ нм, $\lambda_3 = (36/5)R_{\text{H}} = 656{,}46828$ нм.

5. Будет ли атом водорода поглощать излучение с волновым числом $1/\lambda = 3R$?

Ответ. Такое поглощение происходит и сопровождается ионизацией атома.

6. Первоначально неподвижный атом водорода испустил фотон с частотой, соответствующей головной линии серии Лаймана. Определить относительное изменение частоты фотона $\Delta\nu/\nu_0$ из-за отдачи. Какую скорость v приобрел атом после излучения фотона?

Ответ.

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{h\nu_0}{2m_{\text{ат}}c^2} = \frac{3}{16}\,\frac{m_{\text{e}}}{m_{\text{ат}}}\,\alpha^2 = 5{,}44 \cdot 10^{-9},$$

$$v = \frac{3}{8}\,\frac{m_{\text{e}}}{m_{\text{ат}}}\,\alpha^2 c = 326 \text{ см/с},$$

где $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ — постоянная тонкой структуры.

7. Найти потенциалы ионизации ионов He^+ и Li^{++}.

Ответ. $V_{\text{He}} = 4V_{\text{H}} = 54$ В; $V_{\text{Li}} = 9V_{\text{H}} = 122$ В.

8. Найти длину волны резонансной линии He^+.

Ответ. $\lambda = 30{,}375$ нм.

9. Определить наименьшую энергию, которую надо сообщить в основном состоянии трижды ионизованному атому бериллия, чтобы возбудить полный спектр этого атома.

Ответ. $\mathscr{E}_{\text{Be}} = hcZ^2 R_{\text{H}} = 217{,}5747$ эВ.

10. Фотон головной серии Лаймана иона гелия He^+ поглощается водородным атомом в основном состоянии и ионизует его. Определить кинетическую энергию $\mathscr{E}_{\text{кин}}$, которую получит электрон при такой ионизации.

Ответ. $\mathscr{E}_{\text{кин}} = 2\mathscr{E}_{\text{H, ион}} = 27{,}2$ эВ, где $\mathscr{E}_{\text{H, ион}}$ — энергия ионизации атома водорода.

11. Оценить по теории Бора число спектральных линий, которые можно получить в различных сериях спектра испускания атомарного водорода в газоразрядной трубке при давлении $P = 5$ мм рт. ст. и температуре $T = 300$ К.

Решение. Водородные серии Лаймана, Бальмера, Пашена и т. д. излучаются изолированными атомами, т. е. практически тогда, когда диаметр боровской орбиты $2r = 2n^2 r_{\text{Б}}$ не превосходит среднего расстояния между атомами $l = (kT/P)^{1/3}$. Пользуясь этим, максимально допустимый номер орбиты n можно оценить по формуле $n \approx \sqrt{l/(2r_{\text{Б}})}$. Максимально возможное число линий, которые можно наблюдать в трубке при давлении и температуре, указанных в условии задачи, будет равно:

в серии Лаймана $n - 1 \approx 12$,

в серии Бальмера $n - 2 \approx 11$,

в серии Пашена $n - 3 \approx 10$.

12. В спектрах некоторых звезд наблюдается $m \sim 40$ линий водородной серии Бальмера. При каком наименьшем числе N штрихов дифракционной решетки можно разрешить эти линии в спектре первого порядка?

Ответ. $N \approx m^3/8 = 8000$ штрихов.

13. Вблизи спектральной линии водорода $\lambda_1 = 486{,}1320$ нм Юри (1893–1981) в 1932 г. обнаружил близкую линию $\lambda_2 = 485{,}9975$ нм. Предполагая, что эта линия обусловлена небольшой примесью к обычному водороду его изотопа, определить относительную атомную массу m_x/m_{H} этого изотопа.

Решение. Из формулы (13.10) нетрудно получить

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \approx \frac{1 - m_{\text{e}}/m_{\text{H}}}{1 - m_{\text{e}}/m_x},$$

где m_x — атомная масса неизвестного изотопа. Отсюда

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda} \approx \frac{m_{\text{e}}}{m_x} - \frac{m_{\text{e}}}{m_{\text{H}}},$$

если пренебречь величиной m_{e}/m_x по сравнению с единицей. (В пределах точности расчета под λ можно понимать любое из значений λ_1, λ_2.) Следовательно,

$$\frac{m_{\text{e}}}{m_x} = \frac{m_{\text{e}}}{m_{\text{H}}} - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda}.$$

Так как $m_{\text{e}}/m_{\text{H}} = 1/1835$, то отсюда получаем $m_{\text{e}}/m_x = 1/3727$. Следовательно, $m_x/m_{\text{H}} \approx 2$. Линия λ_2 принадлежит дейтерию.

14. Определить разности длин волн бальмеровской серии водорода и дейтерия в видимой области спектра.

Ответ. $\lambda_{H_\alpha} - \lambda_{D_\alpha} = 0{,}179$ нм; $\lambda_{H_\beta} - \lambda_{D_\beta} = 0{,}132$ нм; $\lambda_{H_\gamma} - \lambda_{D_\gamma} = 0{,}118$ нм; $\lambda_{H_\delta} - \lambda_{D_\delta} = 0{,}116$ нм.

15. Определить разрешающую способность R (не путать с постоянной Ридберга) спектрального аппарата, необходимую для наблюдения изотопического смещения спектральных линий дейтерия относительно линий водорода. Какова должна быть ширина b основания призмы из тяжелого флинта с дисперсией $dn/d\lambda = 1000$ см$^{-1}$ (в диапазоне красного света) в призменном спектрографе, если его применять для обнаружения изотопического смещения головной (длинноволновой) линии серии Бальмера?

Ответ.

$$R > 2\frac{m_{\mathrm{H}}}{m_{\mathrm{e}}} \approx 3700; \quad b > \frac{R}{dn/d\lambda} \approx 3{,}7 \text{ см}.$$

16. Серия Лаймана наблюдается в смеси атомарных водорода и трития. Определить разрешающую способность R спектрального прибора, достаточную для разрешения изотопической структуры спектральных линий этой серии. Как меняется требуемая разрешающая способность при переходе к другим сериям (Бальмера, Пашена) той же смеси? Можно ли разрешить изотопическую структуру спектральных линий рассматриваемой смеси в видимой области спектра с помощью стеклянной призмы с основанием $b = 1$ см и дисперсией показателя преломления $dn/d\lambda = 1000$ см$^{-1}$? Каково должно быть эффективное число отражений $N_{\text{эф}}$ и порядок m наблюдаемого спектра, чтобы разрешить и исследовать ту же структуру с помощью интерферометра Фабри–Перо?

Ответ. Разрешающая способность должна быть не меньше

$$\frac{3}{2}\,\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{e}}} \approx 2800.$$

Она одинакова для всех линий спектральных серий смеси. Разрешающая способность призмы $b\,dn/d\lambda = 1000$, т. е. недостаточна для разрешения

$$m < \frac{3}{2}\,\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{e}}} < N_{\text{эф}} m.$$

17. Зная постоянные Ридберга для водорода и гелия ($R_{\mathrm{He}} = 109\,722{,}267$ см$^{-1}$), а также R_∞, вычислить отношение $m_{\mathrm{He}}/m_{\mathrm{H}}$ массы атома гелия к массе атома водорода.

Ответ.

$$\frac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{H}}} \approx \frac{R_\infty - R_{\mathrm{H}}}{R_\infty - R_{\mathrm{He}}} = 3{,}971.$$

18. Удельный заряд электрона e/m можно вычислить спектроскопически. Произвести это вычисление, пользуясь спектроскопическими данными

$$R_{\mathrm{H}} = 109\,677{,}576 \text{ см}^{-1}, \quad R_{\mathrm{D}} = 109\,707{,}419 \text{ см}^{-1},$$

молярными массами атомарных водорода и дейтерия

$$\mathscr{M}_{\mathrm{H}} = 1{,}008142 \text{ г/моль}, \quad \mathscr{M}_{\mathrm{D}} = 2{,}014755 \text{ г/моль}$$

и постоянной Фарадея

$$F = N_{\mathrm{A}} e = 2{,}89366 \cdot 10^{14} \text{ СГСЭ/моль} = 9632{,}19 \text{ СГСМ/моль}.$$

Решение. Постоянные Ридберга для водорода и дейтерия:

$$R_{\mathrm{H}} = \frac{R_\infty}{1 + m_{\mathrm{e}}/M_{\mathrm{H}}}, \quad R_{\mathrm{D}} = \frac{R_\infty}{1 + m_{\mathrm{e}}/M_{\mathrm{D}}},$$

где $M_{\rm H}$ и $M_{\rm D}$ — массы ядер водорода и дейтерия. Отсюда получаем

$$\frac{1}{m_{\rm e}} = \frac{1}{R_{\rm D} - R_{\rm H}}\left(\frac{R_{\rm H}}{M_{\rm H}} - \frac{R_{\rm D}}{M_{\rm D}}\right).$$

Умножая обе части этого соотношения на e и принимая во внимание, что $(M_{\rm H}+m_{\rm e})N_{\rm A} = \mathscr{M}_{\rm H}$, $(M_{\rm D}+m_{\rm e})N_{\rm A} = \mathscr{M}_{\rm D}$ (здесь $m_{\rm e}$, $M_{\rm H}$ и $M_{\rm D}$ — в граммах), $N_{\rm A}e = F$, найдем

$$\frac{e}{m_{\rm e}} = \frac{F}{R_{\rm D} - R_{\rm H}}\left(\frac{R_{\rm H}}{\mathscr{M}_{\rm H} - N_{\rm A}m_{\rm e}} - \frac{R_{\rm D}}{\mathscr{M}_{\rm D} - N_{\rm A}m_{\rm e}}\right).$$

Так как масса электрона мала по сравнению с массой атома, то нет необходимости вычислять величину $N_{\rm A}m_{\rm e}$ с высокой точностью. Достаточно принять

$$N_{\rm A}m_{\rm e} = 6{,}022\cdot 10^{23}\cdot 9{,}11\cdot 10^{-28} = 5{,}49\cdot 10^{-4}\ \text{г/моль};$$

получаем

$$\mathscr{M}_{\rm H} - N_{\rm A}m_{\rm e} = 1{,}007593\ \text{г/моль};\quad \mathscr{M}_{\rm D} - N_{\rm A}m_{\rm e} = 2{,}014206\ \text{г/моль}.$$

Подставляя эти значения в предыдущую формулу, находим

$$\frac{e}{m_{\rm e}} = 5{,}2732\cdot 10^{17}\ \text{СГСЭ/г} = 1{,}7590\cdot 10^{7}\ \text{СГСМ/г}.$$

Точность этих вычислений теряется при определении разности $R_{\rm D} - R_{\rm H}$. Поэтому сами величины $R_{\rm D}$ и $R_{\rm H}$ надо знать с исключительно высокой точностью. Существенно, что постоянная Ридберга R_∞ в вычисления не входит.

19. Позитроний (химический символ Ps) представляет собой связанную систему из электрона и позитрона, вращающихся вокруг центра масс этой системы. Позитроний образуется при столкновении медленных позитронов с атомами вещества и захвате позитроном атомного электрона. Это — нестабильная система, так как электрон и позитрон очень быстро аннигилируют в два (за время $\sim 10^{-10}$ с) или три (за время $\sim 10^{-7}$ с) гамма-кванта. Найти уровни энергии, энергию ионизации и длину волны резонансной линии для позитрония.

Ответ.

$$\mathscr{E}_{\rm Ps} = -\frac{hc}{2n^2}\,R_\infty;\quad \mathscr{E}_{\text{ион}} = \frac{hc}{2}\,R_\infty = 6{,}80\ \text{эВ},\quad \lambda_{\text{рез}} = 243\ \text{нм}.$$

20. При торможении в веществе отрицательно заряженных элементарных частиц (мюонов μ^-, π^--мезонов, K^--мезонов и пр.) они могут захватываться кулоновским полем ядра, замещая электроны электронной оболочки. Наибольшее значение имеет захват отрицательных мюонов. Практически может замещаться лишь один электрон. Получающиеся в результате такой замены системы называются *мезоатомами*. Масса мюона $m_\mu = 207m_{\rm e}$. Вычислить по теории Бора радиус первой круговой орбиты (K-орбиты) мюона в мезоатоме. Рассчитать энергетические уровни мезоатома. Какое излучение будет наблюдаться при переходе на K-орбиту мюона с более высоких орбит? Почему исследование такого излучения применяется для выяснения структуры тяжелых атомных ядер вблизи их поверхностей? Массой мюона по сравнению с массой ядра пренебречь.

Решение. Электронная оболочка атома практически не оказывает влияния на движение мюона в мезоатоме, так как последний находится либо

очень близко от ядра, либо внутри ядра. Поэтому из-за сферической симметрии электронного облака создаваемое им электрическое поле в месте нахождения мюона может считаться равным нулю. Если орбита мюона проходит вне ядра, то для радиуса K-орбиты мюона получается

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 e^2 m_\mu Z} = \frac{0{,}0026}{Z} \cdot 10^{-8} \text{ см},$$

что примерно в 200 раз меньше соответствующего значения r_1 для водородоподобного атома с тем же значением зарядового числа Z. В том же предположении для уровней энергии получаем

$$\mathscr{E}_n = -hcR_\infty Z^2 \frac{m_\mu}{m_e} = -2820 Z^2 \text{ эВ}.$$

Отсюда видно, что излучение, возникающее при переходе мюона на K-орбиту с более высоких орбит, будет расположено в рентгеновской области спектра, а при больших Z — в области γ-лучей. При больших Z K-орбита мюона проходит внутри ядра атома. В этом случае приведенные выше формулы становятся неприменимыми. Результаты сильно зависят от распределения электрического заряда в ядре, с чем и связана возможность использования мезоатомов для изучения структуры атомного ядра.

§ 14. Экспериментальное подтверждение постулатов Бора

1. Результаты, изложенные в предыдущем параграфе, являются убедительным экспериментальным подтверждением постулатов Бора. Постулаты Бора лежат в основе физических представлений, которыми руководствовались при создании и совершенствовании оптических квантовых генераторов (лазеров) (см. т. IV, гл. XI), открывших принципиально новые пути не только в физике, но и в технике и других отраслях науки. То обстоятельство, что эти приборы работают в соответствии с предсказаниями теории, свидетельствует о правильности последней, а следовательно, и о правильности самих постулатов Бора.

В этом параграфе приводятся другие экспериментальные факты, подтверждающие постулаты Бора. Сюда относятся прежде всего опыты Джеймса Франка (1882–1964) и Густава Герца (1887–1975), начатые незадолго до появления теории Бора. Первоначальная цель их состояла в измерении *потенциалов ионизации атомов*. Но эти опыты принесли экспериментальное подтверждение постулатов Бора, т. е. решили более важную задачу. В опытах Франка и Герца через исследуемый газ проходили ускоренные электроны. При столкновении с атомами газа последние могли переходить в *возбужденные состояния*, каждое из которых характеризуется определенным значением энергии. Если энергетические уровни атома дискретны, как утверждает первый постулат Бора, то кинетическая энергия электронов должна быть не меньше некоторой минимальной величины, чтобы они начали возбуждать атомы газа. Такой метод возбуждения атомов особенно пригоден для инертных газов и паров металлов, так как атомы этих веществ

не обладают электронным сродством, т. е. не проявляют склонности к захвату электронов и образованию отрицательных ионов. Франк и Герц в своих первых опытах пользовались парами ртути. Разумеется, ртутный пар должен быть сравнительно плотным, чтобы электроны сталкивались с атомами достаточно часто. Опыты производились при различных плотностях ртутного пара. С этой целью лампа, в которую было введено несколько капель ртути, помещалась в печь, температуру которой можно было менять и поддерживать постоянной во время опыта.

2. Схема опыта Франка и Герца приведена на рис. 22. Ускоряющая разность потенциалов V приложена между накаливаемым катодом K

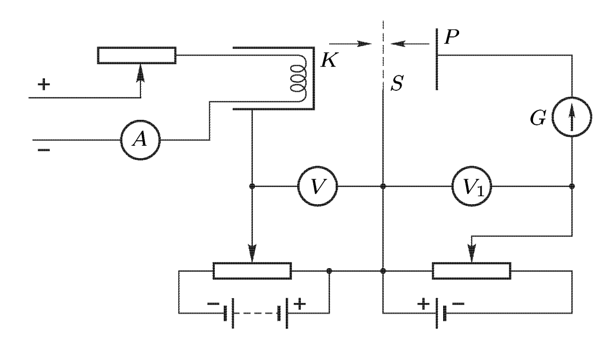


Рис. 22

и сеткой S. Выйдя из K электроны, пройдя через пары ртути, направляются к сетке S. Если их кинетическая энергия еще достаточно велика, то после прохождения через сетку они могут преодолеть небольшой задерживающий потенциал V_1 порядка 0,5 В и попасть на собирающий электрод (коллектор) P. В противном случае они не смогут преодолеть задерживающий потенциал V_1 и на коллектор не попадут. Электронный ток I на коллектор измеряется гальванометром. Амперметр A служит для контроля постоянства тока накала. Стеклянный баллон, в который заключены накаливаемый катод, сетка и коллектор, на рис. 22 не изображен.

Если бы в сосуде поддерживался вакуум, то примерная зависимость термоэлектронного тока I от ускоряющего напряжения V представлялась бы кривой, приведенной на рис. 23. Из-за пространственного заряда эта кривая в самом начальном участке следовала бы закону трех вторых. При больших напряжениях получался бы ток насыщения, не зависящий от V (см. т. III, § 101). Опыт показал, что при наличии в сосуде ртутных паров или других газов кривая $I = I(V)$ имеет качественно совсем другой вид. На ней появляются резко выраженные максимумы и минимумы тока. Для ртути (рис. 24) расстояния между двумя соседними максимумами или минимумами равны 4,9 В. Такие максимумы и минимумы свидетельствуют о дискретном характере энергетических уровней атома, причем для атома ртути ближайший энергетический

уровень лежит выше нормального (наинизшего) уровня примерно на 4,9 эВ.

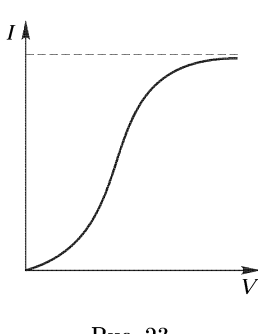


Рис. 23

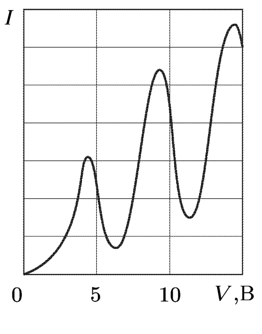


Рис. 24

3. Действительно, столкновения электрона с атомами ртути могут быть *упругими* и *неупругими.* При упругих столкновениях внутреннее состояние атома ртути не меняется, а потому кинетическая энергия электрона не тратится на его возбуждение. Она может переходить только в кинетическую энергию атома как целого. Но с этим процессом можно совсем не считаться, так как масса атома ртути почти в 400 тысяч раз превышает массу электрона. При столкновении с атомом электрон отражается от него, как от неподвижной стенки, меняя только направление своего движения. При этом можно не учитывать теплового движения самого атома, так как средняя энергия такого движения $(3/2)kT$ очень мала по сравнению с энергией, приобретаемой электроном при ускорении в электрическом поле. Пока кинетическая энергия электрона меньше $\mathcal{E}_1 \approx 4{,}9$ эВ, он не может переводить атом ртути в возбужденное состояние — все столкновения будут упругими. Понятно, что среди множества упругих столкновений электрона с атомами ртути имеются не только столкновения, в которых электрон теряет направление первоначального движения, но и столкновения, при которых это направление почти восстанавливается. Если электрон был в состоянии преодолеть задерживающий потенциал до столкновений, то он сможет сделать то же самое и после нескольких упругих столкновений при условии, что направление его движения осталось прежним. Поэтому, пока столкновения упругие, электронный ток I растет с ростом напряжения V.

Положение меняется, когда энергия электрона достигает значения $\mathcal{E}_1 = 4{,}9$ эВ или больше. Тогда электрон сможет затратить свою кинетическую энергию или часть ее *на возбуждение атома ртути.* В этом случае столкновения называются *неупругими.* Если при этом оставшейся кинетической энергии электрона окажется недостаточно, чтобы преодолеть задерживающий потенциал V_1, то электрон на коллектор P не попадет, и с ростом напряжения V электронный ток I начнет убывать. При достижении энергии $\mathcal{E}_1$ ток I не падает скачкообразно до нуля, так как не все скорости электронов одинаковы, хотя бы

потому, что при вылете из нити получается тепловой разброс скоростей. Кроме того, для преодоления задерживающего поля имеет значение не полная скорость электрона, а только ее *продольная составляющая*, т. е. составляющая вдоль поля; поперечная составляющая роли не играет. А эта составляющая меняется при упругих столкновениях — сохраняется только полная скорость. Все это ведет к сглаживанию кривой $I = I(V)$. Этим же объясняется, почему максимумы на кривой тока получаются не точно при энергии $\mathscr{E}_1$, достаточной для возбуждения атома, а при энергии несколько меньшей.

При дальнейшем возрастании ускоряющего напряжения электрон, оставшийся после упругого столкновения в ускоряющем поле, может вторично набрать энергию, достаточную для возбуждения первого энергетического уровня атома $\mathscr{E}_1$. Если он снова претерпит неупругое столкновение и потеряет энергию, то при достаточно высоком потенциале V он может в третий раз ускориться до энергии, необходимой для возбуждения того же первого энергетического уровня атома, и т. д. В результате таких многократных возбуждений уровня $\mathscr{E}_1$ на кривой $I = I(V)$ и появляются максимумы вблизи значений энергии $\mathscr{E}_1$, $2\mathscr{E}_1$, $3\mathscr{E}_1$ и т. д. Наличие *контактной разности потенциалов* между катодом и сеткой искажает показания вольтметра V, смещая всю кривую $I = I(V)$ вправо или влево. Однако контактная разность потенциалов исключается, если величину $\mathscr{E}_1$ определять по расстоянию между соседними максимумами тока $I = I(V)$, которое от нее не зависит.

4. Неупругое столкновение с возбуждением первого возбужденного уровня $\mathscr{E}_1$ может и не произойти. Электрон может продолжать увеличивать свою энергию в электрическом поле, пока она не достигнет значения, достаточного для возбуждения второго энергетического уровня $\mathscr{E}_2$, третьего уровня $\mathscr{E}_3$ и т. д. Ускоряющие напряжения, соответствующие этим уровням энергии, называются *потенциалами возбуждения* или *критическими потенциалами*. Таким образом, в принципе на кривой $I = I(V)$ вблизи критических потенциалов могут появиться новые максимумы. Однако в плотных газах этого фактически не происходит. Так было и в первых опытах Франка и Герца (при температуре, например, 210 °C давление ртутных паров составляет 24 мм рт. ст.). Дело в том, что для накопления нужной энергии электрон без неупругих столкновений должен пройти в ускоряющем электрическом поле расстояние, большое по сравнению с длиной свободного пробега между двумя последовательными неупругими столкновениями. Это условие в случае плотных газов не выполняется. Возбуждение высших энергетических уровней $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$, ..., возможно при более низком давлении газа и более совершенной аппаратуре (см. п. 6).

5. Однако, незначительно изменив схему рис. 22, можно приспособить ее для измерения *потенциалов ионизации атомов. Потенциал ионизации — это наименьшее ускоряющее напряжение, при котором атомы начинают ионизоваться и образовываются положительные ионы.* Понятно, что для возможности ионизации электроны должны быть ускорены до энергии, не меньшей *энергии ионизации атома.* В случае ртути для этого температура печи должна быть невысокой,

чтобы давление ртутных паров составляло примерно 0,5 мм рт. ст. Схема рис. 22 сохраняется. Только теперь положительный полюс вольтметра V_1 надо соединить с отрицательным, а не с положительным полюсом вольтметра V. Тогда всегда потенциал коллектора будет примерно на 0,5 В ниже потенциала катода, каково бы ни было значение ускоряющего сеточного напряжения. Благодаря этому электроны, испускаемые катодом, не смогут попадать на коллектор. Ток через гальванометр G не пойдет, пока нет положительных ионов, т. е. пока ускоряющий сеточный потенциал ниже потенциала ионизации. Как только ускоряющее сеточное напряжение достигнет потенциала ионизации, начнут образовываться положительные ионы — через гальванометр пойдет ток. Показание вольтметра V в этот момент и даст потенциал ионизации ртути. Конечно, в это показание должна быть введена поправка на контактную разность потенциалов между катодом и сеткой, которая находится из предыдущих измерений первого потенциала возбуждения ртути.

6. Чтобы повысить разрешающую способность прибора и наблюдать максимумы, соответствующие высшим энергетическим уровням ртути, можно воспользоваться прежней схемой, изображенной на рис. 22, но вместо одной взять *две сетки*, между которыми накладывается слабое ускоряющее напряжение порядка 0,1 В. Основное ускоряющее напряжение создается между катодом и первой сеткой, а тормозящее напряжение — между второй сеткой и коллектором. Этим достигается то преимущество, что создается большое пространство между сетками, *почти свободное от поля*. В таком пространстве электроны, ускоренные до потенциала возбуждения или выше, главным образом и претерпевают неупругие столкновения. Напротив, расстояние между катодом и ускоряющей сеткой должно быть невелико, чтобы между ними было относительно мало столкновений. С этим и связано повышение разрешающей способности прибора. Понятно, что давление газа в трубке должно быть невысоким (для ртутных паров порядка 5–6 мм рт. ст.). Таким путем у атома ртути обнаруживается второй потенциал возбуждения $V = 6{,}7$ В. Третий потенциал возбуждения $V = 10{,}4$ В является уже ионизационным.

Более совершенный и чувствительный метод измерения критических потенциалов был разработан Герцем. В этом методе электроны, вылетевшие из катода K (рис. 25) и ускоренные потенциалом V, попадают в свободное от поля пространство, ограниченное цилиндрической сеткой, изображенной на рис. 25 штриховой линией (меридиональный разрез). Там происходят их столкновения с атомами газа. При упругих столкновениях электроны, не теряя энергии, отклоняются и могут вылетать через боковую поверхность сетки в слабое задерживающее поле, создаваемое потенциалом $V_1 \approx 0{,}1$ В, наложенным между сеткой и окружающим ее собирающим электродом P (коллектором). Энергия электронов достаточна, чтобы преодолеть V_1 и попасть на P. Если же при увеличении ускоряющего напряжения V появятся неупругие столкновения, то после столкновения энергия электрона может оказаться недостаточной, чтобы преодолеть задерживающее поле и попасть на коллектор P. Ток на коллектор P измеряется гальванометром G. Измерения производятся при двух близких значениях задерживающего потенциала: $V_1 = 0$ и, например, $V_1 = 0{,}1$ В.

Пока столкновения упругие, показания гальванометра в обоих случаях практически одинаковы. Если же ускоряющее напряжение V достигает значения одного из критических потенциалов, то появляются неупругие столкновения, и во втором случае (т. е. при $V_1 = 0{,}1$ В) ток в гальванометре G резко

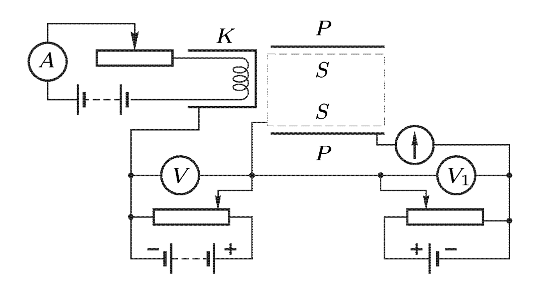


Рис. 25

падает. Разность показаний гальванометра при $V_1 = 0$ и $V_1 = 0{,}1$ В может служить мерой для числа электронов, вылетевших из сетки с энергией меньше 0,1 эВ, т. е. для числа электронов, испытавших неупругие столкновения в окрестности рассматриваемого критического потенциала. Так как электроны сталкиваются с атомами там, где электрического поля нет, то после столкновения они не могут вновь набрать энергию, достаточную для возбуждения атома. По этой причине на кривой $I = I(V)$ уже не появятся равноотстоящие максимумы, соответствующие одному и тому же критическому потенциалу. Кратного повторения таких максимумов, как было раньше, не произойдет. Непосредственное исключение контактной разности потенциалов окажется невозможным. Однако контактную разность потенциалов можно найти и затем учесть ее влияние, если известно значение хотя бы одного критического потенциала. Можно также воспользоваться смесью двух газов, для одного из которых критические потенциалы известны.

7. Опыты Франка и Герца подтверждают также и второй постулат Бора, т. е. правило частот. Оказывается, что при ускоряющем напряжении меньше первого критического потенциала $\approx 4{,}9$ В пары ртути не светятся. В этом случае нет возбужденных атомов ртути, а следовательно, и их переходов в невозбужденное состояние. При повышении ускоряющего напряжения примерно до 4,9 В появляются первые возбужденные атомы. При переходах их в нормальное состояние должно появиться свечение. И действительно, в этом случае наблюдается свечение, состоящее из одной резонансной ультрафиолетовой линии $\lambda =$ $= 253{,}7$ нм.

Конечно, для наблюдения этого свечения стеклянный баллон, в котором находятся пары ртути и остальная аппаратура, не годится, так как стекло непрозрачно для ультрафиолетовых лучей. Не годится и стеклянная оптика для исследования спектрального состава излучения. Подходящими материалами могут быть кварц или флюорит, прозрачные соответственно приблизительно до 180 и 120 нм.

По длине волны линии $\lambda = 253{,}7$ нм можно вычислить и первый критический потенциал ртути, и притом значительно точнее, чем по максимумам на кривой $I = I(V)$, получаемой в опытах Франка и Герца.

Для этой цели можно воспользоваться формулой

$$\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1 = eV = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

Подстановка в нее числовых значений дает

$$\lambda = \frac{1240}{V(\text{В})}\ \text{нм}. \tag{14.1}$$

Полагая в этой формуле $\lambda = 253{,}7$ нм, найдем $V = 4{,}887$ В, что хорошо согласуется со значением 4,9 В, полученным в опытах Франка и Герца.

При более совершенной методике эксперимента у атомов ртути обнаруживается второй критический потенциал $V = 6{,}7$ В. При этом при переходе в основное состояние появляется излучение с длиной волны $\lambda = 184{,}9$ нм. Этой спектральной линии по формуле (14.1) соответствует $V = 6{,}705$ В, что также находится в превосходном согласии с опытом. Третий критический потенциал ртути 10,4 В является уже ионизационным. Следовательно, при $V > 10{,}4$ В должны происходить переходы из несвязанных состояний на все нижележащие энергетические уровни. И действительно, опыт показал, что при этом возбуждается полный атомный спектр ртути.

8. Для возбуждения и наблюдения свечения газа ударами электронов установку лучше несколько изменить, так как теперь ускоряющее поле уже не требуется. Принципиальная схема, пригодная для наблюдения свечения, приведена на рис. 26. Ускоряющее напряжение V создается между подогреваемым катодом K и окружающей его цилиндрической сеткой S. В свою очередь сетка S окружена цилиндрическим анодом A . Зазор между катодом K и сеткой S должен быть небольшим, чтобы в нем происходило мало столкновений. Напротив, пространство между сеткой S и анодом A должно быть относительно большим, чтобы почти все столкновения происходили именно в этом пространстве. Это пространство должно быть свободно от поля, для чего анод и сетка соединяются между собой. Таким образом, как и в установке Герца (см. рис. 25), ускоряющий промежуток отделен от пространства, где электроны сталкиваются с атомами газа и возбуждают их.

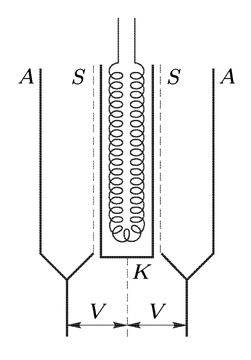


Рис. 26

Допустим, например, что лампа заполнена парами натрия. Опыт показывает, что пары натрия не светятся, если ускоряющее напряжение V меньше 2,1 В. При напряжении 2,1 В начинает возбуждаться только желтая D-линия натрия $\lambda = 589{,}6$ нм. Значит, она является резонансной линией, а $V = 2{,}1$ В — резонансным потенциалом. Его величину можно уточнить, подставив значение λ в формулу (14.1). Это дает $V = 2{,}103$ В. При дальнейшем увеличении ускоряющего напряжения появляются остальные линии спектра испускания натрия.

§ 15. Резонансное свечение и люминесценция

1. В добавление к предыдущему параграфу рассмотрим опыты Вуда (1868–1955) по возбуждению свечения в газах, начатые в 1904–1905 гг. В эвакуированный стеклянный баллон Вуд помещал кусочек металлического натрия. После нагревания баллон наполнялся парами этого металла. Конденсорная линза концентрировала на парах натрия свет от горелки, в пламя которой вводилась поваренная соль. Такой источник света обильно испускал две желтые линии D_1 и D_2 натрия с длинами волн $\lambda_{D_1} = 589{,}6$ нм и $\lambda_{D_2} = 589{,}0$ нм. На пути падающего пучка пары натрия начинали светиться ярким желтым светом, распространявшимся во все стороны, а не только в направлении падающего света. Спектроскопическое исследование показало, что свечение состоит из тех же двух желтых линий натрия D_1 и D_2. Оказалось также, что линии D_1 и D_2 сильно поглощаются парами натрия. С повышением температуры, а следовательно, и плотности паров поглощение увеличивается. Глубина проникновения падающего света в пар уменьшается. Вследствие этого продольные размеры светящейся области сокращаются. При достаточной плотности паров свечение сосредоточивается в тонком поверхностном слое в месте вхождения падающего пучка света. При этом обе линии D_1 и D_2 расширяются и в конце концов сливаются.

Аналогичное явление Вуд наблюдал и в парах ртути. Возбуждающим светом служило ультрафиолетовое излучение ртути с длиной волны $\lambda = 253{,}7$ нм. Конечно, во избежание сильного поглощения сосуд, содержащий ртутные пары, в этом случае должен быть изготовлен из кварца, а источником света может служить, например, ртутная кварцевая лампа. Оказалось, что ртутные пары сильно поглощают свет именно с длиной волны $\lambda = 253{,}7$ нм, а затем переизлучают его во все стороны с той же длиной волны. Явление удалось наблюдать, освещая ртутные пары и второй линией ртути $\lambda = 185{,}0$ нм, хотя в этом случае наблюдение значительно труднее, так как указанная линия поглощается гораздо сильнее. Впоследствии удалось распространить наблюдения и на другие элементы. Не вызывает сомнения, что описанное явление существует во всех веществах, хотя его воспроизведение практически осложняется сильным поглощением и необходимостью иметь подходящий источник света.

2. В то время, когда Вуд наблюдал описанные явления, их, конечно, истолковывали классически. Атому свойственны определенные собственные частоты, с которыми он и излучает спектральные линии. При освещении атома монохроматическим светом определенной частоты в нем возбуждаются вынужденные колебания, и атом начинает переизлучать свет с той же частотой. Этот эффект должен быть выражен особенно сильно, когда частота внешнего излучения совпадает с одной из собственных частот атома, т. е. при резонансе. Поэтому явление получило название *резонансного излучения* или *свечения.*

Конечно, приходящий в колебание атом может не только переизлучать полученную энергию, но, например, передавать ее без излучения

окружающим атомам. Эта часть энергии в конце концов выделяется в виде тепла. Такой эффект проявится в ослаблении или тушении резонансного свечения. Он будет выражен тем сильнее, чем сильнее взаимодействие между атомами рассматриваемого газа. В частности, это произойдет при увеличении плотности газа или при добавлении к нему атомов постороннего вещества. Так, в парах ртути при давлении 0,001 мм рт. ст. резонансное свечение хорошо выражено. Но при добавлении водорода под давлением 0,2 мм рт. ст. интенсивность свечения убывает вдвое, а при дальнейшем добавлении водорода ослабевает еще значительнее. Аналогично действует добавление и других газов.

3. Приведенное классическое толкование резонансного излучения на первый взгляд представляется весьма убедительным и единственно возможным. При критическом рассмотрении это оказывается не совсем так. Действительно, резонансное излучение не есть обособленное явление, а представляет частный случай более общего явления — *излучения спектральных линий.* В основе обоих этих явлений должен лежать *один и тот же* механизм. Происхождение спектральных линий и спектральных серий классическая физика объяснить не могла. Это удалось сделать только квантовой теории. Естественно думать, что и резонансное излучение должно иметь также квантовое истолкование. Последнее действительно существует и заключается в следующем.

Квант падающего света $h\nu$ должен возбудить атом, т. е. перевести его с нормального энергетического уровня $\mathscr{E}_1$ на вышележащий уровень. Пусть $\mathscr{E}_2$ — ближайший уровень, лежащий выше $\mathscr{E}_1$. Если $h\nu < \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1$, то энергии светового кванта $h\nu$ недостаточно, чтобы перевести атом на уровень $\mathscr{E}_2$. В этом случае возбуждение атома световым квантом невозможно. Для возбуждения уровня $\mathscr{E}_2$ необходимо, чтобы $\mathscr{E}_2 \leqslant \mathscr{E}_1 + h\nu$. Максимальное возбуждение будет происходить при условии $\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_1 + h\nu$, когда вся энергия кванта $h\nu$ расходуется на возбуждение уровня $\mathscr{E}_2$. Через короткое время атом с уровня $\mathscr{E}_2$ возвращается на ближайший нижележащий уровень, т. е. $\mathscr{E}_1$. При этом излучается световой квант $h\nu' = \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1$. Таким образом, $\nu' = \nu$, т. е. частоты возбуждающего и переизлучаемого света одинаковы. В этом и состоит резонансное излучение, если его рассматривать с квантовой точки зрения.

То обстоятельство, что в парах натрия наблюдается излучение не одиночной линии, а двух близких линий D_1 и D_2, объясняется тем, что второй возбужденный уровень $\mathscr{E}_2$ атома натрия в действительности состоит из двух близко расположенных уровней.

С квантовой точки зрения, как и с классической, понятно и явление *тушения свечения* при увеличении концентрации газа. Действительно, атом, находящийся на возбужденном уровне $\mathscr{E}_2$, может передать свою энергию без излучения окружающим атомам. Этот эффект усиливается с увеличением плотности газа или при добавлении к нему посторонних примесей.

Изложенное представляет только основную схему явления, но не охватывает всех его сторон. В частности, мы оставили в стороне все

вопросы, связанные с уширением энергетических уровней и спектральных линий. Но это не входит в нашу задачу.

4. Постулаты Бора составляют основу для понимания явлений *люминесценции*, которые до этого оставались совершенно непонятными. Ответим сначала на вопрос, что такое люминесценция?

Все тела испускают электромагнитные волны, интенсивность и степень поляризации которых в различных участках спектра определяются температурой тела и его поглощательной способностью в соответствии с законом Кирхгофа (1824–1887). Такое излучение называется *температурным* или *равновесным.* Помимо температурного излучения, многие тела в результате различных внешних возбудителей дают избыточное излучение, не определяющееся температурой тела. Таково, например, свечение экрана в телевизоре, свечение газа в газоразрядной трубке при прохождении через него электрического тока, свечение сахара при раскалывании, свечение некоторых живых организмов (светлячков), свечение гниющего дерева и т. д. Все это — примеры *холодного свечения.* Такое *избыточное над температурным излучение называется люминесценцией, если его длительность после прекращения внешнего воздействия (послесвечение) значительно превышает период световых колебаний.*

Первая часть этого определения и самый термин «люминесценция» были введены Е. Видеманом (1826–1899). Вторая часть — критерий длительности — был введен С. И. Вавиловым, чтобы отличить люминесценцию от более кратковременных явлений вторичного излучения — отражения и рассеяния света, тормозного излучения заряженных частиц, излучения Вавилова–Черенкова и пр. Конечно, этот критерий не определен вполне жестко и может служить только для *общей ориентировки.* В ряде случаев он не позволяет провести резкую грань между люминесценцией и нелюминесценцией. Раньше явления люминесценции делили на *флуоресценцию* и *фосфоресценцию.* Под флуоресценцией понимали излучение, прекращающееся мгновенно после прекращения действия вызывающего его внешнего возбудителя. Если же свечение продолжается некоторое время и после удаления возбудителя, то его называли фосфоресценцией. В свете более поздних исследований было выяснено, что никакой принципиальной разницы между флуоресценцией и фосфоресценцией нет. Различие между ними чисто количественное — по времени длительности послесвечения. Поэтому указанное деление потеряло смысл. Термин «флуоресценция» применяется и сейчас, но только для того, чтобы качественно подчеркнуть кратковременность свечения. Например, длительность резонансного свечения разреженных газов, как показали специальные измерения, порядка 10^{-8}–10^{-9} с.

К приведенному определению люминесценции следует добавить некоторые замечания. Поскольку температура — *макроскопическое понятие*, разделять полное излучение на температурное и люминесценцию имеет смысл не для отдельных молекул и атомов, а *только для их совокупностей* — тел, имеющих определенную температуру. Если состояние тела столь неравновесно, что говорить об его температуре не приходится, то в этом случае нельзя говорить и о температурном излучении, и о люминесценции. Так будет и при свечении отдельных атомов и молекул. По этой причине для свечения газов, исследованного Вудом, мы предпочли нейтральный термин «резонансное излучение» вместо часто употребляемого термина «резонансная флуоресценция». Действительно, такое свечение наблюдается и в разреженных газах. Термин же «резонансная флуоресценция» оправдан, когда речь идет о свечении сравнительно плотных газов.

Вещества, в которых возбуждается люминесценция, называются *люминофорами.* По методу возбуждения свечения различают:

1) *фотолюминесценцию* — люминесценцию, возникающую при освещении люминофора видимым или ультрафиолетовым светом;

2) *рентгенолюминесценцию* — свечение люминофора при облучении его рентгеновскими или γ-лучами;

3) *катодолюминесценцию* — свечение люминофора при бомбардировке его электронами (катодными лучами);

4) *радиолюминесценцию* — свечение под действием ядерных излучений: α-частиц, β-частиц, γ-лучей, протонов и т. д.;

5) *электролюминесценцию* — свечение люминофора, например газонаполненной вакуумной трубки, в электрическом поле;

6) *хемилюминесценцию* — свечение тел при химических реакциях;

7) *триболюминесценцию* — свечение, возникающее при растирании, раздавливании или раскалывании некоторых кристаллов (например, сахара);

8) *кандолюминесценцию* — свечение (но не температурное), возникающее при помещении некоторых веществ в пламя, например в пламя газовой горелки.

5. Оставляем в стороне вопрос о полноте и обоснованности этого списка. Вопросам люминесценции, и даже ее отдельным видам, посвящена обширная специальная литература, и мы не можем входить в их обсуждение. Существенно только отметить *квантовый характер люминесценции.* Как и всякое излучение, люминесценция возникает в результате квантовых переходов излучающей системы с каких-то возбужденных энергетических уровней на уровни более низкие. С этой точки зрения становится понятным один из характерных признаков люминесценции — *длительность свечения*, ибо многие тела могут находиться в возбужденных состояниях длительное время. Характер люминесценции определяется структурой энергетического спектра тела, средним временем его пребывания в возбужденных состояниях, правилами отбора при поглощении и излучении света и т. д.

Для фотолюминесценции Стоксом (1819–1903) в 1852 г. было установлено правило, согласно которому *длина волны λ' света люминесценции больше длины волны λ возбуждающего света.* Это правило указывает на квантовый характер фотолюминесценции. Действительно, если квант возбуждающего света переводит систему с нормального уровня $\mathscr{E}_1$ на возбужденный уровень $\mathscr{E}_2$, то $\mathscr{E}_2 \leqslant \mathscr{E}_1 + h\nu$. При обратном возвращении системы на прежний уровень $\mathscr{E}_1$ частота излучаемого света будет $\nu' = (\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1)/h$, а потому $\nu' \leqslant \nu$. Система может вернуться с уровня $\mathscr{E}_2$ не на прежний уровень $\mathscr{E}_1$, но на уровень, лежащий несколько выше. Тогда тем более $\nu' < \nu$.

Однако правило Стокса допускает исключения. Допустим, что световой квант переводит систему с какого-то возбужденного уровня $\mathscr{E}'_1$ на вышележащий уровень $\mathscr{E}'_2$. Тогда, конечно, $\mathscr{E}'_2 \leqslant \mathscr{E}'_1 + h\nu$. Но так как $\mathscr{E}'_1 > \mathscr{E}_1$, то может случиться, что $\mathscr{E}'_2 > \mathscr{E}_1 + h\nu$. В этом случае при возвращении системы на невозмущенный уровень $\mathscr{E}_1$ будет испускаться квант с частотой $\nu' > \nu$.

§ 16. Принципиальные недостатки теории Бора

Теория Бора — важный этап в понимании внутриатомных явлений. Классическая физика, созданная при изучении макроскопических явлений, столкнулась с принципиальными трудностями, когда ее стали применять к атомам, молекулам и вообще к явлениям микромира. Теория Бора подготовила почву для уяснения того важнейшего

факта, что *для понимания явлений микромира классических понятий и классических законов недостаточно.* В области микромира нужны *принципиально новые понятия и законы.* Здесь первенствующая роль должна принадлежать кванту действия, открытому Планком. Теория Бора послужила мощным стимулом для постановки многих экспериментальных исследований, принесших важные результаты. Даже в тех случаях (а таких случаев было большинство), когда теория была не в состоянии дать количественного объяснения многих явлений, два постулата Бора служили руководящей нитью при классификации и качественной интерпретации этих явлений. На их основе, например, был классифицирован громадный эмпирический материал атомной и молекулярной спектроскопии.

Но двух постулатов Бора, конечно, недостаточно для построения полной теории. Они должны быть дополнены прежде всего *правилами квантования*, с помощью которых могут быть вычислены уровни энергии атома. Бор предложил правило квантования круговых орбит электронов в одноэлектронных атомах. Оно выражается формулой (13.6). При получении этой формулы Бор, как он сам признается, исходил из требования подогнать теоретическую формулу для уровней энергии под эмпирически установленную формулу Бальмера для спектральных термов водорода. Несколько позже Зоммерфельд обобщил правило квантования Бора на случай движения электрона по эллиптическим орбитам. Но и после этого правило квантования относилось только к атому с одним электроном. Не удалось распространить правила квантования на многоэлектронные атомы, даже на простейший после водорода атом гелия, состоящий из ядра и двух электронов. От теории, конечно, нельзя требовать, чтобы она давала аналитическое решение задачи трех тел. Такое решение может оказаться невозможным. Но теория должна указать *принципиальный метод* численного решения с точностью, достаточной для сравнения с экспериментом [1]. Этого теория Бора дать не могла. Она тем более не могла дать принципиального решения и более сложного вопроса — образования молекул, даже простейшей молекулы водорода, состоящей из двух протонов и двух электронов.

Теория Бора, даже в простейшем случае одноэлектронных атомов, позволяла вычислять только частоты спектральных линий, но не их

---

[1] Именно так обстоит дело в небесной механике. Аналитическое решение задачи трех тел получить не удалось. Но в небесной механике разработаны эффективные приближенные методы численного решения задачи, дающие необходимую точность. Правда, Зундман в 1912 г. нашел аналитическое решение в виде рядов. Но для получения числовых результатов эти ряды непригодны, так как они сходятся очень медленно. Например, чтобы с помощью рядов Зундмана достигнуть той же точности, которую дают современные астрономические ежегодники, надо просуммировать примерно $10^{8\,000\,000}$ членов. Это выходит далеко за пределы возможностей современных и будущих самых больших электронных счетных машин.

интенсивности и поляризацию. Правда, для нахождения интенсивностей и поляризации она пользовалась *принципом соответствия*. Но принцип соответствия мог быть оправдан только при больших квантовых числах, где вычисления могли быть произведены классически. Теория Бора распространяла результат и на малые квантовые числа, для чего не было никаких оснований. Таким образом, в конце концов интенсивность и поляризация определялись классически.

Но основной принципиальный недостаток теории Бора — в ее *непоследовательности*. Она принимала существование только стационарных состояний атома или, как говорил сам Бор, стационарных орбит электронов. Это совершенно непонятно с точки зрения классической механики. В то же время к движению электронов в стационарных состояниях она применяла законы классической механики, хотя и считала неприменимой классическую электродинамику (поскольку нет излучения). По шуточному замечанию Г. Брэгга (1862–1942), в теории Бора по понедельникам, средам и пятницам надо применять классические законы, а по вторникам, четвергам и субботам — квантовые. Два постулата Бора, если не пользоваться представлениями об орбитах электронов в атомах, как это делалось нами выше, *проверены экспериментально* и потому должны считаться *правильными*. Но сама теория Бора в целом является только промежуточным этапом на пути к более совершенной и последовательной теории. Это лучше других понимал сам Бор, которому принадлежит главная заслуга в осмысливании принципиальных положений квантовой механики, пришедшей на смену теории Бора.

Планк ввел представление о квантовом характере процессов излучения и поглощения света. Эйнштейн распространил квантование света и на его распространение в пространстве, введя представление о фотонах. А теория теплоемкостей Эйнштейна прямо указывала на то, что введенная Планком постоянная h проявляется не только в световых явлениях, но и в процессах, происходящих в веществе. Дальнейший шаг сделал Бор. Успех теории Бора при вычислении постоянной Ридберга и размеров атома выявил значение постоянной Планка как *универсальной фундаментальной величины* для описания всех видов материи, а не только для описания корпускулярно-волнового дуализма света. И действительно, постоянная Планка, имеющая размерность действия (т. е. размерность произведения импульса на координату или энергии на время), пронизывает содержание всей новейшей (квантовой) физики.

Глава III
ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЦ ВЕЩЕСТВА

§ 17. Гипотеза де Бройля

1. Создание последовательной теории для описания явлений атомных и субатомных масштабов было начато и вчерне завершено в 1925–1926 гг. Такая теория получила название *квантовой механики.* Сначала возникло то направление в квантовой механике, которое получило название *матричной механики.* Ее основные идеи были заложены в основополагающей работе Гейзенберга (1901–1976) «О квантовомеханическом истолковании кинематических и механических соотношений». Систематическое построение матричной механики было дано Борном (1882–1970) и Иорданом (1902–1980), к которым в дальнейшем присоединился и сам Гейзенберг. К этому направлению примыкает и та форма квантовой механики, которая практически одновременно и независимо была разработана Дираком. Немного позже в работах Шредингера (1887–1961) появилось другое направление, названное *волновой механикой.* Вскоре было выяснено, что эти два направления, отличаясь по форме, тождественны по своему физическому содержанию.

В общем курсе нецелесообразно говорить о весьма абстрактной матричной механике. Ограничимся только изложением, далеко не полным, физических представлений волновой механики. Разумеется, мы не можем подробно излагать сложный математический аппарат, составляющий неотъемлемую и весьма важную часть квантовой механики. Это делается в курсах теоретической физики.

2. Построению волновой механики Шредингера предшествовали работы Луи де Бройля (р. 1892). В 1923–1924 гг. он выдвинул и развил идеи о волнах вещества. К тому времени в оптике уже сложилась парадоксальная, но подтверждаемая опытом ситуация: в одних явлениях (интерференции, дифракции,...) свет ведет себя как *волны*; другие явления (фотоэффект, эффект Комптона,...) показывают с неменьшей убедительностью, что он ведет себя и как *частицы.* Де Бройль поставил вопрос, не распространяется ли подобный корпускулярно-волновой дуализм и на обычное вещество? Если это действительно так, то каковы волновые свойства частиц вещества? Ответ, подтвержденный в дальнейшем опытами, оказался положительным.

Пусть частица движется в свободном пространстве с постоянной скоростью v. Де Бройль предположил, что с такой частицей связана какая-то плоская монохроматическая волна

$$\Psi = \Psi_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \tag{17.1}$$

распространяющаяся в направлении скорости v [1]. О природе этой волны, т. е. о физическом смысле функции Ψ, де Бройль не мог сказать ничего определенного. Отвлечемся временно и мы от обсуждения этого вопроса. Волны типа (17.1) получили название *фазовых волн*, *волн вещества* или *волн де Бройля.*

Попытаемся установить рациональную связь между корпускулярными и волновыми характеристиками частицы, которая совсем не зависит от физической природы величины Ψ. Будем руководствоваться требованием, чтобы эта связь была релятивистски инвариантна. Корпускулярные свойства частицы характеризуются ее энергией $\mathscr{E}$ и импульсом $\mathbf{p}$, волновые — частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$. Под $\mathscr{E}$ мы будем понимать *полную энергию* частицы в смысле теории относительности. Она определяется однозначно требованием, чтобы *энергия и импульс образовывали четырехмерный вектор* $(\mathscr{E}/c, \mathbf{p})$ (см. т. IV, § 111, п. 3). Частоту ω определим из требования, чтобы фаза волны $\omega t - \mathbf{kr}$ была релятивистски инвариантна (см. по этому поводу § 19, п. 9). Тогда ω и $\mathbf{k}$ будут образовывать четырехмерный вектор $(\omega/c, \mathbf{k})$. Если потребовать, чтобы временные и пространственные компоненты четырехмерных векторов $(\mathscr{E}/c, \mathbf{p})$ и $(\omega/c, \mathbf{k})$ были пропорциональны друг другу, то получатся релятивистски инвариантные соотношения

$$\mathscr{E} = \hbar\omega, \tag{17.2}$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \tag{17.3}$$

Они будут совпадать с соответствующими соотношениями для фотонов, если для всех частиц $\hbar$ положить равной постоянной Планка, что мы и сделаем. Такой выбор $\hbar$ логически не необходим, а оправдывается последующими результатами. Соотношения (17.2) и (17.3) и были постулированы де Бройлем.

Во всякой инерциальной системе отсчета волновой вектор $\mathbf{k}$ определен абсолютно однозначно, поскольку соотношением (17.3) он однозначно выражается через импульс частицы $\mathbf{p} = mv$. Напротив, соотношение (17.2) такой абсолютной однозначностью не отличается. Здесь однозначность навязана искусственно — требованием, чтобы $\mathscr{E}$ и ω были временными компонентами четырехмерных векторов. В принципе же энергия определена всегда с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Мы увидим далее (см. § 19), что и частоту ω можно переопределить так, чтобы она также содержала аддитивную постоянную.

---

[1] В оптике монохроматическая волна записывалась в виде $e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}$. Сейчас мы употребляем комплексно сопряженное выражение $e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$. Оба способа написания совершенно равноправны. Но в квантовой механике укоренилось написание волны именно в форме (17.1). Однако независимо от способа написания под фазой волны следует понимать выражение $\omega t - \mathbf{kr}$.

3. Рассмотрим некоторые свойства волн де Бройля, вытекающие из соотношений (17.2) и (17.3). Прежде всего из (17.3) получаем выражение для длины волны де Бройля:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p}. \tag{17.4}$$

Эта величина в каждой инерциальной системе отсчета определена однозначно.

Для фазовой скорости волн де Бройля формулы (17.2) и (17.3) дают

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\mathscr{E}}{p}. \tag{17.5}$$

В релятивистской теории $\mathscr{E} = mc^2$, $p = mv$, где v — скорость частицы, а m — релятивистская масса. В этом случае

$$v_{\text{ф}} = \frac{c^2}{v}. \tag{17.6}$$

Поскольку всегда $v \leqslant c$, отсюда следует, что $v_{\text{ф}} \geqslant c$. Для фотонов в вакууме $v = c$, а потому в этом случае $v_{\text{ф}} = c$. Полученный результат не должен нас смущать, поскольку на величину фазовой скорости не накладывается никаких ограничений. К тому же в дальнейшем будет показано, что, согласно современной физической интерпретации, фазовая скорость волн де Бройля имеет чисто символическое значение, так как эта интерпретация относит ее к числу принципиально ненаблюдаемых величин.

Принципиально наблюдаемой величиной является групповая скорость волн де Бройля

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\mathscr{E}}{dp}. \tag{17.7}$$

Эта величина не содержит никакой неопределенности, поскольку не только dp, но и приращение энергии $d\mathscr{E}$ определены однозначно. При любой скорости движения частицы $d\mathscr{E} = v\,dp$, так что всегда

$$v_{\text{гр}} = v, \tag{17.8}$$

т. е. групповая скорость волн де Бройля равна скорости частицы. Заменив теперь в формуле (17.6) v на $v_{\text{гр}}$, получаем

$$v_{\text{ф}} v_{\text{гр}} = c^2. \tag{17.9}$$

Формально можно образовать величину, аналогичную длине волны де Бройля (17.4). Для этого заметим, что длина четырехмерного вектора энергии-импульса частицы в пространстве Минковского равна $\sqrt{(\mathscr{E}/c)^2 - p^2}$. Это есть инвариант, равный $m_0 c$, где m_0 — масса покоя частицы. Поделив на него постоянную Планка h, получим инвариантную величину

$$\lambda_{\text{К}} = \frac{h}{m_0 c}, \tag{17.10}$$

имеющую размерность длины. Она представляет собой комптоновскую длину частицы. Таким образом, формально $\lambda_{\text{К}}$ можно рассматривать

как длину волны де Бройля, которой соответствует величина импульса, равная инвариантной длине четырехмерного вектора энергии-импульса частицы в пространстве Минковского.

4. Де Бройль использовал представление о фазовых волнах для наглядного толкования таинственного правила квантования Бора (13.6) в случае одноэлектронного атома. Он рассмотрел фазовую волну, бегущую вокруг ядра по круговой орбите электрона. Если на орбите длина волны λ укладывается целое число раз (рис. 27), то волна при обходе вокруг ядра будет всякий раз возвращаться в исходную точку с той же фазой и амплитудой. В каждой точке орбиты установится неизменный колебательный режим во времени и не возникнет излучения. В этом случае орбита получится стационарной. Если же указанное условие не выполняется, то при обходе вокруг ядра фаза и амплитуда волны не возвратятся к своим исходным значениям — стационарного состояния не получится. Исходя из этих соображений, де Бройль записал условие стационарности орбиты, или правило квантования, в виде

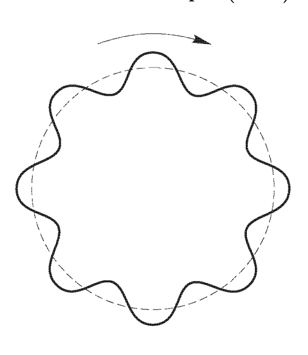


Рис. 27

$$\frac{2\pi R}{\lambda} = n, \tag{17.11}$$

где R — радиус круговой орбиты, а n — целое число (главное квантовое число). Полагая здесь $\lambda = h/p = 2\pi\hbar/p$ и замечая, что $L = Rp$ есть момент количества движения электрона, получим

$$L = n\hbar, \tag{17.12}$$

что совпадает с условием (13.6). В этом де Бройль видел успех своей концепции фазовых волн. В дальнейшем условие (17.11) удалось обобщить и на случай эллиптических орбит, когда длина волны λ меняется вдоль траектории электрона. Казалось, что это еще больше усиливало успех теории.

На самом деле этот успех призрачный. В рассуждении де Бройля предполагается, что волна распространяется не в пространстве, а вдоль линии — вдоль стационарной орбиты электрона. Такая идеализация соответствует приближению геометрической (лучевой) оптики. Этим приближением можно пользоваться в предельном случае, когда длина волны λ пренебрежимо мала по сравнению с радиусом орбиты электрона, т. е. при больших квантовых числах. А тогда проблема квантования несущественна. Чтобы действительно получить существенно новое, надо заменить геометрическую оптику волновой. Это и было сделано Шредингером.

5. К полученным результатам можно прийти и другим путем. Для этого введем *показатель преломления* μ волн де Бройля — важную

величину, имеющую и самостоятельное значение. Пространство, в котором распространяется волна де Бройля, условимся называть *средой*. Если в среде нет силового поля, то среда будет однородной. Показатель преломления среды может быть определен лишь с точностью до произвольного постоянного множителя, так как для преломления фазовых волн на границе раздела двух сред имеет значение только отношение показателей преломления этих сред. Во всякой волновой теории μ обратно пропорционален фазовой скорости волны. В случае волн де Бройля $\mu \sim 1/v_{\text{фаз}} = v/c^2$. Опуская постоянный множитель, можно принять

$$\mu = v. \tag{17.13}$$

Определяемый этой формулой показатель преломления условно будем называть *абсолютным*. Формула (17.13) сохраняет смысл и в том случае, когда скорость частицы v меняется от точки к точке, т. е. при наличии силовых полей. Скорость v, а с ней и μ в каждой точке однозначно определяются уравнением энергии $\mathscr{E} + U = \text{const}$, в котором предполагается, что потенциальная функция U зависит только от координат, но не зависит явно от времени.

В предельном случае коротких длин волн распространение последних происходит вдоль независимых линий или *лучей* (см. т. IV, § 6). Этот случай называется *геометрической* или *лучевой оптикой*. Распространение волнового возмущения вдоль лучей формально аналогично движению частицы классической механики по траекториям. Радиус кривизны R луча или траектории частицы определяется формулой

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial}{\partial N}(\ln \mu) = \frac{\partial}{\partial N}(\ln v), \tag{17.14}$$

где дифференцирование производится в направлении главной нормали $\mathbf{N}$ к лучу или траектории (см. т. IV, § 4). Эта формула, конечно, может быть использована (вместо уравнений Ньютона) для определения формы луча или траектории частицы.

Вернемся теперь к выводу правила квантования, данному де Бройлем. Условие применимости геометрической оптики к движению электрона вокруг ядра атома выражается формулой

$$\left|\lambda \frac{d\mu}{dr}\right| \ll \mu, \quad \text{т. е.} \quad \left|\lambda \frac{dv}{dr}\right| \ll v.$$

Подставив сюда $\lambda = 2\pi\hbar/p$, $\mu = v$ и ограничиваясь нерелятивистским приближением, запишем это так:

$$\left|2\pi\hbar \frac{dv}{dr}\right| \ll pv = 2K, \tag{17.14a}$$

где K — кинетическая энергия электрона. Скорость v найдется из уравнения энергии

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{r} = \mathscr{E} = \text{const}.$$

Отсюда находим

$$mvr\frac{dv}{dr} = -\frac{Ze^2}{r} = U,$$

где U — потенциальная энергия. Если электрон движется по окружности, то $mvr = n\hbar$, а потому

$$n\hbar\frac{dv}{dr} = U = \mathcal{E} - K = -2K,$$

так как при движении по окружности $\mathcal{E} + K = 0$. Сопоставляя полученное соотношение с неравенством (17.14а), находим

$$n \gg 2\pi,$$

т. е. квантовое число n должно быть большим в согласии с тем, что было установлено выше.

6. Все изложенное представляет собой чисто умозрительное, гипотетическое построение, а потому не имеет доказательной силы. Истинное доказательство или опровержение полученных результатов может дать только опыт. В каких же явлениях природы могут проявиться волновые свойства вещества, если они действительно существуют? Независимо от физической природы волн сюда относятся явления интерференции и дифракции. Непосредственно наблюдаемой величиной в них является длина волны λ. Во всех случаях длины волн де Бройля определяются формулой (17.4). Применим ее к нерелятивистскому движению частиц.

Для электронов, ускоренных разностью потенциалов V, импульс определяется формулой $p = \sqrt{2m_e eV}$, так что в абсолютной системе единиц

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV}}. \tag{17.15}$$

Положим здесь $hc = 1{,}2399 \cdot 10^{-4}$ эВ · см, $m_e c^2 = 511\,003$ эВ. Тогда получится практическая формула

$$\lambda_e = \sqrt{\frac{150{,}42}{V_{(\text{В})}}} \cdot 10^{-8}\ \text{см} = \frac{1{,}2264}{\sqrt{v_{(\text{В})}}}\ \text{нм}. \tag{17.16}$$

Для протонов

$$\lambda_p = \frac{0{,}02862}{\sqrt{v_{(\text{В})}}}\ \text{нм}. \tag{17.17}$$

Вычислим еще длину волны де Бройля для молекул неподвижного газа при абсолютной температуре T. Задача эта — не совсем определенная, поскольку молекулы движутся с тепловыми скоростями, распределенными по закону Максвелла. Не вдаваясь в обоснование (см. задачу к следующему параграфу), будем понимать под v среднюю квадратичную скорость молекулы. Тогда ее импульс будет $p = \sqrt{3mkT}$. Отсюда легко получить для атомов гелия ($m_{\text{He}} = 6{,}7 \cdot 10^{-24}$ г)

$$\lambda_{\text{He}} = \frac{1{,}26}{\sqrt{T}}\ \text{нм}. \tag{17.18}$$

Для молекул водорода

$$\lambda_{\mathrm{H}_2} = \frac{1{,}78}{\sqrt{T}}\ \text{нм}. \tag{17.19}$$

а для тепловых нейтронов

$$\lambda_{\mathrm{n}} = \frac{2{,}52}{\sqrt{T}}\ \text{нм}. \tag{17.20}$$

Эти формулы показывают, что для электронов, ускоренных до потенциала 100–10 000 В, для атомов гелия и молекул водорода при комнатной температуре, а также для тепловых нейтронов и других «медленных» легких частиц длины волн де Бройля того же порядка, что и длины волн мягких рентгеновских лучей. Поэтому дифракцию таких частиц надо пытаться искать методами, аналогичными тем, которые применяются в случае рентгеновских лучей. Однако гипотеза де Бройля представлялась настолько фантастичной, что сравнительно долго никто из экспериментаторов не пытался подвергнуть ее экспериментальной проверке.

ЗАДАЧИ

1. Обобщить нерелятивистские формулы (17.15), (17.16) и (17.17) на случай релятивистских электронов и протонов. При каком значении ускоряющего потенциала V можно пользоваться нерелятивистскими формулами, чтобы ошибка не превосходила одного процента?

Ответ.

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0eV}}\left(1+\frac{eV}{2m_0c^2}\right)^{-1/2}, \tag{17.15a}$$

где m_0 — масса покоя частицы. Для электронов

$$\lambda_{\mathrm{e}} = \frac{1{,}2264}{\sqrt{v_{(\mathrm{B})}}}\left(1+0{,}978\cdot 10^{-6}V_{(\mathrm{B})}\right)^{-1/2}\ \text{нм}, \tag{17.16a}$$

для протонов

$$\lambda_{\mathrm{p}} = \frac{0{,}02862}{\sqrt{v_{(\mathrm{B})}}}\left(1+0{,}533\cdot 10^{-9}V_{(\mathrm{B})}\right)^{-1/2}\ \text{нм}. \tag{17.17a}$$

Нерелятивистскими формулами при указанной точности расчета можно пользоваться для электронов при $V \lesssim 20$ кэВ, для протонов при $V \lesssim 40$ МэВ.

2. Найти приближенное выражение для длины волны де Бройля ультрарелятивистской частицы, т. е. такой частицы, кинетическая энергия $\mathscr{E}_{\text{кин}}$ которой много больше энергии покоя m_0c^2. При каких значениях $\mathscr{E}_{\text{кин}}$ полученная формула будет давать ошибку, не превосходящую 1 %? Найти λ для ультрарелятивистской частицы с кинетической энергией $\mathscr{E}_{\text{кин}} = 10$ ГэВ.

Ответ. $\lambda = hc/\mathscr{E}_{\text{кин}}$. При $\mathscr{E}_{\text{кин}} > 100\ m_0c^2$ ошибка не превосходит 1 %. При $\mathscr{E}_{\text{кин}} = 10$ ГэВ $\lambda = 1{,}25\cdot 10^{-14}$ см.

3. При какой скорости частицы ее дебройлевская и комптоновская длины волн равны между собой?

Ответ. $v = c/\sqrt{2}$.

§ 18. Экспериментальные подтверждения гипотезы де Бройля

1. Интерференция электронов при отражении от кристаллов была обнаружена, но не понята еще до появления гипотезы де Бройля. Производя опыты по рассеянию электронов тонкими металлическими фольгами в 1921–1923 гг., Дэвиссон (1881–1958) и Кэнсман наблюдали определенно выраженную зависимость интенсивности рассеянного пучка от угла рассеяния. Положение и величина получающихся максимумов на кривой рассеяния существенно зависели от скорости электронов. В одном из опытов, в котором электроны рассеивались никелевой пластинкой, стеклянный прибор лопнул и пластинка окислилась. После длительного прокаливания пластинки в вакууме и атмосфере водорода произошла перекристаллизация с образованием некоторого количества крупных кристаллов. При повторении опыта по рассеянию электронов с этой пластинкой кривая рассеяния резко изменилась: количество максимумов сильно возросло, а сами максимумы сделались значительно более отчетливыми. На рис. 28 приведены полярные диаграммы рассеяния электронов до прокаливания пластинки (*а*) и после прокаливания (*б*). На этих диаграммах вдоль радиусов-векторов отложены отрезки, пропорциональные интенсивности рассеяния электронов в соответствующих направлениях.

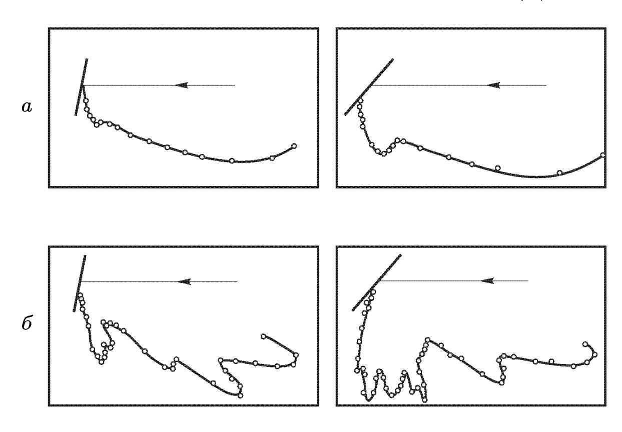


Рис. 28

Происхождение максимумов и минимумов на кривых рассеяния долгое время оставалось непонятным, пока их не истолковали как результат интерференционного отражения волн де Бройля от соответствующих атомных плоскостей крупных кристаллов, образовавшихся в результате перекристаллизации. Это истолкование было подтверждено в 1927 г. опытами Дэвиссона и Джермера (1896–1971). На этих опытах была открыта дифракция электронов. С них началось систематическое исследование этого явления.

2. В опытах Дэвиссона и Джермера прежде всего использовался *метод Л. Брэгга* (1890–1971), но применительно не к рентгеновским лучам, а к волнам де Бройля. Параллельный пучок электронов одинаковой скорости, создаваемый «электронной пушкой» A (рис. 29), направлялся на монокристалл никеля. Рассеянные электроны улавлива-

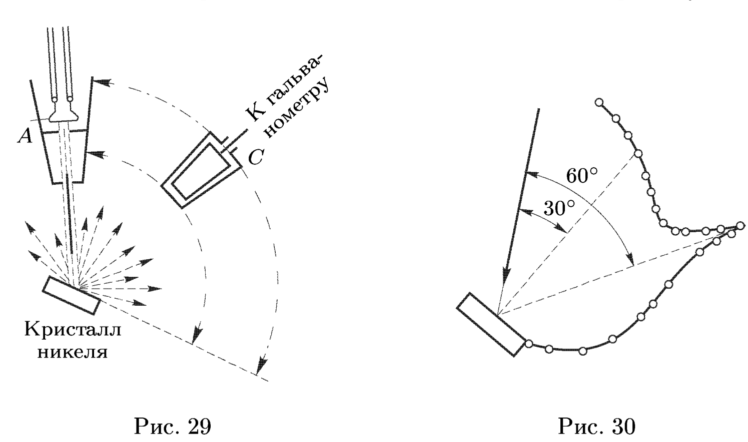


Рис. 29 Рис. 30

лись коллектором C, соединенным с гальванометром. Коллектор можно было устанавливать под любым углом к направлению падающего пучка, вращая его все время в одной плоскости (плоскости рисунка). По показанию гальванометра можно было судить об интенсивности пучков электронов, рассеянных в различных направлениях. Типичная полярная диаграмма интенсивности рассеяния электронов представлена на рис. 30. На ней имеется резко выраженный максимум, соответствующий зеркальному отражению электронов, когда угол падения равен углу отражения. Тот же опыт, повторенный с поликристаллической пластинкой никеля, состоящей из множества мельчайших беспорядочно ориентированных кристалликов, не обнаружил никакого преимущественного направления при отражении электронов.

В опытах Дэвиссона и Джермера гипотеза де Бройля была подвергнута и количественной проверке. Как известно, отражение рентгеновских лучей от кристаллов носит *интерференционный характер* (см. т. IV, § 61). От различных параллельных атомных плоскостей кристалла исходят волны, как бы испытавшие зеркальное отражение на каждой из этих плоскостей. Если выполнено условие Брэгга–Вульфа

$$2d \sin\varphi = m\lambda, \tag{18.1}$$

где φ — угол скольжения, d — межплоскостное расстояние, $m = 1, 2, 3, \ldots$, то эти волны при интерференции усиливают друг друга. В результате и возникает отраженная волна. Необходимым условием такой трактовки отражения является выполнение неравенства $m\lambda/(2d) < 1$, т. е. малость длины волны. Такое условие выполняется и в случае волн де Бройля при ускоряющем напряжении в десятки и сотни вольт. Поэтому, даже не зная детально самого механизма отражения

волн де Бройля, можно ожидать, что оно также интерференционное, и по этой причине условие (18.1) должно выполняться и для волн де Бройля [1]).

В случае монохроматических рентгеновских лучей длину волны λ во время опыта сохраняют постоянной. На опыте меняют угол скольжения φ и замечают, при каком значении φ наступает интерференционное отражение. В случае волн де Бройля значительно удобнее во время опыта угол φ сохранять неизменным, добиваясь интерференционного отражения путем изменения ускоряющего напряжения, т. е. длины дебройлевской волны λ. Так и поступили экспериментаторы.

По теории максимумы отражения должны появиться только при тех значениях λ, которые получаются по формуле (18.1) при целых значениях m. Подставляя в эту формулу значение λ из (17.16), получим для нерелятивистских электронов

$$\sqrt{V} = \frac{1{,}226}{2d\sin\varphi}. \tag{18.2}$$

Здесь V выражено в вольтах, а d — в нанометрах. На рис. 31 приведена кривая, полученная в опытах Дэвиссона и Джермера с монокристаллом никеля при $\varphi = 80°$, $d = 0{,}203$ нм. По оси абсцисс отложено

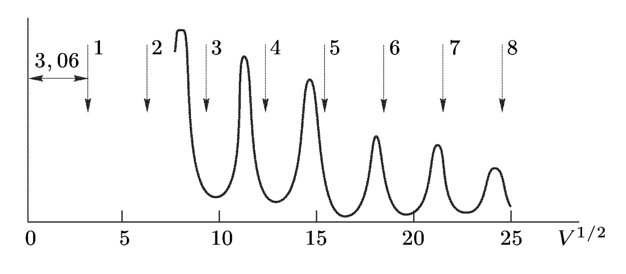


Рис. 31

значение $\sqrt{V}$, а по оси ординат — относительная интенсивность отражения. На том же рисунке стрелками показано положение максимумов, найденное по формуле (18.2). Ожидалось, что максимумы должны быть равноотстоящими, а расстояние между ними должно составлять 3,06 $В^{1/2}$. Все это подтвердилось на опыте, но только при больших значениях m ($m = 6, 7, 8$). При малых m получились систематические отступления от формулы (18.2).

3. Причина указанного расхождения была выяснена Бете (р. 1906), который показал, что электронным волнам де Бройля в кристалле надо

[1]) В сущности, отражение и рассеяние длинных волн (длина волны которых велика по сравнению с межмолекулярными и межатомными расстояниями) также можно рассматривать как интерференционное. Роль атомных плоскостей в этих случаях играют какие-то параллельные и равноотстоящие слои. Но эти слои являются макроскопическими (см. т. IV, § 66, 99), а не моноатомными.

приписать показатель преломления, больший показателя преломления их в вакууме. В самом деле, положительно заряженные ионы кристаллической решетки металла и отрицательные электроны между ними пространственно не совпадают. Поэтому в металле существует электрическое поле, потенциал которого периодически меняется от точки к точке. При грубом рассмотрении его можно заменить постоянным потенциалом V_0, который получается из истинного потенциала путем усреднения его по пространству. Такой усредненный потенциал V_0 называется *внутренним потенциалом* металла. Если потенциал внешнего пространства принять равным нулю, то величина V_0 должна быть положительна, чтобы электроны могли удерживаться внутри металла. Действительно, в этом случае потенциальная энергия электрона внутри металла будет отрицательной — электрон как бы будет находиться в потенциальной яме постоянной глубины V_0, на стенках которой потенциал скачкообразно меняется от нуля снаружи до постоянного значения V_0. Наличием внутреннего потенциала металла и можно объяснить увеличение показателя преломления при переходе из вакуума в металл.

Действительно, пусть наружный электрон падает на металл. Если он прошел ускоряющий потенциал V, то его скорость будет $v_1 \sim \sim \sqrt{V}$. В металле скорость этого электрона возрастет до $v_2 \sim \sqrt{V+V_0}$. Поэтому при входе в металл траектория электрона и связанная с ним волна де Бройля должны испытать преломление. Согласно (17.13) относительный показатель преломления металла для этого процесса будет

$$\mu_{21} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1+\frac{V_0}{V}}. \tag{18.3}$$

Индекс 21 ради краткости опустим, т. е. будем пользоваться здесь обозначением $\mu \equiv \mu_{21}$ (не путать с «абсолютным» показателем преломления).

С учетом преломления электронных волн де Бройля условие Брэгга–Вульфа (18.1) следует писать в виде

$$2d\mu\cos\psi = m\lambda \tag{18.4}$$

(см. т. IV, § 33, 61; потеря полуволны при отражении здесь не возникает). Под φ здесь понимается угол преломления, тогда как φ означает угол скольжения (а не падения). Поэтому закон преломления следует писать в виде

$$\frac{\cos\varphi}{\sin\psi} = \mu.$$

Из него находим $\cos\psi = (1/\mu)\sqrt{\mu^2-\cos^2\varphi}$. Таким образом, условие Брэгга–Вульфа принимает вид

$$2d\sqrt{\mu^2-\cos^2\varphi} = m\lambda. \tag{18.5}$$

Правильность приведенного объяснения подтверждается расчетами. На опыте при фиксированном угле φ измеряются значения ускоряющего потенциала V, при которых получаются брэгговские максимумы различных порядков (m =3, 4, 5). По формуле (17.16) вычисляются соответствующие им длины волн де Бройля. Затем по формуле (18.5) находят показатели преломления μ. Наконец, по формуле (18.3) определяют внутренний потенциал V_0 металла. Оказалось, что в пределах ошибок измерений V_0 зависит только от природы металла, но не зависит от порядка отражения m (т. е. от V) и от угла φ. Так и должно быть, если только объяснение, данное выше, правильное. Для никеля, например, $V_0 \approx$ 15 В. Такого же порядка внутренние потенциалы и для других металлов. Впрочем, для объяснения ряда явлений заменять истинный потенциал в металле усредненным недостаточно. Надо принять во внимание, что истинный потенциал периодически меняется в пространстве. На этой основе построена так называемая *динамическая теория интерференции волн де Бройля*, созданная также Бете в 1928 г.

4. Метод, с помощью которого были получены приведенные результаты, мы назвали *методом Брэгга.* Исследование дифракции рентгеновских лучей производится также двумя другими главными методами: *методом Лауэ* (1879–1960) и *методом Дебая–Шерера–Хелла* (см. т. IV, § 61). Такие же методы можно применять и для исследования дифракции волн де Бройля. Дэвиссон и Джермер в 1927 г. применяли метод Лауэ. В методе Лауэ узкий пучок рентгеновских лучей пропускается через монокристалл. Дифрагированные лучи попадают на фотопластинку и фиксируются на ней в виде системы симметрично расположенных пятен. Спектр рентгеновских лучей, как было выяснено в т. IV, § 61, должен быть *обязательно сплошным.* При изучении дифракции электронов по методу Лауэ надо было бы экспериментировать с пучками электронов с непрерывным разбросом скоростей, что практически невозможно. Скорости электронов, выходящих из электронной пушки, одинаковы или, точнее, непрерывно распределены в узких пределах. Условия Лауэ (разумеется, исправленные с учетом показателя преломления электронных волн де Бройля) для пучка электронов определенной скорости, вообще говоря, не выполняются и интерференция не возникает. Поэтому для получения дифракционных максимумов приходится шаг за шагом *непрерывно менять скорость электронов* (путем изменения ускоряющего потенциала, наложенного на пушку) и одновременно положение коллектора.

5. В опыте Дэвиссона и Джермера использовался монокристалл никеля (кристалл кубической системы), сошлифованный вдоль плоскости с миллеровскими индексами (111) (см. т. II, § 135). Перпендикулярно к сошлифованной плоскости в вакууме падал пучок электронов, испускаемый электронной пушкой (рис. 32). Для улавливания рассеянных электронов применялся двойной цилиндр Фарадея с надежной кварцевой изоляцией между наружным и внутренним цилиндрами. Внутренний цилиндр был соединен с чувствительным гальванометром. Чтобы устранить неупруго рассеянные электроны, потерявшие при рассеянии

значительную часть своей энергии, на внешний цилиндр накладывался задерживающий (отрицательный) потенциал, величина которого была в десять раз меньше ускоряющего потенциала. В результате приемника могли достигать только электроны, отразившиеся упруго, а именно такие, у которых скорость при отражении уменьшилась не более чем на 10 %. Исследовалось количество рассеянных электронов в зависимости от 1) угла рассеяния; 2) скорости электронов в пучке; 3) азимута, т. е. угла поворота кристалла вокруг оси, перпендикулярной к рассеивающей плоскости.

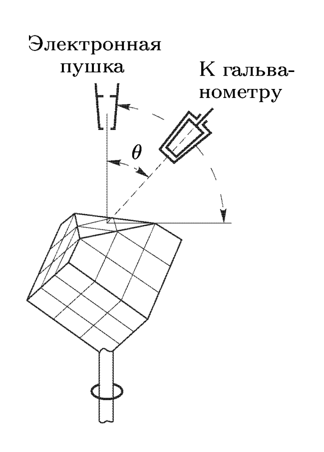


Рис. 32

На рис. 33 приведена полярная диаграмма, определяющая зависимость числа рассеянных электронов от угла рассеяния θ при том положении кристалла, которое соответствует рис. 32. В этом положении сошлифованная поверхность кристалла покрыта правильными рядами атомов, перпендикулярными к плоскости падения (плоскости рисунка), расстояние между которыми равно $d = 0{,}215$ нм. Коллектор мог поворачиваться, оставаясь все время в плоскости падения. Менялся также ускоряющий потенциал. При угле $\theta = 50°$ и различных ускоряющих напряжениях наблюдался максимум, но своего полного развития он достигал при ускоряющем напряжении 54 В ($\lambda = 0{,}167$ нм). Его можно истолковать как дифракционный максимум первого порядка от плоской дифракционной

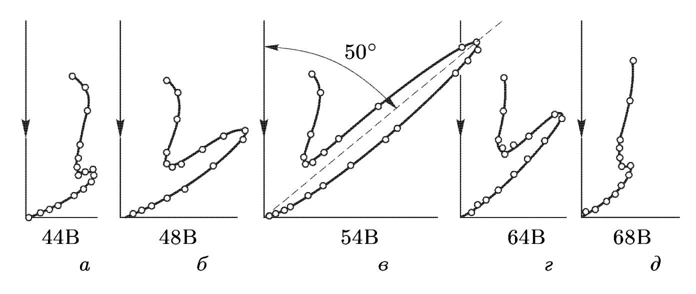


Рис. 33

решетки с периодом $d = 0{,}215$ нм. В самом деле, вычисление угла θ по формуле $d\sin\theta = \lambda$ приводит к результату $\theta = 51°$, что хорошо согласуется с экспериментом.

На опыте производились также измерения числа рассеянных электронов при неизменном положении коллектора и постоянстве угла θ, но при различных азимутах кристалла. Иначе говоря, кристалл мог поворачиваться вокруг оси, перпендикулярной к сошлифованной плоскости. Результаты таких измерений изображены графически на рис. 34

для углов $\theta = 44^\circ$ и $\theta = 50^\circ$ и соответствующих им ускоряющих напряжений. Большая часть максимумов на этих рисунках отвечает пространственной интерференции, т. е. взаимной интерференции волн, рассеянных атомами пространственной решетки кристалла. При повороте кристалла на 360° кривые трижды повторяются. Это связано с тем, что перпендикуляр к отражающей плоскости (111) является по-

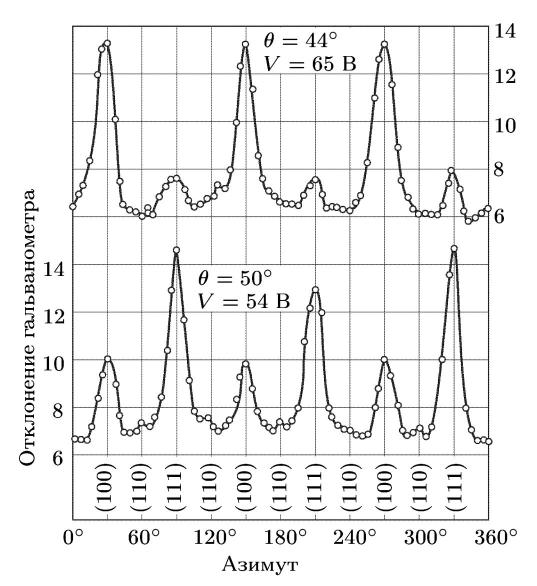


Рис. 34

воротной осью кристалла третьего порядка. Для полного количественного согласия с теорией необходимо было учесть показатель преломления кристалла. Небольшое число максимумов соответствует интерференционному усилению волн, рассеянных атомами, адсорбированными в поверхностном слое кристалла. Этим объясняется, почему на нижней половине рис. 34 из трех больших максимумов средний несколько ниже двух крайних.

6. Исследование дифракции электронов методом Дебая–Шерера–Хелла производилось, начиная с 1928 г., Д. П. Томсоном (1892–1975), П. С. Тартаковским (1895–1939) и некоторыми другими физиками. Томсон пропускал тонкий монохроматический пучок быстрых электронов (ускоряющий потенциал от 17,5 до 56,5 кВ, соответствующие длины волн, вычисленные по релятивистской формуле (17.16а), от 0,092 до 0,052 нм) сквозь поликристаллическую фольгу толщиной $\sim 10^{-5}$ см. (Использование быстрых электронов связано с тем, что более медленные электроны сильно поглощаются фольгой.) На фотопластинке, поставленной за фольгой, получилось центральное пятно, окруженное дифракционными кольцами. На рис. 35 воспроизведена дифракционная картина, полученная описанным методом с золотой фольгой.

Очень простым опытом Томсон показал, что дифракционная картина образовывалась самими рассеянными электронами, а не вторичными рентгеновскими лучами, возбуждаемыми ими: при включении маг-

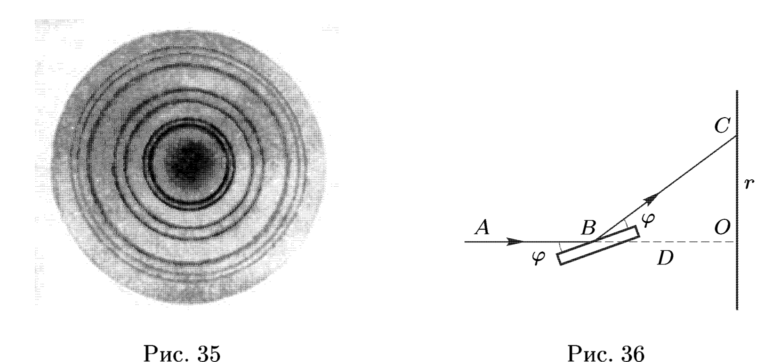


Рис. 35 Рис. 36

нитного поля вся дифракционная картина смещалась и искажалась. Этого, конечно, не должно было бы быть, если бы картина возникала в результате дифракции рентгеновских лучей.

Происхождение дифракционных колец в случае электронной дифракции — такое же, как и в случае дифракции рентгеновских лучей (см. т. IV, § 61). Поликристаллическая фольга, пронизываемая электронным лучом, состоит из множества мельчайших ($\sim 10^{-6}$ см) беспорядочно ориентированных кристалликов. Как уже указывалось выше, электронный луч в методе Дебая–Шерера–Хелла должен быть монохроматическим. Но при фиксированной длине волны λ среди множества кристалликов найдутся такие, при отражении от которых выполняется условие Брэгга–Вульфа $2d\sin\varphi = m\lambda$ (рис. 36), где φ — угол скольжения, а d — межплоскостное расстояние. (Ради простоты мы отвлеклись от усложнения, связанного с преломлением электронных лучей. Это обстоятельство легко учесть.) Статистически совокупность таких кристалликов обладает симметрией вращения вокруг направления падающего луча ABO. Поэтому точки C на фотопластинке, куда попадают соответствующие лучи и вызывают их почернение, должны располагаться вдоль колец с центром в O. Найдем связь между радиусом кольца r и длиной волны λ. При малых углах скольжения

$$\sin\varphi \approx \varphi = \frac{m\lambda}{2d} = \frac{r}{2D},$$

где D — расстояние от фольги до фотопластинки. Таким образом, должно выполняться соотношение

$$\frac{r}{\lambda} = \text{const}. \qquad (18.6)$$

Оно будет справедливо и при учете преломления. Если воспользоваться формулой (17.16) (для медленных электронов) или (17.16а) (для быст-

рых электронов), то (18.6) преобразуется в соотношения между r и V. Такие соотношения подтвердились на опыте.

Другое количественное доказательство дифракции электронов в кристаллах получится, если сравнить электронограмму кристалла с рентгенограммой того же кристалла. С их помощью можно вычислить постоянную кристаллической решетки. Оказалось, что эти различные методы приводят к одинаковым значениям.

Аналогичные исследования дифракции электронов по методу Дебая–Шерера–Хелла производились П. С. Тартаковским. Он пользовался менее быстрыми электронами (ускоряющий потенциал до 1700 В, $\lambda > 0{,}297$ нм) и алюминиевой фольгой. Исследования велись при постоянном угле рассеяния. При изменении скорости электронов наблюдался ряд максимумов, для которых выполнялось условие Брэгга–Вульфа.

7. Дифракция электронов наблюдалась также на отдельных атомах и молекулах. Не останавливаясь подробно на этом вопросе, ограничимся замечанием, что еще в 1920 г. Рамзауэр (1879–1955) открыл явление, названное его именем. Оно состоит в аномальном увеличении проницаемости некоторых газов для весьма медленных электронов. Иными словами, полное эффективное сечение атома (см. § 9, а также т. II, § 87) по отношению к проходящему через газ пучку электронов становится аномально малым при уменьшении их скорости. Явление особенно отчетливо выражено для благородных газов: аргона, криптона и ксенона. С классической точки зрения (см. § 9) эффективное сечение атома должно было бы монотонно падать с увеличением скорости электронов. Напротив, опыт показывает, что для аргона, криптона и ксенона оно имеет глубокий минимум при ускоряющем напряжении $\approx 0{,}6$ В. По обе стороны от указанного минимума эффективное сечение резко возрастает, достигая максимума при 6 (ксенон), 11 (криптон) и 13 В (аргон). Это объясняется интерференционными ослаблениями и усилениями волн де Бройля при прохождении их через электрическое поле внутри атома. Грубо говоря, влияние такого поля сводится к действию неоднородной среды, показатель преломления которой внутри атома непрерывно меняется от точки к точке.

8. До сих пор говорилось о дифракции электронов. Атомы и молекулы также претерпевают дифракцию. Как показал Штерн (1888–1969), для тяжелых атомов, когда длина волны де Бройля $\lambda = h/mv$ очень мала, дифракционная картина либо совсем не получается, либо получается весьма расплывчатой. Но для легких атомов и молекул (H_2, He) наблюдаются весьма четкие дифракционные картины, с большой точностью подчиняющиеся формуле $\lambda = h/mv$. Как видно из формул (17.18) и (17.19), для молекул водорода и атомов гелия средняя длина волны при комнатной температуре порядка 0,1 нм, т. е. того же порядка, что и постоянная кристаллической решетки. Однако эти частицы обладают тепловым разбросом скоростей. Для получения четкой дифракционной картины их предварительно необходимо монохроматизировать. Подходящий селектор скоростей молекул схематически изображен на рис. 37.

Это два диска, насаженные на общую ось, с одинаковыми, но повернутыми одна относительно другой щелями. Диски могут приводиться во вращение вокруг этой оси. На диски направляется пучок атомов или молекул параллельно оси вращения. Селектор в принципе работает так же, как зубчатое колесо в известном методе Физо (1819–1896) измерения скорости света. В отношении дифракционных картин, получаемых с атомарными и молекулярными пучками, заметим, что эти пучки не могут проникать в глубь кристаллов. Кристаллы действуют на них как плоские двумерные отражательные решетки. На рис. 38 приведена картина дифракции атомов гелия от кристалла фтористого лития, т. е. угловое распределение дифрагированных атомов.

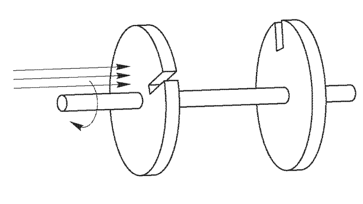


Рис. 37

9. Остановимся еще кратко на *дифракции нейтронов.* Нейтрон — нейтральная элементарная частица, масса которой почти точно равна массе протона. Благодаря отсутствию электрического заряда он взаимодействует только с ядрами атомов — посредством ядерных сил. На электроны атомных оболочек, а следовательно и на фотопластинку,

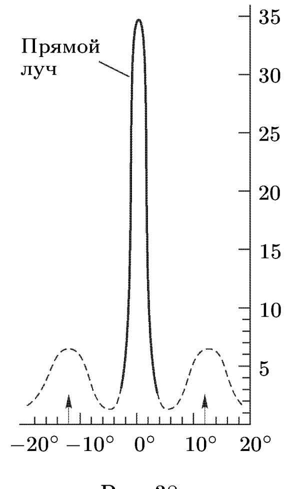


Рис. 38

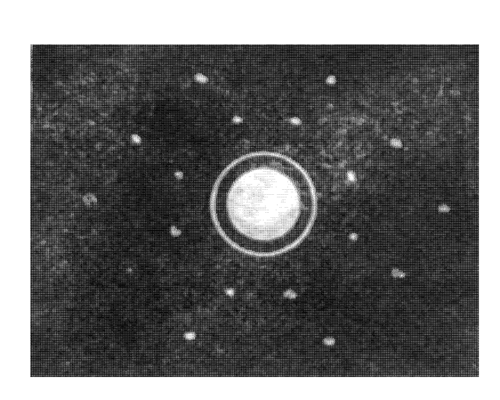


Рис. 39

нейтрон не действует. Чтобы тем не менее применить фотопластинку, фотослой покрывают индиевой фольгой, в которой в местах попадания нейтронов происходят ядерные реакции с выделением электронов и γ-квантов, действующих на фотоэмульсию. Для получения дифракционной картины (нейтронограммы) по методу Лауэ «белый» пучок тепловых нейтронов от ядерного реактора направляют на крупный монокристалл, в котором и дифрагируют нейтроны.

На рис. 39 приведена нейтронограмма, полученная при прохождении пучка нейтронов через монокристалл NaCl. Помимо центрального пятна, получилась система симметрично расположенных пятен, соответствующая поворотной оси четвертого порядка кристалла NaCl. Привлекает внимание изолированность пятен. Это, как было выяснено в т. IV, § 61, связано с тем, что фотопластинка поставлена не в фраунгоферовой области дифракции, а близко от кристалла — *в области применимости геометрической оптики*, — но все же достаточно далеко, чтобы отдельные пучки, на которые разделяется в кристалле падающая волна, уже успели разойтись.

Резюмируя, можно сказать, что волновые свойства частиц не только доказаны экспериментально, но и получили обширные научно-технические применения (электронография, нейтронография и пр.).

ЗАДАЧА

На селектор скоростей (рис. 37) из печи направлен пучок атомов или молекул, скорости которых в печи распределены по закону Максвелла. Селектор выделяет пучок частиц, абсолютные скорости которых заключены в интервале $v, v + dv$ постоянной ширины dv. При каком значении v (выделяемом скоростью вращения дисков) через селектор пройдет максимальное число частиц?

Ответ. $v^2 = (3/2)kT/m$, т. е. v должно быть средней квадратичной скоростью.

§ 19. Статистическая интерпретация волн де Бройля и волновой функции

1. Каков же физический смысл волн де Бройля и какова их связь с частицами вещества?

Одна из идей, которой некоторое время придерживался Шредингер, а затем быстро отказался от нее, состоит в следующем. Никакого дуализма волн и частиц в действительности не существует. Существуют только волны. Частицы же представляют собой *суперпозиции волн.* Дело в том, что в силу математической теоремы Фурье (1768–1830) из волн различных частот и направлений всегда можно составить *волновой пакет*, т. е. такое волновое образование, что при наложении в определенный момент времени волны будут усиливать друг друга в какой-то малой области пространства, а вне этой области произойдет их полное гашение. *Такой волновой пакет и есть частица.* Интенсивность волн де Бройля рассматривается как величина, пропорциональная плотности среды, из которой образуется частица. Казалось, что подтверждением такой точки зрения служит то обстоятельство, что центр волнового пакета, подобно центру группы волн, должен в вакууме распространяться с групповой скоростью. А согласно формуле (17.8) групповая скорость волн де Бройля равна скорости частицы.

Однако волновой пакет не может вести себя как частица сколь угодно длительное время. Причина этого в том, что даже в вакууме волны де Бройля обладают *дисперсией.* Действительно, связь между

импульсом частицы p и ее энергией $\mathscr{E}$ выражается формулой

$$\left(\frac{\mathscr{E}}{c}\right)^2 - p^2 = (m_0 c)^2. \tag{19.1}$$

Подставив в нее значения $\mathscr{E}$ и p из формул (17.2) и (17.3), получим закон дисперсии волн де Бройля

$$\left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 - (\hbar k)^2 = (m_0 c)^2. \tag{19.2}$$

Из него видно, что фазовая скорость волн де Бройля $v_ф = \omega/k$ зависит от частоты ω, — в этом и состоит дисперсия. Допустим теперь, что в какой-то момент времени, скажем $t = 0$, волны де Бройля усиливают друг друга в некоторой малой области пространства, а в остальном пространстве волновое поле обращается в нуль. Как будет эволюционировать такой волновой пакет во времени? Монохроматические волны разных частот, из которых образован пакет, будут расходиться с различными фазовыми скоростями. Это приведет к деформации, расплыванию и в конце концов к *распаду* первоначального волнового пакета. Таким образом, частица, если бы она представляла волновое образование, была бы *неустойчива* и быстро распадалась бы. Это ни в какой мере не соответствует действительности. Таким образом, *частица не может быть волновым пакетом, образованным из волн де Бройля.*

2. Нельзя принять и противоположную точку зрения: первичными являются *частицы*, а волны представляют их *образования*, т. е. возникают в среде, состоящей из частиц, подобно звуку, распространяющемуся в воздухе. Действительно, такая среда должна быть достаточно плотной, ибо о волнах в среде частиц имеет смысл говорить лишь тогда, когда среднее расстояние между частицами очень мало по сравнению с длиной волны. А в типичных случаях, как мы видели, для волн де Бройля это условие не выполняется.

Но если бы даже мы преодолели это затруднение, то все же указанная точка зрения должна быть отвергнута. В самом деле, она означает, что волновые свойства присущи системам многих частиц, а не отдельным частицам. Между тем волновые, интерференционные свойства частиц не исчезают и при малых интенсивностях падающих пучков. Это было доказано прямыми опытами Бибермана, Сушкина и Фабриканта (р. 1907) с электронами и Яноши (1912–1978) с фотонами.

В опытах Бибермана, Сушкина и Фабриканта применялись столь слабые пучки электронов, что средний промежуток времени между двумя последовательными прохождениями электрона через дифракционную систему был примерно в 30 000 раз больше времени, затрачиваемого одним электроном на прохождение всего прибора. При таких условиях взаимодействие между электронами, конечно, не играло никакой роли. Между тем при достаточно длительной экспозиции возникала дифракционная картина, ничем не отличающаяся от картины,

получаемой при короткой экспозиции с пучками электронов, интенсивность которых была примерно в 10^7 раз больше. Важно только, что в обоих случаях общее число электронов, попавших на фотопластинку, было одинаково. Это показывает, что и *отдельные частицы обладают волновыми свойствами.* Косвенным доказательством этого является также то, что волновые свойства проявляют электроны атомных оболочек, например единственный электрон атома водорода, когда о среде, образованной электронами, говорить не приходится.

3. Приведенные две попытки физического толкования волн де Бройля являются чисто гипотетическими. В свете экспериментальных фактов обе они оказались несостоятельными. Мы не намерены в дальнейшем идти по пути гипотез, а предпочитаем более надежный метод — *метод принципов.* Допустим, что пучок частиц (для определенности будем говорить об электронах) падает на какое-либо дифракционное устройство, например кристалл. Как выяснено выше, дифракция свойственна и волнам де Бройля, сопутствующим только одной частице. Поэтому можно предположить, что падающий пучок состоит всего из одного электрона. При прохождении соответствующей электронной волны де Бройля через кристалл она разбивается на несколько дифракционных пучков. Нельзя допустить, что в каждом из таких пучков находится какая-то доля электрона. Электрон действует всегда как целое и никогда не обнаруживается часть электрона, — в этом проявляется атомизм, свойственный микромиру. Допустим, что на пути одного из дифрагированных пучков поставлен счетчик для улавливания электронов. Если счетчик срабатывает, то он всегда обнаруживает *целый электрон*, а отнюдь не его часть. Из этого нельзя заключить, что до обнаружения электрон находился только в одном рассматриваемом пучке, а потому все остальные дифрагированные пучки никакой роли не играли — их просто не существовало. Такая точка зрения означала бы, что электрон проходит через экспериментальное устройство как материальная точка классической механики. *Это несовместимо с явлениями интерференции и дифракции электронов.* Если повторить тот же опыт с другим электроном, то электрон обнаружится также в одном из дифрагированных пучков, но, вообще говоря, не в том же самом. Подобные трудности вынудили Борна предложить *статистическую интерпретацию* волн де Бройля, позволяющую сочетать атомизм частиц с их волновыми свойствами.

4. Согласно статистической интерпретации волны де Бройля следует рассматривать как *волны вероятности.* Более определенно: *интенсивность волны де Бройля в каком-либо месте пространства пропорциональна вероятности обнаружить частицу в этом месте.* Но статистические или вероятностные свойства частиц могут быть установлены на опыте не с одной частицей, а лишь со *многими частицами* или только с одной частицей, если опыт при определенных условиях *повторен многократно.* Говорить о статистике и вероятности имеет смысл лишь по отношению к определенной совокупности элементов, к которым эти понятия относятся. Это может быть либо совокупность

многих одновременно наблюдаемых элементов, либо один элемент, многократно наблюдаемый в последовательные моменты времени. Такие совокупности элементов в квантовой механике называются *квантовыми ансамблями. Квантовый ансамбль*, и в этом состоит одно из основных положений квантовой механики, *реализуется путем задания каких-то макроскопических параметров.* Это, конечно, не означает, что волновые свойства присущи ансамблям частиц, а не самим частицам. Ансамбли необходимы только для *обнаружения* таких свойств.

Статистическая интерпретация явлений появилась впервые в статистической физике. Однако в основе классической статистической физики лежат динамические законы, допускающие в принципе возможность точного предсказания поведения во времени каждой индивидуальной микрочастицы системы. Для этого нужно только знать начальные условия для всех микрочастиц и силы взаимодействия между ними. Так, поведение газа в состоянии покоя макроскопически определяется его температурой, давлением и объемом. Но это поведение можно было бы в принципе описать положениями и скоростями каждой молекулы в каждый момент времени. По отношению к макроскопическому описанию положения и скорости молекул газа играют роль *скрытых параметров*, т. е. величин, не проявляющихся макроскопически. Можно было бы думать, что и в основе статистического описания, даваемого квантовой механикой, лежат также какие-то неизвестные динамические законы, управляющие поведением неизвестных скрытых параметров, более тонко и детально определяющих состояния систем, чем это делается на современном уровне. Такая точка зрения действительно существует. Но она пока что не привела ни к каким положительным результатам. А потому вопрос о скрытых параметрах мы оставим в стороне и ограничимся статистическим описанием, которое дает современная квантовая механика. Существенно заметить, что такое описание достаточно для предсказания и интерпретации экспериментальных результатов, по крайней мере на современном уровне.

5. Как со статистической точки зрения объясняется дифракция частиц, например электронов? Перед попаданием на дифракционное устройство электроны проходят определенную ускоряющую разность потенциалов, которой соответствует одно и то же значение длины волны де Бройля. Ускоряющий потенциал и является тем макроскопическим параметром, который выделяет квантовый ансамбль частиц. Пусть регистрация электронов производится фотопластинкой. В какое место фотопластинки попадет индивидуальный электрон, с достоверностью предсказать невозможно; это можно сделать только с той или иной степенью вероятности. Вероятность попадания электрона в то или иное место фотопластинки пропорциональна интенсивности волны де Бройля в этом месте. Отдельный электрон оставляет на фотопластинке (после ее проявления) пятнышко. Если электронов мало, то фотопластинка будет напоминать мишень, простреленную небольшим количеством пуль. В расположении пятнышек на фотопластинке не обнаружится никакой закономерности. Закономерность выявится статистически, когда на пластинку попадет очень много электронов.

В этом случае они преимущественно попадут в те места фотопластинки, где должны получиться дифракционные максимумы волн де Бройля. Совокупность соответствующих пятнышек и есть дифракционная картина, получающаяся на опыте. Пока электростатическое отталкивание между электронами несущественно, дифракционная картина получится одной и той же независимо от того, образуется ли она электронами, последовательно проходящими по одному через прибор, или сразу интенсивным пучком одинаково ускоренных электронов, в котором содержится то же число частиц.

6. Символический характер волн де Бройля проявляется, между прочим, в том, что функция (17.1), представляющая плоскую волну де Бройля $\Psi(\mathbf{r}, t)$, *существенно комплексна.* С комплексными выражениями такого типа мы имели дело и в классической физике, но тогда физический смысл мы связывали только с вещественными частями этих выражений. Последние можно было и не дополнять соответствующими мнимыми частями. Это делалось только в целях сокращения математических преобразований и удобства интерпретации окончательных результатов. Не так обстоит дело в квантовой механике. Здесь функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ *принципиально комплексна.* Все физические величины, имеющие реальный физический смысл, выражаются через *всю* комплексную функцию $\Psi(\mathbf{r}, t)$, а не только через ее вещественную часть. Конечно, можно было бы совсем избежать применения комплексных функций. Но тогда для изображения волны де Бройля потребовалась бы не одна, а *две* вещественные функции. Одна из них представляла бы вещественную часть, а другая — коэффициент при мнимой части комплексной функции Ψ. Но это только усложнило бы дело.

Теперь вероятность обнаружить частицу в каком-либо месте пространства можно представить квадратом модуля функции Ψ в том же месте, т. е.

$$|\Psi|^2 = \Psi^*\Psi.$$

В случае плоской волны де Бройля (17.1) этот квадрат модуля равен

$$\Psi^*(\mathbf{r}, t)\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0^*\Psi_0 = \text{const},$$

т. е. равновероятно обнаружить частицу в любом месте пространства. Всякий другой результат для равномерно движущейся частицы в течение бесконечного времени несовместим с однородностью пространства. Но он не получился бы, если бы вместо комплексного выражения (17.1) для волны де Бройля взять вещественное, например sin или cos. Это может служить одним из оправданий использования комплексных выражений вместо вещественных. Но будет ли наблюдаться интерференция волн, если каждая из них существенно комплексна? Легко видеть, что да. Действительно, пусть две волны де Бройля представляются выражениями

$$\Psi_1 = e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \quad \Psi_2 = e^{i(\mathbf{kr}-\omega t-\delta(r))},$$

т. е. между обеими волнами существует разность фаз $\delta(r)$. При их наложении получается волна $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$. Вероятность обнаружить

частицу в каком-либо месте пространства будет пропорциональна

$$\Psi^*\Psi = (\Psi_1^* + \Psi_2^*)(\Psi_1 + \Psi_2) = (\Psi_1^*\Psi_1 + \Psi_2^*\Psi_2) + \\ + (\Psi_2^*\Psi_1 + \Psi_1^*\Psi_2) = 2 + (e^{i\delta} + e^{-i\delta}) = 2(1 + \cos\delta).$$

Она содержит интерференционный член $2\cos\delta(\mathbf{r})$, меняющийся в пространстве от -2 до $+2$, в зависимости от разности фаз $\delta(\mathbf{r})$. Таким образом, интерференция будет наблюдаться.

7. До сих пор говорилось только о плоских волнах де Бройля, представляемых выражением (17.1). Такие волны сопровождают свободное равномерное движение частиц. Необходимо теперь обобщить полученные результаты на случай *произвольных движений частицы в произвольных силовых полях.* В этих случаях полное описание состояния частицы в квантовой механике дается не плоской волной де Бройля, а какой-то более сложной комплексной функцией $\Psi(\mathbf{r}, t)$, зависящей от координат и времени. Она называется *волновой функцией.* В частном случае свободного движения частицы волновая функция переходит в плоскую волну де Бройля (17.1). Сама по себе волновая функция вводится как некоторый *вспомогательный символ* и не относится к числу непосредственно наблюдаемых величин. Но ее знание позволяет *статистически предсказывать* значения величин, которые получаются экспериментально и потому имеют реальный физический смысл. Эта связь волновой функции с тем, что наблюдается в действительности, будет раскрываться постепенно по мере дальнейшего изложения. Сейчас же мы ограничимся только одной стороной этого вопроса.

Через волновую функцию определяется *относительная вероятность* обнаружения частицы в различных местах пространства. На этой стадии, когда говорится только об отношениях вероятностей, волновая функция принципиально определена с точностью до произвольного постоянного множителя. Если во всех точках пространства волновую функцию умножить на одно и то же постоянное (вообще говоря, комплексное) число, отличное от нуля, то получится новая волновая функция, описывающая в точности *то же состояние.* Не имеет смысла говорить, что Ψ равна нулю во всех точках пространства, ибо такая «волновая функция» никогда не позволяет заключить об относительной вероятности обнаружения частицы в различных местах пространства. Но неопределенность в определении Ψ можно значительно сузить, если *от относительной вероятности перейти к абсолютной.* Распорядимся неопределенным множителем в функции Ψ так, чтобы величина $|\Psi|^2 dV$ давала *абсолютную вероятность* обнаружения частицы в элементе объема пространства dV. Тогда $|\Psi|^2 = \Psi^*\Psi$ будет иметь смысл *плотности вероятности*, которую следует ожидать при попытке обнаружения частицы в пространстве. При этом Ψ будет определена все еще с точностью *до произвольного постоянного комплексного множителя, модуль которого, однако, равен единице.* При таком определении должно быть выполнено *условие нормировки*

$$\int |\Psi|^2\, dV = 1, \tag{19.3}$$

где интеграл берется по всему бесконечному пространству. Оно означает, что во всем пространстве частица будет обнаружена с достоверностью.

Нормировка (19.3) может оказаться невозможной, если интеграл (19.3) *расходится*. Так будет, например, в случае плоской волны де Бройля, когда вероятность обнаружения частицы одинакова во всех точках пространства. Но такие случаи следует рассматривать как идеализации реальной ситуации, в которой частица не уходит на бесконечность, а вынуждена находиться в ограниченной области пространства. Тогда нормировка (19.3) не вызывает затруднений. Но предельным переходом от нее можно получить рациональную нормировку и в случае частицы, не локализованной в конечной области пространства (см. § 30).

8. Итак, непосредственный физический смысл связывается не с самой функцией Ψ, а с ее *модулем* $\Psi^*\Psi$ (или вообще с какими-то выражениями, билинейными по Ψ^* и Ψ). Почему же в квантовой теории оперируют с волновыми функциями Ψ, а не непосредственно с экспериментально наблюдаемыми величинами $\Psi^*\Psi$? Это необходимо для истолкования волновых свойств вещества — интерференции и дифракции. Здесь дело обстоит совершенно так же, как во всякой волновой теории. Она (во всяком случае в линейном приближении) принимает справедливость *принципа суперпозиции самих волновых полей*, а не их интенсивностей и, таким образом, достигает включения в теорию явлений интерференции и дифракции волн. Так и в квантовой механике принимается в качестве одного из основных постулатов *принцип суперпозиции волновых функций*, заключающийся в следующем. *Если $\Psi_1(\mathbf{r},t)$ и $\Psi_2(\mathbf{r},t)$ — волновые функции, описывающие какие-то два состояния частицы, то всякая их линейная комбинация с постоянными коэффициентами $c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$ представляет также волновую функцию той же частицы, описывающую какое-то состояние ее.* Найдя Ψ указанным путем, можно в дальнейшем определить и плотность вероятности $\Psi^*\Psi$ в состоянии Ψ.

Оправданием такого принципа суперпозиции является согласие с опытом вытекающих из него следствий. Является ли принцип суперпозиции точным законом природы, или он верен только в линейном приближении, этот вопрос не может считаться выясненным. Мы будем строить дальнейшую теорию в предположении, что принцип суперпозиции выполняется точно.

Подчеркнем особо, хотя это и содержится в изложенном выше, что физический смысл волновой функции Ψ связан не только с ее модулем, но и с ее *фазой*, определяемой мнимой частью этой функции. Если бы речь шла о волновой функции только одного состояния, то можно было бы ограничиться одним только модулем. Но если речь идет о наложении состояний, то происходит их интерференция, а она определяется относительной разностью фаз волновых функций, описывающих эти состояния.

9. В связи с изложенным становится понятным, почему при рассмотрении обычных волн, например электромагнитных, инвариантность

фазы волны $\omega t - \mathbf{kr}$ нами *доказывалась* (см. т. IV, § 107), тогда как в случае волн де Бройля *это не делалось*, а частота ω специально подбиралась так, чтобы указанная инвариантность была обеспечена (см. § 17, п. 2). Дело в том, что доказательство, приведенное в т. IV (§ 107), предполагало *возможность счета волн*, проходивших мимо наблюдателя. *Для волн де Бройля такая возможность исключена*, ибо наблюдатель может следить не за самой волной Ψ, а только за плотностью вероятности $\Psi^*\Psi$. Поэтому указанное доказательство к волнам де Бройля неприменимо.

10. Частота волны де Бройля ω и вообще частота волновой функции относятся к *принципиально ненаблюдаемым величинам.* Этим можно воспользоваться, чтобы перейти к квантовой механике *в нерелятивистской форме.* И в классической механике обширная область явлений охватывается в нерелятивистском приближении. То же может быть сделано и в квантовой механике. К тому же здесь переход к релятивистскому рассмотрению осложняется следующим обстоятельством. В сильных полях, когда энергия поля (например, γ-кванта) превосходит $2m_ec^2$, начинается *рождение пар электрон–позитрон.* То же наблюдается в аналогичных случаях и для других частиц. По этой причине *последовательная релятивистская квантовая механика не может быть теорией одного тела* (одной частицы). *Теория одного тела возможна только в нерелятивистском приближении.* Поэтому в дальнейшем мы ограничимся только нерелятивистской квантовой механикой.

В нерелятивистской квантовой механике мы будем по-прежнему пользоваться соотношениями

$$\mathscr{E} = \hbar\omega, \tag{19.4}$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \tag{19.5}$$

Однако собственную энергию частицы m_0c^2 учитывать не будем. Это значит, что, начиная с этого места, мы вводим новую частоту, отличающуюся от прежней частоты на постоянную. Для новой частоты сохраним прежнее обозначение ω. В частности, в случае свободного движения $\mathscr{E} = p^2/2m$ и закон дисперсии записывается в виде

$$\omega = \frac{\hbar}{2m}\,k^2 \tag{19.6}$$

вместо прежнего соотношения (19.2). Это приводит к новому выражению для фазовой скорости волн де Бройля:

$$v_\text{ф} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}. \tag{19.7}$$

Однако это не может отразиться на физических выводах теории, так как *фазовая скорость, как и сама частота ω волны де Бройля, относится к числу принципиально ненаблюдаемых величин.* Существенно, что физически наблюдаемые величины — плотность вероятности $\Psi^*\Psi$ и групповая скорость (17.8) — при новом выборе частоты остаются

неизменными (см. § 17, п. 3). Остаются неизменными, как это будет видно из дальнейшего, и все величины, доступные измерению на опыте.

11. Остановимся в заключение на общей характеристике всякой количественной физической теории. Такая характеристика особенно существенна при изучении квантовой механики. Как отмечал Л. И. Мандельштам (1879–1944), всякая теория состоит, вообще говоря, из двух дополняющих друг друга частей. Первая часть — это *математический аппарат теории*, т. е. уравнения между различными математическими символами, входящими в теорию. Вторая часть определяет *связь этих символов с природой*, с реальной действительностью. Без второй части теория иллюзорна — это чистая математика, а не естественная наука. Без первой части вообще нет количественной теории. *Только совокупность обеих частей составляет количественную физическую теорию.*

Классические теории всегда начинались со второй части. Смысл символов, которыми оперировала теория, считался известным заранее или устанавливался и уточнялся в процессе ее построения. Таковы были время, длина, масса, сила, электрический заряд, напряженности электрического и магнитного полей и т. д. Правда, точные научные определения соответствующих понятий иногда бессознательно подменялись наивными представлениями, заимствованными из повседневной жизни. Это приводило к трудностям. Так было, например, с понятиями пространства и времени, критический пересмотр которых привел к теории относительности. Но порядок построения теории всегда оставался прежним — сначала вырабатывались понятия и лишь потом устанавливались соответствующие уравнения. Квантовая механика пошла по другому пути. Сначала были установлены уравнения для каких-то символов (к числу их относится, например, волновая функция), физический смысл которых был совсем не ясен. Лишь потом занялись отысканием связи этих символов с реальной действительностью. Такой путь построения теории хотя и представляется противоестественным, но логически он допустим, если только связь с реальностью полностью установлена. По такому пути приходится идти и нам. Пока что мы связали волновую функцию Ψ с соответствующей плотностью вероятности $\Psi^*\Psi$. Но этим не исчерпывается физическая интерпретация всех понятий и величин, которые пришлось ввести в связи с функцией Ψ.

§ 20. Соотношение неопределенностей

1. В классической механике состояние материальной точки в каждый момент времени характеризуется ее *положением* и *импульсом*. Реальные микрочастицы — электроны, протоны, атомы, молекулы и пр. — более сложные объекты. *Нельзя характеризовать мгновенное состояние микрочастицы точными заданиями ее положения и импульса.* Причина этого в том, что всякая микрочастица проявляет и корпускулярные, и волновые свойства. Нельзя сказать, что в определенной точке пространства длина волны равна λ, если о волновом поле во всех остальных точках пространства ничего не известно. Длина волны есть *характеристика синусоиды*, а синусоида — *бесконечная периодическая*

кривая. Если из нее вырезать малый кусочек и удалить все остальные части, то оставшийся кусочек потеряет самое характерное свойство синусоиды — ее периодичность. Для кусочка, малого по сравнению с λ, понятие длины волны неприменимо. Ясно, что выражения «длина волны в данной точке пространства x равна λ» или «частота волнового процесса в данный момент времени t равна ω» не имеют никакого смысла — величина λ не является функцией x, а величина ω — функцией t.

С другой стороны, если какое-либо волновое образование занимает ограниченную область пространства, то его всегда можно представить синусоидами. Только одной синусоиды для этого недостаточно. Требуется волновой пакет — суперпозиция множества синусоид различных частот, которые усиливались бы в определенном интервале пространства и взаимно гасили бы друг друга вне этого интервала. Если длина волнового пакета равна Δx (ради простоты мы ограничиваемся одним измерением), то волновые числа k, необходимые для его образования, не могут занимать как угодно узкий интервал Δk. Минимальная ширина интервала Δk должна примерно удовлетворять соотношению

$$\Delta x \cdot \Delta k \gtrsim 2\pi \tag{20.1}$$

(см. т. IV, § 30). Это — *чисто волновое соотношение.* Из него следует, что в коротком радиосигнале (малое Δx) всегда представлены с заметной интенсивностью монохроматические волны с различными значениями λ. Такие сигналы будут приниматься приемниками, настроенными на различные волны. Если же требуется принимать сигналы, близкие к монохроматическим (малое $\Delta\lambda$), то они по необходимости должны быть длинными (большое Δx).

Напомним, как из элементарных соображений можно прийти к соотношению (20.1). Рассмотрим множество синусоид одинаковых амплитуд, волновые числа которых k последовательно возрастают от синусоиды к синусоиде на одну и ту же величину. В точке x фазы волн меняются от kx до $(k+\Delta k)x$, т. е. на величину $x\Delta k$. Если $x\Delta k = 2\pi$, то в этой точке все синусоиды взаимно гасят друг друга. Найдем ближайшую точку $x + \Delta x$, в которой будет происходить такое же гашение. В этой точке разность фаз между крайними синусоидами будет

$$(k + \Delta k)(x + \Delta x) - k(x + \Delta x) = x\Delta k + \Delta x \cdot \Delta k = 2\pi + \Delta x \cdot \Delta k.$$

Ближайшее гашение произойдет, когда $\Delta x \cdot \Delta k = 2\pi$. Таким образом, все волновое возмущение разобьется на отрезки одинаковой длины Δx, причем на концах каждого отрезка волновое поле обратится в нуль. Такой результат получился потому, что все синусоиды были взяты с одной и той же амплитудой. Но если воспользоваться синусоидами всевозможных амплитуд, то можно усилить возмущение в пределах только одного отрезка Δx, а вне этого отрезка всюду его погасить. Это следует из математической теоремы Фурье, причем необходимым условием является выполнение соотношения типа (20.1). Именно такой случай мы и будем иметь в виду.

2. Рассмотрим теперь волновой пакет из волн де Бройля, размеры которого и соответствующие пределы волновых чисел удовлетворяют условию (20.1). Согласно статистической интерпретации вероятность обнаружения частицы будет отлична от нуля только в пределах пакета. А чему будет равен импульс частицы? Каждой волне де Бройля с волновым вектором $\mathbf{k}$ соответствует значение импульса $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Определенного импульса для всего пакета не существует. Существует набор импульсов, заполняющих интервал от $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ до $\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p} = \hbar(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k})$. Неизвестно, какой импульс будет обнаружен в волновом пакете при измерении. В лучшем случае можно указать только его вероятность. При измерении импульс будет обнаружен с той или иной вероятностью между $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ и $\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p} = \hbar(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k})$. Поэтому, выражая $\mathbf{k}$ через $\mathbf{p}$, соотношение (20.1) можно переписать в виде

$$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim 2\pi\hbar = h. \tag{20.2}$$

Это соотношение называется *соотношением* или *принципом неопределенностей Гейзенберга для координаты и импульса частицы*. Оно определяет допустимый *принципиальный предел неточностей* δx и Δp, с которыми состояние частицы можно характеризовать классически, т. е. координатой x и импульсом p. Чем точнее x, тем с меньшей точностью возможно характеризовать p, и наоборот. Но соотношение Гейзенберга никоим образом нельзя толковать в том смысле, что частица в каждый момент времени имеет определенные значения x и p, но мы их принципиально не можем узнать с большей точностью, чем это позволяет соотношение неопределенностей (20.2). Такая агностическая точка зрения существовала, но она совсем не соответствует природе изучаемых микрообъектов. Истинный смысл соотношения (20.2) отражает тот факт, что в природе *объективно не существует* состояний частиц с точно определенными значениями обеих переменных x и p.

Принцип неопределенностей был сформулирован Гейзенбергом в 1927 г. и явился важным шагом в интерпретации закономерностей микромира и построении квантовой механики.

В частном случае неопределенности Δp может и не быть ($\Delta p = 0$). Так будет, например, в случае плоской монохроматической волны де Бройля. Но тогда, согласно соотношению неопределенностей, $\Delta x = \infty$, т. е. о месте, где будет локализована частица, ничего сказать нельзя. Она может быть с равной вероятностью обнаружена в любой точке пространства. Напротив, когда $\Delta x = 0$, то $\Delta p = \infty$. В этом случае волновая функция стягивается в точку. При локализации частица будет обнаружена в одной определенной точке (например, начале координат), но об импульсе, который будет найден при локализации, можно высказать только вероятностное утверждение. Можно показать, что в этом случае все значения импульса будут равновероятны.

3. В трехмерном случае классически частица характеризуется тремя прямоугольными координатами x, y, z и сопряженными им импульсами p_x, p_y, p_z. В этом случае соотношения неопределенностей

Гейзенберга выражаются тремя неравенствами

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant h, \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geqslant h, \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geqslant h. \qquad (20.3)$$

Никаких ограничений на произведения типа $\Delta x \cdot \Delta p_y$, $\Delta y \cdot \Delta p_z$, которые получаются от умножения неопределенностей координат на неопределенности импульсов, сопряженных с другими координатами, соотношения неопределенностей не накладывают. Величины x и p_y, x и p_z одновременно могут иметь и совершенно точные значения.

4. Соотношению (20.2) можно придать точную количественную форму, которую мы приведем без доказательства. В соотношении (20.2) величины Δx и Δp точно не определены. Но любая волновая функция Ψ позволяет определить *среднее значение координаты* $\overline{x}$, а ее спектральный состав — *среднее значение* $\overline{p}$. Из этих величин находятся отклонения от среднего $\Delta x = x - \overline{x}$, $\Delta p = p - \overline{p}$ и средние квадраты этих отклонений $\overline{\Delta x^2}$ и $\overline{\Delta p^2}$. Точное соотношение неопределенностей гласит:

$$\overline{\Delta x^2} \cdot \overline{\Delta p^2} \geqslant \hbar^2/4. \qquad (20.4)$$

Как правило, мы не будем пользоваться этим соотношением, так как во всех принципиальных вопросах существенно знать лишь *порядок величины* $\Delta x \cdot \Delta p$, а не ее точное значение.

5. Мы распространим соотношения неопределенностей (20.3) и на случай *макроскопических тел*, хотя в этом случае и не существует никаких опытов, подтверждающих или опровергающих эти соотношения. Единственным оправданием соотношений неопределенностей в этих случаях служит наша уверенность в их универсальности и всеобщности. Поэтому мы поставим вопрос, как сказалось бы соотношение неопределенностей на движении макроскопического тела, если бы это соотношение в рассматриваемом случае было действительно верно? Возьмем маленький шарик с массой $m = 1$ г. Определим положение центра этого шарика с высокой точностью $\Delta x = 10^{-8}$ см, т. е. с точностью до размера атома. Тогда неопределенность импульса шарика будет $\Delta p \sim h/\Delta x \approx 6{,}63 \cdot 10^{-19}$ г · см/с, а неопределенность скорости $\Delta v = \Delta p/m \approx 6{,}63 \cdot 10^{-19}$ см/с. Такая точность недоступна никакому измерению, а потому и отступления от классического движения, вызываемые соотношением неопределенностей, далеко лежат за пределами возможностей эксперимента.

Совсем иначе обстоит дело с движением электрона в атоме. Имеет ли смысл говорить о классическом движении электрона по боровской орбите? Возьмем для определенности атом водорода и первую боровскую орбиту. Чтобы такое движение имело смысл, необходимо, чтобы неопределенность значения радиуса Δr была мала по сравнению с самим радиусом орбиты $r = \hbar^2/(me^2)$. Но в этом случае неопределенность значения радиального импульса будет

$$\Delta p_r \approx \frac{h}{\Delta r} \gg \frac{h}{r} = \frac{2\pi\hbar}{r} = 2\pi p,$$

что превосходит сам импульс электрона $p = \hbar/r$. Аналогичное справедливо и для других боровских орбит, если только квантовое число не очень велико. При таких условиях представление о движении по классическим орбитам теряет смысл. Поэтому квантовая механика при описании движений электронов в атомах отказалась от понятия траектории — этому понятию здесь реально ничего не соответствует. Так же обстоит дело и с другими элементарными частицами при движении в очень малых областях пространства.

6. Соотношение (20.2) проявляется при всякой попытке измерения точного положения или точного импульса частицы. Оказывается, что уточнение положения частицы сказывается на увеличении неточности в значении импульса, и наоборот. Иллюстрируем это на трех примерах.

Первый пример. Пусть движение электрона описывается плоской монохроматической волной де Бройля. Электрон в таком состоянии обладает вполне определенным импульсом, но его координата совершенно не определена. Для определения x-координаты электрона на пути волны перпендикулярно к ее распространению ставится непрозрачный экран со щелью ширины d (рис. 40). Пусть координатная плоскость XY расположена в плоскости экрана, причем ось X направлена перпендикулярно к щели. Если электрон прошел через щель, то в плоскости самой щели координата x будет зафиксирована с точностью $\Delta x \sim d$. Однако в результате дифракции на щели волновая функция электрона Ψ изменится. Она будет иметь максимумы и минимумы. Электрон же может быть обнаружен в любом месте, где $\Psi \neq 0$. Практически все волновое поле будет сосредоточено в пределах центрального максимума нулевого порядка.

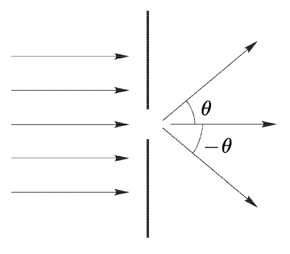


Рис. 40

Его угловая ширина равна 2θ, причем $d \sin\theta = \lambda$. Этот центральный максимум мы приближенно можем принять за все поле, отбрасывая все его остальные части. В этом приближении после прохождения через щель неопределенность Δp_x импульса электрона получится порядка $\Delta p_x = p\sin\theta$. Умножая это выражение на $\Delta x = d$ и принимая во внимание, что $d\sin\theta = \lambda$ и $p = h/\lambda$, получим $\Delta x \cdot \Delta p_x \gtrsim h$, как и должно быть согласно соотношению Гейзенберга. Чем у́же щель, тем точнее будет измерена координата электрона, но зато потеряется точность в значении его импульса.

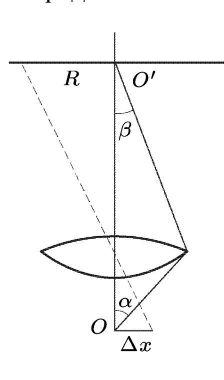


Рис. 41

Сужая щель до размеров $d < \lambda$, можно сделать неопределенность координаты сколь угодно малой. Однако при $d < \lambda$ волновое поле за щелью перестает быть плоской однородной волной де Бройля. Получается неоднородная волна, быстро затухающая на расстоянии порядка λ и меньше. В этом случае

наша оценка Δp неприменима. Однако соотношение неопределенностей, как показывает более точное исследование, остается в силе.

Второй пример (мысленный опыт Гейзенберга с микроскопом). Пусть частица находится под микроскопом (рис. 41). Для определения ее положения она освещается монохроматическим фотоном короткой длины волны λ. По месту попадания фотона на фотопластинку и судят о положении частицы. При освещении пучком света изображением частицы служит дифракционная картина со светлыми и темными кольцами и светлым кружком в центре. Но с одним фотоном дифракционную картину получить нельзя. При рассеянии на электроне фотон с той или иной вероятностью может попасть в любую точку потенциально возможной дифракционной картины, где интенсивность света отлична от нуля. Практически все фотоны могут попасть только в пределы центрального кружка. Интенсивностью остальных колец можно пренебречь. Радиус центрального кружка $R \approx \lambda/\beta$. В этом приближении положение точки попадания фотона в плоскости изображения может быть определено с точностью порядка R. Неточность положения Δx электрона в предметной плоскости найдется из условия синусов Аббе $R\beta = \Delta x \sin\alpha$, т. е. $\lambda = \Delta x \sin\alpha$. Чем меньше λ, тем точнее определяется положение частицы. Но при рассеянии фотона на электроне последний испытывает отдачу, в результате чего импульс электрона получает неконтролируемое приращение $\Delta p_x \sim (h/\lambda)\sin\alpha$. Чем меньше λ, тем больше это неконтролируемое приращение. Таким образом, при одновременном измерении x и p_x мы приходим к соотношению неопределенности

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \sim h.$$

Третий пример. Рассмотрим измерение скорости движущегося макроскопического тела по доплеровскому смещению частоты при отражении монохроматического света от этого тела.

Пусть телом служит идеально отражающее плоское зеркало, движущееся в направлении нормали к своей поверхности, а свет (фотон) падает нормально на его поверхность. Допустим, что падающий фотон распространяется в направлении движения зеркала. Тогда отраженный фотон отразится в обратном направлении. На основании законов сохранения энергии и импульса

$$\hbar\omega_0 + \frac{1}{2}\,mv_0^2 = \hbar\omega + \frac{1}{2}\,mv^2, \tag{20.5}$$

$$\frac{\hbar\omega_0}{c} + mv_0 = -\frac{\hbar\omega}{c} + mv, \tag{20.6}$$

где m — масса тела, v_0 и v — его скорости до и после отражения фотона, ω_0 и ω — частоты падающего и отраженного фотонов. Переписав эти уравнения в виде

$$m(v^2 - v_0^2) = 2\hbar(\omega_0 - \omega), \tag{20.7}$$

$$m(v - v_0) = \frac{\hbar}{c}\,(\omega + \omega_0), \tag{20.8}$$

почленным делением находим

$$v + v_0 = 2c\,\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 + \omega}.$$

Массу зеркала m можно считать бесконечно большой по сравнению с массой фотона. Тогда

$$v = v_0 = c\,\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 + \omega}. \tag{20.9}$$

Измерив частоты ω_0 и ω, можно по этой формуле вычислить скорость зеркала v. Частоту ω_0 можно считать измеренной точно. Тогда ошибка Δv в определении скорости будет определяться неточностью измерения частоты ω. Чтобы измерить ω с точностью $\Delta\omega$, для измерения требуется минимальное время Δt, удовлетворяющее условию $\Delta\omega\cdot\Delta t \sim \sim 2\pi$. На основании (20.9)

$$\Delta v = -2c\,\frac{\omega_0\Delta\omega}{(\omega_0 + \omega)^2} \approx -\frac{c\Delta\omega}{2w_0}.$$

Так как моменты отражения фотона известны с ошибкой Δt, то неточность в скорости v поведет к ошибке в определении координаты зеркала

$$\Delta x \sim |\Delta v\cdot\Delta t| \sim \frac{c}{2\omega_0}\,|\Delta\omega\cdot\Delta t| \sim \frac{\pi c}{\omega_0}.$$

Но согласно (20.8) при взаимодействии с фотоном зеркало получает неконтролируемое изменение импульса $\Delta p \sim 2\omega_0\hbar/c$. Следовательно, опять получается соотношение неопределенностей $\Delta x\cdot\Delta p \sim 2\pi\hbar = h$.

7. Приведенные примеры показывают, что измерения в квантовой области принципиально отличаются от классических измерений. Конечно, и те и другие измерения сопровождаются ошибками. Однако классическая физика считала, что путем улучшения методики и техники измерений ошибки в принципе могут быть сделаны сколь угодно малыми. Напротив, *согласно квантовой физике существует принципиальный предел точности измерений. Он лежит в природе вещей и не может быть превзойден никаким совершенствованием приборов и методов измерений.* Соотношения неопределенностей Гейзенберга и устанавливают один из таких пределов. Взаимодействие между макроскопическим измерительным прибором и микрочастицей во время измерения принципиально нельзя сделать сколь угодно малым. Если измеряется, например, координата частицы, то измерение неизбежно приводит к принципиально неустранимому неконтролируемому искажению первоначального состояния частицы, а следовательно, и к неопределенности в значении импульса при последующем измерении. То же самое происходит, если порядок измерения координаты и импульса частицы поменять местами.

8. Отметим некоторые выводы, вытекающие из соотношения неопределенностей (20.2).

Прежде всего видно, что *состояние*, *в котором частица находится в полном покое*, *невозможно.* Далее, в макроскопической физике

импульс частицы определяется формулой $p = mv$. Для нахождения скорости v измеряют координаты частицы x_1 и x_2 в два близких момента времени t_1 и t_2. Затем находят частное $(x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$ и выполняют предельный переход $t_2 \to t_1$. Такой метод не годится для измерения мгновенной скорости микрочастицы. Действительно, предельный переход требует точного измерения x_1 и x_2. А точное измерение координаты существенно меняет импульс частицы. Ясно поэтому, что предельным переходом нельзя найти мгновенную скорость ни в одном положении частицы. Можно, правда, промежуток времени $t_2 - t_1$ взять длинным, а измерения x_1 и x_2 произвести с малой точностью. Тогда ошибки измерения мало скажутся на скоростях частицы и на значении дроби $(x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$. Но таким путем будет найдена *не истинная скорость частицы, а ее среднее значение на интервале времени* $t_2 - t_1$. Импульс микрочастицы можно определять по разности потенциалов, пройденной ею в ускоряющем электрическом поле, или по длине волны де Бройля λ, измеренной каким-либо дифракционным устройством.

В квантовой механике теряет смысл деление полной энергии $\mathcal{E}$ на кинетическую и потенциальную. Действительно, одна из этих величин зависит от импульсов, а другая от координат. Эти же переменные не могут иметь одновременно определенные значения. Энергия $\mathcal{E}$ должна определяться и измеряться лишь как *полная энергия без деления на кинетическую и потенциальную.* Об этом подробнее будет сказано ниже.

9. В классической теории не было параметра, определяющего размеры атома. Соотношение неопределенностей позволяет установить такой параметр. Рассмотрим для примера водородоподобный атом с зарядом ядра Ze. Рассуждая классически, напишем уравнение сохранения энергии

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} = \text{const}.$$

Если предположить, что электрон вначале находился на бесконечности практически в состоянии покоя, то следует положить const $= 0$. Этим определится p^2, а затем

$$p^2 r^2 = 2mZe^2 r.$$

Соотношение неопределенностей возьмем в точной форме (20.4). Так как во всяком случае $\Delta r < r$, $\Delta p < p$, то из него следует $p^2 r^2 > \hbar^2/4$, а потому $2mZe^2 r > \hbar^2/4$, откуда

$$r > \frac{1}{Z}\,\frac{\hbar^2}{8me^2} = \frac{1}{Z} \cdot 0{,}66 \cdot 10^{-9}\ \text{см}. \qquad (20.10)$$

Порядок размера атома эта формула определяет правильно. Числовому коэффициенту не следует придавать особое значение, так как формула (20.10) носит только оценочный характер. В частности, оценка показывает, что в кулоновском поле ядра падение электрона на ядро

невозможно. Более того, нахождение электрона внутри атомного ядра несовместимо с соотношением неопределенностей Гейзенберга.

Если применить такую же оценку к определению размеров атомного ядра, то в формуле (20.10) вместо m надо было бы подставить массу протона. В результате для радиуса ядра получилась бы величина примерно в 2000 раз меньшая, чем (20.10). Но и это слишком много (размер ядра порядка 10^{-13} см). Это показывает, что *для образования ядра кулоновских сил недостаточно.* В ядре должны действовать более мощные — *ядерные* — силы, превосходящие кулоновские примерно на два порядка.

10. Наряду с соотношением (20.1) в волновой теории выводится также соотношение

$$\Delta t \cdot \Delta\omega \gtrsim 2\pi \tag{20.11}$$

(см. т. IV, § 29). Смысл этого соотношения состоит в том, что ограниченный во времени волновой процесс не может быть монохроматическим. Если процесс длится в течение времени Δt, то разброс частот $\Delta\omega$ входящих в него волн в лучшем случае удовлетворяет соотношению (20.11). Поэтому, если для наблюдения даже монохроматического процесса предоставлено малое время Δt, то частота процесса принципиально будет найдена в лучшем случае с ошибкой, подчиняющейся соотношению (20.11).

Если частоте ω сопоставить энергию по формуле $\mathscr{E} = \hbar\omega$, то формула (20.11) перейдет в

$$\Delta t \cdot \Delta\mathscr{E} \geqslant 2\pi\hbar = h. \tag{20.12}$$

Формула (20.12) называется *соотношением неопределенностей Гейзенберга для времени и энергии.*

Соотношение (20.12) означает, что чем короче время существования какого-то состояния или время, отведенное для его наблюдения, тем с меньшей определенностью можно говорить об энергии этого состояния. Наоборот, чем больше это время, тем с большей точностью определена энергия состояния. Если состояние стационарно, то оно может существовать бесконечно долго. Именно по этой причине энергия стационарного состояния имеет вполне определенное значение. Противоположным примером может служить нестабильная элементарная частица, распадающаяся за очень короткое время (скажем, порядка 10^{-20} с). Об определенной энергии такой частицы говорить не приходится. Поэтому при рассмотрении процесса ее распада не требуется налагать условие сохранения энергии.

ЗАДАЧИ

1. На какую кинетическую энергию $\mathscr{E}_{\text{кин}}$ должен быть рассчитан электронный (и протонный) ускоритель для исследования структур с линейными размерами $l \sim 1$ ферми (10^{-13} см)?

Ответ.

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} > mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2} - mc^2,$$

где $\lambda = h/(mc)$ — комптоновская длина волны электрона (протона). Для электрона

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} > m_{\text{e}}c^2\frac{\lambda_{\text{e}}}{l} \approx 720 \text{ МэВ}.$$

Для протона

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} > m_{\text{p}}c^2\sqrt{1+\left(\frac{\lambda_{\text{p}}}{l}\right)^2} - m_{\text{p}}c^2 \approx 600 \text{ МэВ}.$$

2. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии составляет около $\Delta t \sim 10^{-8}$ с. При переходе атома в нормальное состояние испускается фотон, средняя длина волны которого равна $\lambda = 500$ нм. Оценить ширину $\Delta\lambda$ и относительную ширину $\Delta\lambda/\lambda$ излучаемой спектральной линии, если не происходит ее уширения за счет других процессов. (Такая ширина называется естественной шириной спектральной линии.)

Ответ.

$$\Delta\lambda \sim \frac{\lambda^2}{c\Delta t} \sim 10^{-4} \text{ нм}, \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \sim \frac{\lambda}{c\Delta t} \sim 10^{-7}.$$

3. Принимая во внимание, что классическая (корпускулярная) механика является приближенным предельным случаем механики волновой, найти условие, при выполнении которого рассеяние α-частиц и электронов на атомных ядрах можно рассчитывать классически, как это делал Резерфорд при выводе своей формулы (9.3).

Решение. Обозначим через a радиус атома. Можно считать, что рассеивающаяся частица подвергается действию кулоновских сил ядра только в пределах сферы радиуса a с центром в центре атома. Такая идеализация неприменима только при очень далеких прицельных расстояниях, когда получаются слишком малые углы рассеяния, при которых экспериментальные исследования не производятся. Рассмотрим плоскопараллельный пучок частиц с поперечным сечением Δx, падающий на атом, и выясним, при каких условиях его распространение в атоме можно рассматривать классически, т. е. без учета дифракции частиц (как это делается в приближении геометрической оптики). Дифракционным расширением пучка, как известно из оптики (см. т. IV, § 6), можно пренебречь, если $l \ll \Delta x^2/\lambda$, где l — длина пучка. В рассматриваемой задаче под l следует понимать путь луча в кулоновском поле атома. По порядку величины $l \approx a$, $\Delta x \sim a$. Таким образом, условие применимости приближения геометрической оптики принимает вид $a \ll \ll a^2/\lambda$, или $\lambda \ll a$. Подставив сюда выражение для длины волны де Бройля $\lambda = h/p = h/(2m\mathscr{E})^{1/02}$, находим искомое условие:

$$\mathscr{E} \gg \frac{h^2}{2ma^2}. \tag{20.13}$$

При нашем рассмотрении не учтено действие ядерных сил. Но радиус ядра $a_{\text{яд}}$, где и действуют ядерные силы, примерно в 10^5 раз меньше радиуса атома $a_{\text{ат}}$. Поэтому на ядро падает примерно в $(a_{\text{ат}}/a_{\text{яд}})^2 \approx 10^{10}$ меньше частиц, чем на атом. Точно так же не играют существенной роли и кулоновские силы в непосредственной близости от ядра. Этим наше приближение оправдано.

При численных расчетах формулу (20.13) удобно переписать в виде

$$\mathscr{E} \gg \frac{(hc)^2}{2mc^2a^2}, \tag{20.14}$$

пользуясь числовым значением $hc = 1{,}24 \cdot 10^{-4}$ эВ · см. Энергию mc^2 следует брать в эВ, а длину a — в см. Для α-частицы $mc^2 = 3{,}75 \cdot 10^9$ эВ. Полагая $a = 10^{-8}$ см, получаем в этом случае

$$\mathscr{E} \gg 0{,}2 \text{ эВ}.$$

Энергия α-частицы порядка 1 МэВ, так что в случае α-частиц применение классической механики оправдано.

Для электрона $mc^2 = 0{,}511 \cdot 10^6$ эВ, а потому должно быть $\mathscr{E} \gg 120$ эВ. Таким образом, для электронов с кинетической энергией ~ 100 эВ классической механикой пользоваться уже нельзя.

Рассмотренную задачу можно было бы также решить на основе принципа неопределенностей Гейзенберга.

Глава IV
УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА. КВАНТОВАНИЕ

§ 21. Уравнение Шредингера

1. Плоская волна де Бройля

$$\Psi = Ce^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \tag{21.1}$$

является весьма специальным волновым образованием, соответствующим свободному равномерному движению частицы в определенном направлении и с определенным импульсом. Но частица, даже в свободном пространстве и в особенности в силовых полях, может совершать и другие движения, описываемые более сложными волновыми функциями. Основная задача волновой механики как раз и состоит в нахождении волновых функций и связанных с ними физических следствий в самых разнообразных условиях. Для ее решения служит *волновое уравнение*, найденное Шредингером в 1926 г. Это — *основное уравнение квантовой механики*, но оно справедливо только в *нерелятивистской квантовой механике*, т. е. в случае движений, медленных по сравнению со скоростью света в вакууме.

Уравнение Шредингера должно быть общим уравнением, т. е. должно быть пригодно для решения *всех*, а не только частных задач. Поэтому в него не должны входить значения параметров (например, начальные условия, конкретный вид силовых полей и пр.), выделяющие частные виды движения. В него могут входить мировые постоянные, например постоянная Планка. Могут входить массы и импульсы частиц, но их числовые значения не должны быть конкретизированы. Силовые поля, в которых движется частица, также должны быть представлены в общем виде. Здесь дело обстоит так же, как с уравнениями Ньютона или Максвелла, которые приспособлены для решения всех, а не только частных механических или электродинамических задач. Кроме того, надо потребовать, чтобы уравнение Шредингера было *линейно и однородно* по Ψ. Этим будет обеспечена справедливость принципа суперпозиции волновых функций, необходимость которого диктуется интерференцией и дифракцией волн вещества (см. § 19, п. 8).

2. При отыскании уравнения Шредингера заметим, что одним из решений его в свободном пространстве должна быть плоская волна де Бройля (21.1). Найдем дифференциальное уравнение, удовлетворяющее перечисленным выше условиям, решением которого является эта волна. Дифференцирование (21.1) по x дает

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = ik_x\Psi, \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = -k_x^2\Psi.$$

Такие же соотношения получим при дифференцировании по y и z. Сложением полученных вторых производных найдем

$$\nabla^2\Psi = -k^2\Psi = -\frac{p^2}{\hbar^2}\,\Psi. \tag{21.2}$$

Это — дифференциальное уравнение, но не то, которое мы ищем. Действительно, при выводе величина p предполагалась постоянной, а потому уравнение (21.2) описывает конкретное движение с заданным постоянным импульсом. Продифференцируем теперь (21.1) по времени при постоянной ω:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -i\omega\Psi = -i\,\frac{\mathscr{E}}{\hbar}\,\Psi. \tag{21.3}$$

Это уравнение также не годится. Оно описывает движение частицы в свободном пространстве с постоянной кинетической энергией $\mathscr{E}$. Разделим, однако, почленно уравнение (21.2) на уравнение (21.3) и учтем, что в нерелятивистской механике $\mathscr{E} = p^2/2m$. Таким путем придем к однородному линейному уравнению

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi, \tag{21.4}$$

которое уже не содержит никаких индивидуальных параметров, выделяющих конкретное движение. Примем в качестве постулата, что уравнение (21.4) справедливо для любых движений частицы в свободном пространстве. Это уравнение и есть *уравнение Шредингера в отсутствие силовых полей.*

Обобщим теперь уравнение (21.4) на случай движений в силовых полях. Ограничимся случаем *потенциальных силовых полей*, которые, как и в классической механике, характеризуются *потенциальной функцией* или *потенциальной энергией* $U(\mathbf{r})$. Единственными непотенциальными силами, встречающимися в атомной механике, являются *силы магнитные*, но мы временно отвлечемся от их рассмотрения. Заметим теперь, что $\hbar\partial/\partial t$ имеет размерность энергии. Значит, одинаковую размерность имеют и величины $i\hbar\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}$ и $U(\mathbf{r})\Psi$. Поэтому прибавление в правой части уравнения (21.4) слагаемого $U(\mathbf{r})\Psi$ не меняет размерности этого уравнения. Можно думать, что полученное таким путем уравнение

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U(\mathbf{r})\Psi \tag{21.5}$$

будет правильно учитывать влияние потенциального силового поля на движение частицы. Это и есть *уравнение Шредингера.*

Путь, которым мы пришли к уравнению Шредингера, конечно, не может служить доказательством этого уравнения. Но уравнение Шредингера — существенно новый принцип. Его нельзя логически вывести из старых принципов, в которых он не содержится. Единственным доказательством уравнения Шредингера является только опыт — опытная проверка всех выводимых из него следствий. Такую проверку уравнение Шредингера выдержало.

3. В уравнении (21.5) в неявной форме уже заложена двойственная — корпускулярно-волновая — природа вещества. Согласно интерпретации волновой функции Ψ частица не локализована. Она, как принято говорить, с определенной вероятностью «размазана» в пространстве. Казалось бы, что при написании уравнения (21.5) это обстоятельство с самого начала должно быть принято во внимание, т. е. под U следовало бы понимать потенциальную энергию частицы с учетом всех возможных положений ее и их вероятностей. На самом деле в уравнении (21.5) это не предполагается. Потенциальная функция $U(\mathbf{r})$ рассматривается в нем так же, как в классической физике, т. е. как *функция локализованной*, *в частности точечной*, *частицы в силовом поле*. Например, в атоме водорода для электрона в поле ядра полагают $U(r) = -e^2/r$, т. е. поступают так же, как если бы обе эти частицы были локализованы.

4. Уравнение Шредингера — уравнение *первого порядка* по времени. Отсюда следует, что заданием волновой функции Ψ во всем пространстве в какой-либо момент времени (например, принимаемый за начальный) однозначно определяется функция Ψ также во всем пространстве во все последующие моменты времени. Не следует смотреть на это утверждение как на выражение принципа причинности в квантовой механике. Ибо выражаемая им «причинность» относится к волновой функции Ψ. А волновая функция связана с реально наблюдаемыми объектами вероятностными соотношениями. Поэтому квантовая механика, по крайней мере в современной ее форме, является *принципиально статистической теорией.*

5. Уравнение Шредингера, как это требовалось с самого начала для выполнения принципа суперпозиции, *линейно и однородно относительно функции* Ψ. В точной математической форме принцип суперпозиции сводится к двум утверждениям. Во-первых, *если* Ψ_1 *и* Ψ_2 *— какие-либо два решения уравнения Шредингера, то и всякая линейная комбинация их* $\alpha_1\Psi_1 + \alpha_2\Psi_2$ *с постоянными (вообще говоря, комплексными) коэффициентами* α_1 *и* α_2 *есть также решение того же уравнения.* Во-вторых, *если волновые функции* Ψ_1 *и* Ψ_2 *описывают какие-либо два состояния системы, то и линейная комбинация* $\alpha_1\Psi_1 + \alpha_2\Psi_2$ *также описывает какое-то состояние той же системы.* Конечно, состояние частицы определяется не самими коэффициентами α_1 и α_2, а только их отношением α_1/α_2. Состояние не изменится, если оба коэффициента умножить на одну и ту же вещественную или комплексную постоянную. Это позволяет, например, функцию $\Psi = \alpha_1\Psi_1 + \alpha_2\Psi_2$ нормировать (если интеграл $\int \Psi^*\Psi dV$, взятый по всему пространству, сходится).

6. Особое значение в квантовой механике имеют *стационарные состояния.* Это — такие состояния, в которых все наблюдаемые физические параметры не меняются с течением времени. Сама волновая функция Ψ не относится к этим параметрам. Она *принципиально ненаблюдаема.* Не должны меняться во времени только *физически наблюдаемые величины*, которые могут быть образованы из Ψ по правилам

квантовой механики. Оказывается, что в стационарных состояниях

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \tag{21.6}$$

где частота ω постоянна, а функция $\psi(\mathbf{r})$ не зависит от времени. Не располагая сейчас правилами составления из Ψ принципиально наблюдаемых величин, проверим, что одна из таких величин, а именно плотность вероятности $\rho = \Psi^*\Psi$, в состоянии (21.6) во времени остается постоянной. Действительно,

$$\rho = \psi^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}\psi(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\omega t} = \psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}),$$

а эта величина от времени действительно не зависит.

Для определения функций $\psi(\mathbf{r})$ в стационарных состояниях подставляем выражение (21.6) в уравнение (21.5) и находим

$$\hbar\omega\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r})\right]\psi.$$

По аналогии со световыми квантами примем гипотезу, что величина $\hbar\omega$ представляет собой полную энергию частицы $\mathscr{E}$ в стационарном состоянии. Таким образом, для энергии в стационарном состоянии получается уравнение

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r})\right]\psi = \mathscr{E}\psi. \tag{21.7}$$

Это уравнение не содержит времени и называется *уравнением Шредингера для стационарных состояний.* В отличие от него (21.5) называется *временным* или *общим уравнением Шредингера.* В отношении потенциальной функции $U(\mathbf{r})$, входящей в уравнение (21.7), полностью справедливы замечания, которые были сделаны в связи с уравнением (21.5). Функция $U(\mathbf{r})$ определяется классически, как если бы никакими волновыми свойствами частица не обладала.

Уравнение Шредингера для стационарных состояний, конечно, удовлетворяет принципу суперпозиции. Однако суперпозиция стационарных состояний с различными энергиями уже не будет стационарным состоянием.

Шредингер показал (см. § 22), что уравнение (21.7) полностью решает проблему квантования энергии системы. Для этого под $\mathscr{E}$ следует понимать энергию системы в стационарном состоянии, а относительно физического смысла самой волновой функции $\psi(\mathbf{r})$ никаких предположений вводить не требуется. Необходимо только наложить на решения $\psi(\mathbf{r})$ уравнения (21.7) некоторые *естественные условия*, которым они должны удовлетворять на бесконечности и в особых точках потенциальной функции $U(\mathbf{r})$. В следующем параграфе будет показано, что *такие решения существуют, вообще говоря, не при всяких значениях* $\mathscr{E}$, *а только при некоторых.* Это и есть избранные значения энергии в стационарных состояниях. В частности, для атома водорода получаются в точности те же значения $\mathscr{E}$, которые давала старая теория Бора. Это был первый крупный успех волновой механики, с которого началось ее дальнейшее бурное развитие.

7. Уравнение (21.7) в сочетании с принципом суперпозиции естественно приводит и *к правилу частот Бора.* С этой целью заметим, что всякий физический процесс характеризуется изменениями во времени каких-то реальных физических величин. Но в стационарных состояниях все реальные физические величины остаются постоянными. Поэтому волновая функция, описывающая состояние, в котором происходят реальные физические явления, должна быть обязательно *нестационарной.* Рассмотрим простейшее нестационарное состояние

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, \tag{21.8}$$

представляющее собой суперпозицию двух стационарных состояний

$$\Psi_1 = \psi_1(\mathbf{r})e^{-i\omega_1 t}, \quad \Psi_2 = \psi_2(\mathbf{r})e^{-i\omega_2 t}. \tag{21.9}$$

Вычислим в этом состоянии простейшую реально наблюдаемую величину — плотность вероятности ρ. Получим

$$\rho = \Psi^*\Psi = (\psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2) + \psi_2^*\psi_1 e^{i(\omega_2-\omega_1)t} + \psi_2\psi_1^* e^{-i(\omega_2-\omega_1)t}.$$

Учтем разность фаз, которая может существовать между ψ_1 и ψ_2. Для этого положим $\psi_1 = |\psi_1|e^{-i\delta_1}$, $\psi_2 = |\psi_2|e^{-i\delta_2}$, где δ_1 и δ_2 — величины вещественные. Тогда получим

$$\rho = (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + 2|\psi_1|\cdot|\psi_2|\cos\left[(\omega_2-\omega_1)t + (\delta_2-\delta_1)\right]. \tag{21.10}$$

Такова (ненормированная) плотность вероятности состояния $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$. Она содержит постоянный член $(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)$ и интерференционный член $2|\psi_1|\cdot|\psi_2|\cos(\omega_{12}t + \delta_2 - \delta_1)$, гармонически колеблющийся с боровской частотой

$$\omega_{12} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1}{\hbar}. \tag{21.11}$$

Полная плотность вероятности ρ может меняться от максимального значения $(|\psi_1| + |\psi_2|)^2$ до минимального $(|\psi_1| - |\psi_2|)^2$. Она содержит член, осциллирующий с боровской частотой ω_{12}. Поэтому приведенное рассуждение в сочетании с классической электродинамикой наводит на мысль (но отнюдь не доказывает), что с той же частотой должно происходить и излучение света. Действительно, если e — заряд частицы, то величина ρe имеет смысл плотности вероятности электрического заряда в пространстве. Если бы она была просто плотностью заряда, а не ее вероятностью, то получился бы классический случай, в котором заряд периодически колеблется во времени. По классическим представлениям такой заряд должен излучать. Правдоподобно ожидать излучения и в квантовом случае, где плотность заряда заменяется ее вероятностью.

Правда, интерференционный член в (21.10) имеет характер незатухающей стоячей волны. Для поддержания непрерывного излучения, если оно уходит от системы, требуется подводить энергию. Но и в классической физике, например при рассмотрении излучения при незатухающих колебаниях диполя Герца, положение такое же. Мы рассчитываем поле и интенсивность излучения, отвлекаясь от того, каким

механизмом поддерживается постоянство амплитуды и связанной с ней энергии колебаний.

Как и в первоначальной теории Бора, боровская частота ω_{12} появляется в результате квантовых переходов системы с одного энергетического уровня на другой.

§ 22. Уравнение Шредингера и квантование

1. Квантование энергии возникает потому, что на волновые функции, являющиеся решениями уравнения Шредингера (21.7), накладываются определенные естественные ограничения. При этих ограничениях уравнение (21.7) имеет решения, вообще говоря, не при всех, а только при избранных значениях параметра $\mathscr{E}$. Здесь дело обстоит аналогично тому, что имеет место в задаче о свободных колебаниях струны с закрепленными концами. Из-за закрепления концов эти колебания представляют собой стоячие волны с такими избранными частотами, что на длине струны укладывается целое число полуволн.

Естественные ограничения, накладываемые на решения уравнения Шредингера (21.7) (в несколько усиленной, но практически всегда выполняющейся форме), состоят в том, что *волновая функция $\psi(\mathbf{r})$ и ее первые пространственные производные должны быть конечны, однозначны и непрерывны даже в точках (а также линиях и поверхностях) разрыва потенциальной функции $U(\mathbf{r})$.* (Однозначность означает, что при обходе по любому замкнутому контуру функция $\psi(\mathbf{r})$ должна возвращаться к своему исходному значению.) Избранные значения параметра $\mathscr{E}$, для которых уравнение (21.7) имеет решения, удовлетворяющие перечисленным ограничениям, называются *собственными значениями величины $\mathscr{E}$* для дифференциального уравнения (21.7), а соответствующие им решения — *собственными функциями* того же уравнения. *Собственные значения $\mathscr{E}$ и принимаются за возможные значения энергии в стационарных состояниях.* Собственные значения энергии $\mathscr{E}$ могут быть *дискретными*, а могут *непрерывно заполнять* конечный или бесконечный интервал. В первом случае говорят, что энергетический спектр *дискретный*, а во втором — *непрерывный.*

Поясним изложенное на частном случае одномерного движения частицы в потенциальном поле сил. Допустим, что частица движется вдоль оси X, а потенциальная функция $U(x)$ имеет вид симметричной «потенциальной ямы» (рис. 42 *а*) конечной глубины. Пусть $U(x)$ максимальна при $x = \pm\infty$ и принимает там одно и то же значение. Примем это значение за нуль отсчета энергии. Таким образом, предполагается, что $U(x)$ всюду отрицательна и при $x = \pm\infty$ обращается в нуль. В одномерном случае уравнение Шредингера (21.7) принимает вид

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\mathscr{E} - U)\psi = 0. \tag{22.1}$$

Коэффициенты этого уравнения вещественны. Поэтому оно имеет вещественные решения, которыми и можно ограничиться. Правда, всякое решение уравнения (22.1) останется таковым, если его умножить

на постоянный множитель, который может быть и комплексным. Но комплексность не влияет на $\psi^*\psi$, а потому не сказывается ни на каких физических выводах теории.

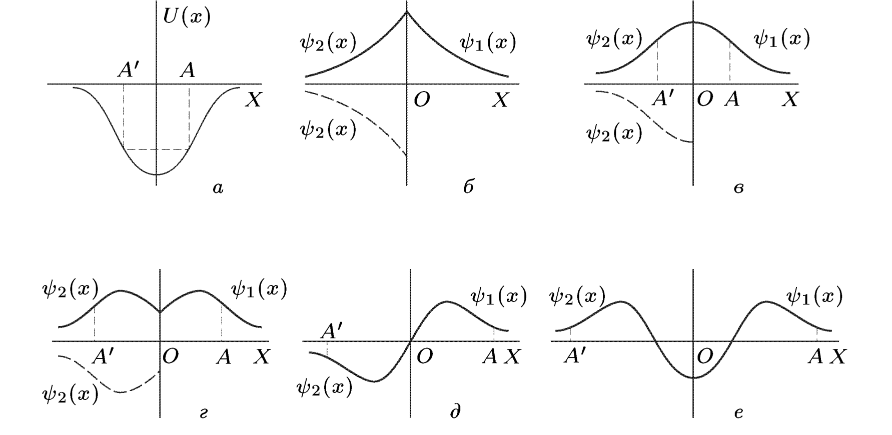


Рис. 42

2. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathscr{E} < 0$. По классическим представлениям частица не может заходить в те области пространства, в которых $U > \mathscr{E}$, так как разность $\mathscr{E} - U$ равна $mv^2/2$, т. е. кинетической энергии, а она не может быть отрицательной. Частица может двигаться только между двумя точками, в которых $U = \mathscr{E}$. Достигнув одной из этих точек, частица должна повернуть обратно. Эти точки называются *точками поворота*. Согласно классической механике пространство вне точек поворота для частицы недостижимо. Но уравнение (22.1), если оно имеет решение, не равное тождественно нулю между точками поворота, должно и за точками поворота переходить в решение, не обращающееся тождественно в нуль. Действительно, решение уравнения (22.1), поскольку это уравнение второго порядка, однозначно определяется заданием ψ и $d\psi/dx$ в какой-либо одной точке пространства. Возьмем эту точку в области за точками поворота. Если допустить, что там $\psi = d\psi/dx \equiv 0$, то на основании сказанного функция ψ должна тождественно обращаться в нуль во всем пространстве, в частности и между точками поворота. Из изложенного следует, что не существует решения, которое было бы отлично от нуля между точками поворота и тождественно обращалось бы в нуль за этими точками.

Таким образом, плотность вероятности $\psi^*\psi$ отлична от нуля и за точками поворота. Значит, согласно квантовой механике, *существует конечная вероятность обнаружения частицы и в классически недостижимой области пространства, где $U > \mathscr{E}$*. Приведенное выше классическое рассуждение в квантовой механике неприменимо, поскольку в этом случае из-за принципа неопределенности теряет смысл разделение полной энергии на кинетическую и потенциальную. Состояние частицы с энергией $\mathscr{E}$ характеризуется единой волновой функцией

во всем бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, а не только ее частью на интервале между классическими точками поворота.

3. При $x \to \pm\infty$ уравнение (22.1) асимптотически переходит в

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2\psi = 0, \tag{22.2}$$

где при $\mathscr{E} < 0$ α — положительная постоянная, равная $\alpha = \sqrt{-2m\mathscr{E}/\hbar^2}$. Последнему уравнению удовлетворяют функции $C_1 e^{-\alpha x}$ и $C_2 e^{+\alpha x}$ при произвольных значениях постоянных C_1 и C_2. Вторая функция обращается в бесконечность при $x = +\infty$, тогда как первая, $C_1 e^{-\alpha x}$, остается регулярной при всех положительных значениях x. Аналогично, при всех отрицательных значениях x остается регулярной только функция $C_2 e^{+\alpha x}$.

Рассмотрим теперь два решения уравнения (22.1): одно $\psi_1(x)$, которое при положительных x на бесконечности асимптотически переходит в $C_1 e^{-\alpha x}$, другое $\psi_2(x)$, которое при отрицательных x на бесконечности асимптотически переходит в $C_2 e^{+\alpha x}$. Искомая функция $\psi(x)$, представляющая решение уравнения (22.1) во всей бесконечной области $-\infty < x < +\infty$, должна получаться сшиванием обоих решений $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ при $x = 0$. При таком сшивании должны оставаться непрерывными сама функция $\psi(x)$ и ее первая производная $d\psi/dx$. Иными словами, должны выполняться два равенства:

$$\psi_1(x) = \psi_2(x), \quad \frac{d\psi_1(x)}{dx} = \frac{d\psi_2(x)}{dx} \quad \text{при } x = 0. \tag{22.3}$$

Если фиксировать постоянную C_1, то постоянной C_2 можно распорядиться так, чтобы соблюдалось первое равенство. Однако второе равенство, вообще говоря, соблюдаться не будет. Если же удовлетворить второму равенству, то, вообще говоря, не будет соблюдаться первое. Обоим равенствам можно одновременно удовлетворить лишь при определенных значениях параметра $\mathscr{E}$. Эти избранные значения и будут *собственными значениями энергии* частицы или уравнения (22.1).

Для исследования возможных собственных значений $\mathscr{E}$ заметим, что знаки функций $d^2\psi/dx^2$ и $(\mathscr{E} - U)\psi$ противоположны. Это непосредственно видно из уравнения (22.1). Поэтому при $(\mathscr{E} - U)\psi > 0$ кривая $\psi = \psi(x)$ обращена выпуклостью вверх, а при $(\mathscr{E} - U)\psi < 0$ — вниз. В точках поворота $\mathscr{E} - U = 0$, а также при $\psi = 0$ эта кривая испытывает перегиб.

4. Рассмотрим сначала случай, когда обе точки поворота совпадают между собой, т. е. когда $\mathscr{E} = U_{\text{мин}}$, где $U_{\text{мин}}$ — наименьшее значение потенциальной функции U, принимаемое ею при $x = 0$. Тогда $\mathscr{E} - U \equiv \equiv U_{\text{мин}} - U \leqslant 0$. Если функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ выбрать положительными соответственно при $x = +\infty$ и $x = -\infty$, то в этих точках $(\mathscr{E} - U)\psi_1 < < 0$, $(\mathscr{E} - U)\psi_2 < 0$, т. е. обе вторые производные $d^2\psi_1/dx^2$ и $d^2\psi_2/dx^2$ на бесконечности будут положительны. Значит, при убывании $|x|$ обе кривые $\psi = \psi_1(x)$ и $\psi = \psi_2(x)$ начнут подниматься вверх. По мере убывания $|x|$ этот подъем только усилится, так как при этом величины $(\mathscr{E} - U)\psi_1$ и $(\mathscr{E} - U)\psi_2$, оставаясь отрицательными, будут непрерывно

возрастать по модулю. Значит, при убывании $|x|$ обе кривые $\psi = \psi_1(x)$ и $\psi = \psi_2(x)$ должны постоянно подниматься, будучи обращенными выпуклостями вниз (рис. 42 *б*). На кривой $\psi = \psi_1(x)$ первая производная $d\psi_1/dx$ отрицательна, а на кривой $\psi = \psi_2(x)$ — положительна. Поэтому невозможно одновременно удовлетворить обоим условиям (22.3). Действительно, если при $x = 0$ удовлетворяется первое условие, то второе условие удовлетворяться не может из-за различия знаков производных $d\psi_1/dx$ и $d\psi_2/dx$: при сшивании $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ на кривой $\psi = \psi_1 + \psi_2$ появится угловая точка (рис. 42 *б*). Можно устранить разрыв первой производной, выбрав функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ противоположных знаков (на рис. 42 *б* отрицательная функция ψ_2 изображена штриховой линией). Но тогда в точке $x = 0$ окажется разрывной сама функция $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Из изложенного следует, что значение $\mathscr{E} = U_{\text{мин}}$ не может быть собственным значением энергии.

5. Будем теперь непрерывно увеличивать параметр $\mathscr{E}$, т. е. поднимать вверх горизонтальную прямую $U(x) = \mathscr{E}$ на рис. 42 *а*. Тогда точки поворота A и A' начнут непрерывно раздвигаться, находясь на равных расстояниях от начала координат, в силу симметрии потенциальной ямы $U = U(x)$. Поскольку A и A' являются точками перегиба, обе кривые $\psi = \psi_1(x)$ и $\psi = \psi_2(x)$ между ними начнут загибаться вниз. Функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ выберем так, чтобы соблюдалось первое условие (22.3). При небольших значениях $\mathscr{E}$ обе кривые $\psi = \psi_1(x)$ и $\psi = \psi_2(x)$ при $x = 0$ по-прежнему будут пересекаться под некоторым углом. Конечно, ввиду симметрии потенциальной ямы $U = U(x)$ эти кривые зеркально симметричны относительно вертикальной оси координат. По мере увеличения параметра $\mathscr{E}$, т. е. по мере раздвигания точек поворота A и A', угол между ними уменьшается. Всегда наступит момент, когда в точке $x = 0$ касательная к одной, а следовательно, и к другой кривой сделается горизонтальной. Тогда обе кривые $\psi = \psi_1(x)$ и $\psi = \psi_2(x)$ плавно перейдут одна в другую (рис. 42 *в*). Соответствующее значение параметра $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1$ и будет *первым или наименьшим собственным значением энергии.* В случае симметричной потенциальной ямы наименьшее собственное значение $\mathscr{E}_1$ всегда существует.

6. При дальнейшем увеличении параметра $\mathscr{E}$, а следовательно, и расстояния между точками поворота кривые $\psi = \psi_1(x)$ и $\psi = \psi_2(x)$, по-прежнему загибаясь вниз, начнут опускаться. Опять на вертикальной оси появится угловая точка (рис. 42 *г*), т. е. второе условие (22.3) перестанет выполняться. Однако в качестве решения уравнения Шредингера при $x < 0$ теперь можно взять новую функцию $\psi_2(x)$, отличающуюся от прежней функции $\psi_2(x)$ знаком. Она изображена на рис. 42 *г* штриховой кривой. Ясно, что эта штриховая кривая зеркально симметрична с прежней кривой $\psi = \psi_2(x)$ относительно горизонтальной координатной оси, а следовательно, симметрична с кривой $\psi = \psi_1(x)$ относительно начала координат. Когда угловая точка, упомянутая выше, опустится в начало координат, верхняя кривая $\psi = \psi_1(x)$ непрерывно сомкнется с нижней (штриховой) кривой, т. е. первое условие (22.3) будет выполнено. Соответствующая результирующая кривая

изображена на рис. 42 *д* уже всюду сплошной линией. При этом будет выполнено и второе условие (22.3), так как в начале координат $\psi_1 = \psi_2$, а потому оно является точкой перегиба результирующей кривой. Рассмотренному случаю соответствует *второе собственное значение энергии* $\mathscr{E} = \mathscr{E}_2$.

Третьему собственному значению $\mathscr{E} = \mathscr{E}_3$ соответствует волновая функция, представленная на рис. 42 *е*.

Продолжая этот процесс дальше, убеждаемся, что *собственные функции стационарных состояний имеют узлы, в которых они обращаются в нуль. Число узлов на единицу меньше номера соответствующего собственного значения энергии.*

7. Итак, при $\mathscr{E} < 0$ собственные значения энергии образуют *дискретный спектр*. Поскольку в этом случае волновая функция стационарного состояния на бесконечности асимптотически экспоненциально убывает, можно сказать, что при $\mathscr{E} < 0$ частица находится в практически ограниченной области пространства, т. е. совершает *финитное движение*. Напомним, что в классической механике условие финитности движения также имеет вид $\mathscr{E} < 0$ (см. т. I, § 25). Различие состоит только в том, что согласно классической механике частица не может проникать в пространство за точками поворота, тогда как по квантовой механике ее можно обнаружить и в этом пространстве, хотя и с вероятностью, быстро убывающей при удалении от точек поворота.

Число возможных стационарных состояний или энергетических уровней зависит от вида потенциальной функции $U(x)$. Оно может быть *конечным* или *бесконечным*. В частности, когда глубина симметричной потенциальной ямы достаточно мала, возможно всего *одно* стационарное состояние. Если же число дискретных энергетических уровней бесконечно велико, то, очевидно, с возрастанием номера уровня его энергия должна асимптотически приближаться к $\mathscr{E} = 0$, а расстояние между соседними уровнями — стремиться к нулю.

8. Отметим еще раз, что *не существует стационарного состояния с энергией* $\mathscr{E} = U_{\text{мин}}$. В противном случае частица все время находилась бы в точке $x = 0$, т. е. покоилась бы на дне потенциальной ямы, что противоречит принципу неопределенностей Гейзенберга (см. § 20, п. 8). Наименьшая энергия, которую может иметь частица в потенциальной яме, равна $\mathscr{E}_1$. Эта энергия называется *нулевой энергией*. Нулевая энергия в заданной потенциальной яме $U(x)$ не может быть отнята от частицы, поскольку она является наименьшей допустимой энергией. Чтобы ее изменить, надо изменить саму потенциальную яму.

Нулевая энергия проявляется во многих явлениях. Примером может служить гелий. При абсолютном нуле температуры его атомы не находятся в покое, а благодаря наличию нулевой энергии совершают так называемые *нулевые колебания*. Вблизи абсолютного нуля они еще достаточно интенсивны, тогда как силы молекулярного притяжения слабы. Этих сил недостаточно, чтобы жидкий гелий перевести в твердое состояние, даже при абсолютном нуле температуры. Требуется повысить давление на гелий до 24 атм или выше, чтобы он (при $T = 0$) перешел в твердое состояние.

9. Осталось рассмотреть решение уравнения (22.1) при положительных значениях параметра $\mathscr{E}$. В этом случае на бесконечности уравнение (22.1) асимптотически переходит в

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \beta^2\psi = 0, \tag{22.4}$$

где $\beta = \sqrt{2m\mathscr{E}/\hbar^2}$, т. е. β — положительная постоянная. Оно имеет два линейно независимых решения $\sin\beta x$ и $\cos\beta x$, остающиеся конечными при $x = \pm\infty$. Поэтому любое решение $\psi(x)$ уравнения (22.4) также конечно при $x \to \pm\infty$, хотя при этом оно и не стремится к определенному пределу, а осциллирует. Если $U(x)$ непрерывна, то будет непрерывно и всякое решение уравнения (22.4) вместе со своей производной в любой точке интервала $-\infty < x < +\infty$. Взяв любое решение, осциллирующее на отрицательной бесконечности, и продолжив его в сторону положительных x, мы получим всюду непрерывное решение с непрерывной производной, осциллирующее на положительной бесконечности. Условие сшивания (22.1) выполняется автоматически.

Таким образом, каким бы ни был положительный параметр $\mathscr{E}$, любое решение уравнения (22.1) может быть волновой функцией. Это значит, что при $\mathscr{E} > 0$ энергетический спектр частицы *непрерывный*. Поскольку при $x = \pm\infty$ функция ψ остается конечной, частица с отличной от нуля вероятностью может уходить в бесконечность. Иными словами, при $\mathscr{E} > 0$ движение частицы будет *инфинитно*. Таково же условие инфинитности движения и в классической механике (см. т. I, § 25).

10. В заключение заметим, что естественные требования, накладываемые на решения уравнения Шредингера, о которых говорилось в начале этого параграфа, могут быть ослаблены. Достаточно ограничиться трехмерным случаем. Во-первых, в этом случае потенциальная функция $U(\mathbf{r})$ может в некоторой точке обращаться в бесконечность. Пусть такой точкой является начало координат $r = 0$. Тогда, как доказывается в квантовой механике, допустимы решения, которые в окрестности начала координат ведут себя как $\psi \sim 1/r^\alpha$ с положительным значением постоянной α. Однако должно быть $\alpha < 1$. Во-вторых, из физических соображений ясно, что требование однозначности должно налагаться не на саму функцию ψ, а *на плотность вероятности* $\psi^*\psi$. Но во всех вопросах, рассматриваемых в квантовой механике, оно сводится к однозначности ψ. На этих вопросах мы не можем останавливаться.

§ 23. Гармонический осциллятор

1. *Гармоническим осциллятором* в классической физике называют частицу, на которую действует сила, пропорциональная отклонению частицы из положения равновесия и направленная к нему. Осциллятор называется *одномерным*, если частица может двигаться только вдоль одной прямой. Последнюю мы примем за ось X, а положение равновесия — за начало координат. Потенциальная функция частицы имеет

вид

$$U = \frac{1}{2}\,kx^2, \tag{23.1}$$

где k — постоянная (*коэффициент упругости*), а x — отклонение частицы от положения равновесия. Графиком функции $U(x)$ является парабола (рис. 43). Согласно классической механике осциллятор совершает гармонические колебания с циклической частотой $\omega = \sqrt{k/m}$, где m — масса частицы.

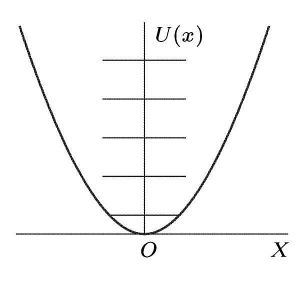


Рис. 43

В квантовой механике понятие силы не используется. Поэтому квантовый гармонический осциллятор следует определить как частицу с потенциальной функцией $U(x)$. Найдем энергии стационарных состояний осциллятора, следуя идеям предыдущего параграфа. Но здесь возникает следующая трудность. Функцию $U(x)$ нельзя нормировать так, чтобы она обращалась в нуль в бесконечности, так как при $x = \pm\infty$ она сама бесконечно велика. Но эта трудность искусственная. В реальных системах при возрастании $|x|$ начинают проявляться отступления от параболической формулы (23.1), так что $U(\pm\infty)$ становится конечной. Рассмотрим случай, когда $U(x)$ симметрична, так что $U(+\infty) = U(-\infty)$. Тогда методы предыдущего параграфа становятся применимыми. Но здесь удобнее за нуль $U(x)$ принять ее значение при $x = 0$. Мы проведем решение, предполагая, что формула (23.1) справедлива при любых x. Однако для реального осциллятора полученные результаты будут справедливы для не слишком больших значений $|x|$.

2. Уравнение Шредингера для одномерного гармонического осциллятора имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}\,kx^2\psi = \mathscr{E}\psi. \tag{23.2}$$

Если ввести безразмерные величины

$$\lambda = \frac{2\mathscr{E}}{\hbar\omega}, \quad \xi = x\sqrt{\frac{k}{\hbar\omega}}, \tag{23.3}$$

то оно преобразуется в

$$-\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \xi^2\psi = \lambda\psi. \tag{23.4}$$

При определенном значении параметра λ это уравнение имеет решение $\psi = e^{\alpha\xi^2}$, где α — постоянная, которая сейчас будет определена вместе с λ. Действительно,

$$\frac{d\psi}{d\xi} = 2\alpha\xi e^{\alpha\xi^2} = 2\alpha\xi\psi,$$

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = 2\alpha\psi + 2\alpha\xi\frac{d\psi}{d\xi} = (4\alpha^2\xi^2 + 2\alpha)\psi.$$

Подставляя эти значения в (23.4), получим

$$(1-4\alpha^2)\xi^2 - 2\alpha = \lambda,$$

причем это соотношение должно выполняться тождественно по ξ. Это будет тогда и только тогда, когда $1-4\alpha^2=0$, $\lambda=-2\alpha$, т.е. $\alpha = \pm 1/2$. Знак плюс следует отбросить, так как в этом случае функция $\psi = e^{\alpha\xi^2}$ обращалась бы в бесконечность при $\xi = \pm\infty$. Таким образом, получается решение

$$\psi = e^{-\xi^2/2}, \tag{23.5}$$

если $\lambda = 1$. Это решение не имеет узлов, а потому оно описывает *основное состояние гармонического осциллятора.* Ему соответствует нулевая энергия

$$\mathscr{E}_0 = \frac{\lambda}{2}\,\hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{2}. \tag{23.6}$$

3. В стационарном состоянии с энергией $\mathscr{E}_n$ функция ψ должна иметь n узлов. Такое число узлов имеет функция

$$\psi = P_n(\xi)e^{-\xi^2/2}, \tag{23.7}$$

где $P_n(\xi)$ — полином n-й степени с некратными вещественными корнями. При избранных значениях параметра λ такая функция действительно является решением уравнения (23.4) и обращается в нуль на бесконечности. При таких значениях λ она и будет волновой функцией осциллятора. Дважды дифференцируя ее и подставляя $d^2\psi/dx^2$ в уравнение (23.4), получим

$$-P_n''(\xi) + \underline{2\xi P_n'(\xi)} + \underline{P_n(\xi)} = \underline{\lambda P_n(\xi)}. \tag{23.8}$$

Это соотношение должно выполняться тождественно по ξ. В нем все подчеркнутые члены являются полиномами степени n. Степень полинома $P_n''(\xi)$ на два меньше, т.е. равна $n-2$ $(n \geqslant 2)$. Чтобы определить λ, достаточно сравнить коэффициенты при старших членах подчеркнутых полиномов. Если коэффициент при ξ^n в полиноме $P_n(\xi)$ равен a_n, то в полиноме $2\xi P_n'(\xi)$ соответствующий коэффициент равен $2na_n$. Поэтому необходимо, чтобы выполнялось соотношение $2n + 1 = \lambda$. Тогда

$$-P_n''(\xi) + 2\xi P_n'(\xi) = 2nP_n(\xi). \tag{23.9}$$

Полиномы, являющиеся решениями этого уравнения, называются *полиномами Чебышева–Эрмита.* Можно доказать (на чем мы не останавливаемся), что все корни полиномов Чебышева–Эрмита некратные и вещественные. Это легко доказать для небольших n, фактически находя сами полиномы и вычисляя их корни (см. задачу к этому параграфу).

Подставляя $\lambda = 2n+1$ в (23.3), находим энергетические уровни осциллятора:

$$\mathscr{E}_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{23.10}$$

Эти уровни *эквидистантны*, т. е. находятся на равных расстояниях друг от друга. На рис. 43 они изображены горизонтальными прямыми.

Классический осциллятор излучает свет только с *одной* частотой ω. Казалось бы, что в соответствии с правилом частот Бора в квантовом случае возможно излучение со всевозможными кратными частотами N_ω (N — целое число). На самом деле при излучении фотона этого не происходит. Из этого затруднения в старой квантовой теории Бор вышел, руководствуясь принципом соответствия. Чтобы исключить кратные частоты, на переходы между уровнями энергии осциллятора было наложено ограничение, называемое *правилом отбора*. Согласно этому правилу квантовое число n осциллятора при излучении и поглощении фотона может меняться только на ± 1, т. е.

$$\Delta n = \pm 1. \tag{23.11}$$

Это правило отбора выводится и в последовательной квантовой механике, не обращаясь ни к какому принципу соответствия. Квантовая механика позволяет вычислить вероятность перехода осциллятора с одного уровня на другой с излучением или поглощением фотона. Оказалось, что эта вероятность обращается в нуль, когда правило отбора (23.11) не соблюдается.

ЗАДАЧА

Найти полиномы Чебышева–Эрмита и волновые функции одномерного гармонического осциллятора для $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Решение. Ради примера рассмотрим случай $n = 4$. Задача сводится к решению уравнения (23.9) в виде полинома

$$P_4(\xi) = a_4\xi^4 + a_3\xi^3 + a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0.$$

Подставляя это выражение в уравнение (23.9) и сравнивая коэффициенты, найдем, что оно удовлетворяется при любом значении a_4, как это и должно быть согласно общей теории. Далее, находим $a_2 = -3a_4$, $a_0 = -(1/4)a_2 = (3/4)a_4$, $a_3 = a_1 = 0$. Итак,

$$P_4(\xi) = a_4(\xi^4 - 3\xi^2 + 3/4).$$

Корни этого полинома

$$\xi = \pm\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{6}}{2}}$$

вещественны и некратны.

Аналогично,

$$P_1(\xi) = a_1\xi, \quad P_2(\xi) = a_2(\xi^2 - 1/2),$$

$$P_3(\xi) = a_3(\xi^3 - 3\xi/2), \quad P_5(\xi) = a_5(\xi^5 - 5\xi^3 + 15\xi/4).$$

Волновые функции получаются умножением этих полиномов на $e^{-\xi^2/2}$. Их обычно нормируют к единице, т. е. подчиняют условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|P(\xi)e^{-\xi^2/2}\right|^2 d\xi = 1.$$

§ 24. Одномерные прямоугольные потенциальные ямы

1. Квантование на основе уравнения Шредингера (22.1) полезно уяснить на примере одномерной симметричной «потенциальной ямы» прямоугольной формы. Так называется потенциальная функция $U(x)$, принимающая на интервале $-a < x < +a$ постоянное значение $-U_0$ и обращающаяся в нуль вне этого интервала (рис. 44). Для этого случая легко получить точное решение уравнения Шредингера и на его основе рассмотреть задачу о квантовании энергии. Но этим значение прямоугольных потенциальных ям не исчерпывается. В ряде случаев (напри-

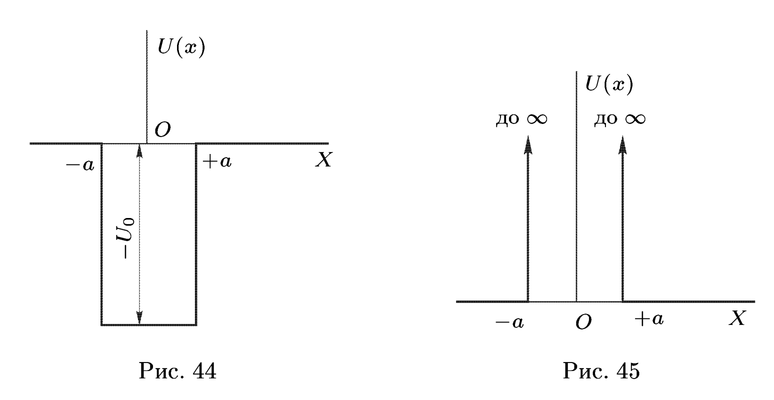


Рис. 44 Рис. 45

мер, в ядерной физике) истинный ход потенциальной функции $U(x)$ неизвестен. Аппроксимируя $U(x)$ потенциальной ямой прямоугольной формы, получают в таких случаях не только качественные, но даже количественные результаты оценочного характера.

2. Наиболее простым в математическом отношении является случай *бесконечно глубокой* потенциальной ямы, когда величина U_0 обращается в бесконечность. В этом случае целесообразно за нуль потенциальной функции принять ее значение на «дне» потенциальной ямы, т. е. на интервале $-a < x < +a$. Тогда на «стенках» ямы (т. е. при $x = \pm a$) функция $U(x)$ будет претерпевать разрыв от 0 до $+\infty$. Такая потенциальная яма изображена на рис. 45.

Математическое упрощение задачи при переходе от ямы конечной глубины к бесконечно глубокой яме связано с тем, что в последнем случае вне интервала $-a < x < +a$, где U всюду бесконечно велика, функция ψ должна обращаться в нуль. Действительно, согласно классической физике, частица с конечной энергией $\mathcal{E}$ не может попасть в область, где $U(x) = +\infty$. В квантовой механике это утверждение заменяется требованием обращения в нуль плотности вероятности $\psi^*\psi$, а следовательно, и самой функции ψ. Таким образом, достаточно рассмотреть решение уравнения Шредингера только в интервале $-a < x < +a$, что и ведет к упрощению задачи.

Внутри интервала $-a < x < +a$ $U(x) = 0$ и уравнение (22.1) принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \tag{24.1}$$

где введено обозначение

$$k^2 = 2m\mathscr{E}/\hbar. \tag{24.2}$$

Не теряя общности, достаточно ограничиться положительными значениями k, что и предполагается ниже. Общее решение уравнения (24.2) имеет вид

$$\psi = A\cos kx + B\sin kx,$$

причем на стенках ямы $x = \pm a$ должно быть $\psi = 0$. Это дает

$$A\cos ka + B\sin ka = 0 \quad \text{при} \quad x = +a,$$

$$A\cos ka - B\sin ka = 0 \quad \text{при} \quad x = -a.$$

Если $A \neq 0$, то $A\cos ka = 0$ и, следовательно, $\cos ka = 0$, $\sin ka \neq 0$, $B = 0$. Наоборот, если $B \neq 0$, то $B\sin ka = 0$ и, следовательно, $\sin ka = 0$, $\cos ka \neq 0$, $A = 0$. Таким образом, все решения уравнения (24.2) распадаются на два класса:

1) с четными функциями

$$\psi = A\cos kx, \quad ka = \pi/2,\ 3\pi/2,\ 5\pi/2, \ldots;$$

2) с нечетными функциями

$$\psi = B\sin kx, \quad ka = 2(\pi/2),\ 4(\pi/2),\ 6(\pi/2), \ldots$$

Возможность $ka = 0$ во втором случае исключается, так как тогда было бы $\psi = 0$, что не имеет физического смысла. Постоянные A и B обычно определяются из условия нормировки $\int\limits_{-a}^{+a} |\psi|^2\,dx = 1$ (для разбираемого нами вопроса это не имеет значения). Тогда получается

$$\psi = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\cos\dfrac{n\pi x}{2} & \text{при нечетных } n, \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{a}}\sin\dfrac{n\pi x}{2} & \text{при четных } n. \end{cases} \tag{24.3}$$

В обоих случаях $k = n\pi/2a$, так что при любом целом n

$$\mathscr{E} = \frac{\hbar}{2m}\,k^2 = \frac{\hbar\pi^2}{8ma^2}\,n^2. \tag{24.4}$$

Отсюда видно, что энергия квантуется. Энергетические уровни *дискретны*, при $U_0 = +\infty$ число их бесконечно велико. Так как значение $n = 0$ исключается, то энергия наинизшего уровня равна $\hbar\pi^2/(8ma^2)$. Это — нулевая энергия, необходимость которой следует из общих положений.

Против приведенного решения можно выдвинуть следующее возражение. На всякой поверхности разрыва потенциальной функции $U(x)$

должны выполняться граничные условия

$$\psi_1(x-0) = \psi_2(x+0), \quad \frac{d\psi_1(x-0)}{dx} = \frac{d\psi_2(x+0)}{dx}, \tag{24.5}$$

где $\psi_1(x)$ — функция $\psi(x)$ по одну сторону поверхности разрыва, а $\psi_2(x)$ — по другую (см. § 22, п. 1). В нашем случае внутри интервала $-a < x < +a$ $\psi = \psi_1$ дается выражениями (24.3), а вне этого интервала $\psi \equiv \psi_2 = 0$. Первое условие (24.5) выполняется, тогда как второе не выполняется. Таким образом, на стенках потенциальной ямы первая производная найденной нами функции $\psi(x)$ претерпевает разрыв непрерывности. Однако это противоречие с общими требованиями, которым должна удовлетворять функция $\psi(x)$, является только кажущимся и возникает в результате *математического перехода к пределу.* Во всяком реальном случае глубина ямы U_0 конечна, хотя и может быть очень большой. В этом случае вблизи стенки по обе стороны от нее $\psi(x)$ и $d\psi/dx$, вообще говоря, отличны от нуля, и условия (24.5) строго выполняются. Но при переходе к пределу бесконечно глубокой ямы они могут и не выполняться для предельных значений этих величин. Действительно, из соотношений (24.5) не следует, что должны выполняться и предельные соотношения

$$\lim \psi_1(x-0) = \lim \psi_2(x+0),$$

$$\frac{d}{dx} \lim \psi_1(x-0) = \frac{d}{dx} \lim \psi_2(x+0).$$

Это на самом деле и происходит с производными функции $\psi(x)$. Найденное нами решение относится не к реальной функции $\psi(x)$ при очень большом значении U_0, а к ее *предельному значению при* $U_0 \to \infty$.

На этом примере с особой отчетливостью проявляется отмеченная выше аналогия между задачей о квантовании энергии и задачей о колебании струны с закрепленными концами. Действительно, в случае прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной ямы обе задачи математически тождественны.

3. Рассмотрим теперь случай симметричной прямоугольной ямы *конечной* глубины (см. рис. 44). Потенциальную функцию $U(x)$ вне ямы примем равной нулю. Внутри ямы $U(x) = U_0 < 0$. За начало координат возьмем центр дна ямы O. Исследуем сначала случай, когда полная энергия $\mathscr{E}$ отрицательна, причем $U_0 < \mathscr{E} < 0$. Введем обозначения

$$k = +\sqrt{2m(\mathscr{E} - U_0)/\hbar^2}, \quad \alpha = +\sqrt{-2m\mathscr{E}/\hbar^2}. \tag{24.6}$$

Тогда уравнение Шредингера внутри ямы будет

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \tag{24.7}$$

а вне ямы

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2\psi = 0. \tag{24.8}$$

Общее решение уравнения (24.7) имеет вид

$$\psi = A\cos kx + B\sin kx. \tag{24.9}$$

Решением уравнения (24.8) является $e^{\pm\alpha x}$. Здесь надо выбрать такой знак, чтобы решение обращалось в нуль при $x = \pm\infty$. Таким образом, вне ямы должно быть

$$\psi = Ce^{-\alpha x} \quad \text{при} \quad x > a,$$

$$\psi = De^{\alpha x} \quad \text{при} \quad x < -a.$$

Из соображений симметрии следует, что плотность вероятности $|\psi|^2$ должна быть симметричной функцией x относительно начала координат. Следовательно, должно быть $C^2 = D^2$, т. е. возможны два случая: $C = D$ и $C = -D$. Постоянные A, B, C, D надо выбрать так, чтобы на краях ямы функция ψ и ее производная $d\psi/dx$ были непрерывны. На границе $x = +a$ это дает

$$A\cos ka + B\sin ka = Ce^{-\alpha a},$$

$$-kA\sin ka + kB\cos ka = -\alpha Ce^{-\alpha a},$$

а на границе $x = -a$

$$A\cos ka - B\sin ka = De^{-\alpha a},$$

$$kA\sin ka + kB\cos ka = \alpha De^{-\alpha a}.$$

Отсюда

$$2A\cos ka = (C + D)e^{-\alpha a}, \quad 2B\sin ka = (C - D)e^{-\alpha a},$$

$$2kA\sin ka = \alpha(C + D)e^{-\alpha a}, \quad 2kB\cos ka = -\alpha(C - D)e^{-\alpha a}.$$

Если $A \neq 0$ и $C = D$, то

$$k\,\mathrm{tg}\,ka = \alpha. \tag{24.10}$$

Если же $B \neq 0$ и $C = -D$, то

$$k\,\mathrm{ctg}\,ka = -\alpha. \tag{24.11}$$

Эти условия не могут быть удовлетворены одновременно, так как в противном случае получилось бы $k^2 = -\alpha^2$, а это невозможно ввиду вещественности k и α. Решение, когда все коэффициенты A, B, C, D равны нулю, физического смысла не имеет. Таким образом, все возможные решения разделяются на два класса: решения с четной волновой функцией, когда $A \neq 0$, $B = 0$, $C = D$, и решения с нечетной волновой функцией, когда $A = 0$, $B \neq 0$, $C = -D$.

Уровни энергии найдутся путем графического или численного решения уравнения (24.10) или уравнения (24.11), в которых положительные величины k и α определяются выражениями (24.6). Для графического решения введем безразмерные величины

$$\xi = ak, \quad \eta = a\alpha. \tag{24.12}$$

Тогда

$$\xi^2 + \eta^2 = -\frac{2mU_0a^2}{\hbar^2}, \tag{24.13}$$

причем для решений с четной волновой функцией из (24.10) следует

$$\eta = \xi \operatorname{tg} \xi, \tag{24.10a}$$

а для решений с нечетной волновой функцией из (24.11) получаем

$$\eta = -\xi \operatorname{ctg} \xi. \tag{24.11a}$$

На рис. 46 *а* построены кривые $\eta = \xi \operatorname{tg} \xi$, на рис. 46 *б* — кривые $\eta = -\xi \operatorname{ctg} \xi$. Вертикальными штриховыми линиями изображены асимптоты этих кривых. Ввиду положительности ξ и η нужны

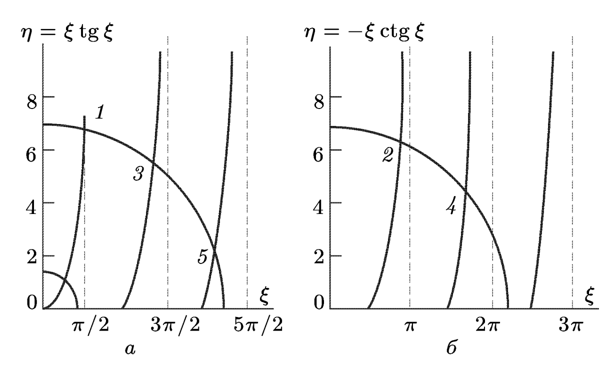


Рис. 46

только участки кривых, расположенные в положительном квадранте ($\xi > 0$, $\eta > 0$). Пересечем эти кривые окружностью (24.13), радиус которой $\sqrt{-2mU_0}\, a/\hbar$ должен считаться известным, поскольку известны величины U_0 и a. Координаты точек пересечения этой окружности с кривыми (24.10a) и (24.11a) дадут возможные значения ξ и η, а следовательно, k и α. После этого по формулам (24.6) легко найти значения $\mathscr{E}$. Число уровней всегда конечно и определяется глубиной $-U_0$ и шириной $2a$ потенциальной ямы. Например, если радиус окружности равен 7, то получается пять уровней. Точкам пересечения *1*, *3*, *5* соответствуют четные, а точкам *2*, *4* — нечетные волновые функции. Если $0 \leqslant -U_0a^2 \leqslant \hbar^2\pi^2/(8m)$, то имеется только одна точка пересечения, которой соответствует четная волновая функция. Так как величина k существенно отлична от нуля, то из (24.6) следует, что $\mathscr{E} > U_0$. Все уровни энергии, в том числе и самый низший, лежат выше дна потенциальной ямы. Опять наше решение приводит к необходимости существования нулевой энергии.

4. Остается рассмотреть случай, когда $\mathscr{E} > 0$. В этом случае величина α чисто мнимая: $\alpha = i\beta$. Вместо (24.8) получается уравнение

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \beta^2\psi = 0. \tag{24.8a}$$

Его решения:

$$\psi = A' \cos\beta x + B' \sin\beta x \quad \text{при} \quad x > +a,$$
$$\psi = A'' \cos\beta x + B'' \sin\beta x \quad \text{при} \quad x < -a.$$

Оба решения остаются конечными при любых значениях x, в частности сколь угодно больших по абсолютной величине. Они содержат четыре произвольных постоянных A', B', A'', B''. Эти решения надо сшить с решением внутри интервала $-a < x < +a$, которое представляется формулой (24.9), чтобы при этом оставались непрерывными ψ и $d\psi/dx$ на обеих стенках потенциальной ямы. Таким путем получаются четыре линейных уравнения относительно коэффициентов A', B', A'', B'', содержащие A и B в качестве параметров. Этого как раз достаточно, чтобы выразить эти неизвестные коэффициенты через A и B. При этом A и B могут принимать любые значения. Отсюда следует, что при $\mathscr{E} > 0$ энергия не квантуется — энергетический спектр *непрерывен*. Волновая функция не стремится к нулю при $x \to \pm\infty$, т. е. движение частицы *инфинитно*, как того и требует общая теория.

§ 25. Квантование в случае сферически симметричного силового поля

1. В атомной физике более важен случай, когда потенциальная функция U не одномерна, а *сферически симметрична* относительно некоторого силового центра. Примером может служить положительно заряженное атомное ядро, в электрическом поле которого движется электрон. Силовой центр (например, атомное ядро) мы сначала будем считать *бесконечно тяжелым* и *неподвижным*. Начало координат поместим в силовом центре. Обозначим через $\mathbf{r}$ радиус-вектор, проведенный из начала координат к рассматриваемой частице. Тогда в случае сферической симметрии $U = U(r)$, где $r \equiv |\mathbf{r}|$. В этом случае волновая функция ψ, т. е. решение уравнения Шредингера (21.7), может зависеть не только от r, но и от угловых переменных, определяющих направление радиус-вектора $\mathbf{r}$. Однако мы ограничимся здесь только *сферически симметричными решениями*, т. е. решениями, зависящими только от $|\mathbf{r}|$; $\psi = \psi(r)$. Тогда уравнение Шредингера для стационарных состояний (21.7) запишется в виде

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\psi}{dr}\right) + [\mathscr{E} - U(r)]\psi = 0. \tag{25.1}$$

Это уравнение отличается от исследованного выше одномерного уравнения (22.1) наличием дополнительного члена $\dfrac{2}{r}\,\dfrac{d\psi}{dr}$. Однако подстановкой

$$\psi = \chi/r \tag{25.2}$$

оно приводится к виду

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\chi}{dr^2} + [\mathscr{E} - U(r)]\chi = 0. \tag{25.3}$$

Это уравнение математически тождественно с уравнением (22.1) для одномерного случая. Поэтому все результаты, полученные в § 22, сохраняют силу для вспомогательной функции $\chi(r)$. Единственное отличие состоит в том, что при $r = 0$ функция χ должна быть не только конечной, но и обращаться в нуль, так как в противном случае функция $\psi = \chi/r$ обращалась бы в бесконечность при $r = 0$. Поэтому половина решений, полученных в § 22, должна быть исключена. Надо оставить только решения, изображающиеся кривыми, проходящими через начало координат (рис. 47). При $\mathscr{E} < 0$ эти решения для положительных r представлены сплошными кривыми, а их продолжения в область от-

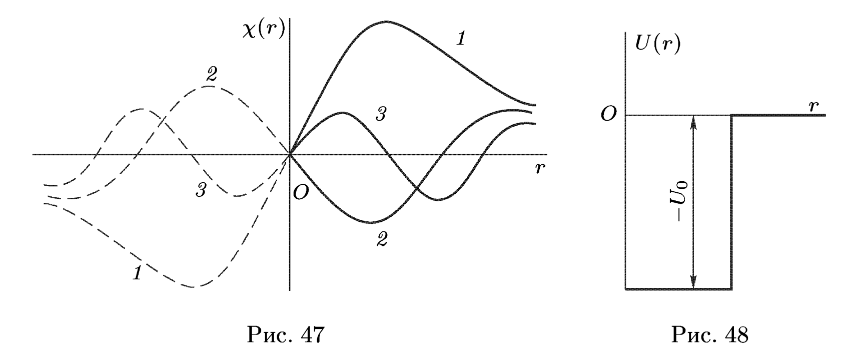


Рис. 47 Рис. 48

рицательных r — штриховыми кривыми. Разумеется, в нашей задаче отрицательные r не имеют физического смысла и введены формально математически, чтобы получилась аналогия с одномерным случаем. Поэтому остается справедливой доказанная в § 22 теорема, что число узлов функции $\psi(r)$ (r существенно положительно) на единицу меньше номера соответствующего собственного значения. При этом точка $r = 0$ за узел не считается. Рисунок 47 иллюстрирует это утверждение.

2. Частным случаем сферически симметричного силового поля является *трехмерная сферически симметричная потенциальная яма*, сечение которой плоскостью, проходящей через силовой центр, имеет прямоугольную форму (рис. 48). Так называется трехмерная потенциальная функция U, зависящая только от расстояния r до силового центра, которая определяется выражениями

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 & \text{при } r < a, \\ 0 & \text{при } r > a. \end{cases} \tag{25.4}$$

Из изложенного выше следует, что в этом случае сферически симметричные волновые функции $\psi(r)$ и значения $\mathscr{E}$ в стационарных состояниях находятся так же, как и в случае одномерной прямоугольной потенциальной ямы (см. § 24). Различие состоит только в том, что

теперь четные решения уравнения (25.3) (если решения формально продолжить в сторону отрицательных r) должны быть исключены. Иными словами, при $\mathscr{E} < 0$ остаются только решения

$$\begin{aligned} \psi &= B \sin kr \quad \text{при} \quad 0 < r < +a, \\ \psi &= Ce^{-\alpha r} \quad \text{при} \quad r > +a, \end{aligned} \tag{25.5}$$

где k и α определяются прежними формулами (24.6). В соответствии с этим из двух формул (24.10а) и (24.11а) надо сохранить только вторую, т. е.

$$\eta = -\xi \operatorname{ctg} \xi, \tag{25.6}$$

причем ξ и η определяются прежними выражениями (24.12).

В случае одномерной симметричной ямы *всегда существует по крайней мере одно собственное значение* дискретного спектра энергии с четной волновой функцией. В случае сферически симметричной прямоугольной ямы этого может и не быть. Действительно, кривая $\eta = -\xi \operatorname{ctg} \xi$ первый раз пересекает горизонтальную ось координат в точке $\xi = \pi/2$, $\eta = 0$ (рис. 46 *б*). Из формулы (24.13) видно, что если

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 > -\frac{2mU_0a^2}{\hbar^2},$$

т. е.

$$-U_0 < \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}, \tag{25.7}$$

то эта кривая нигде не пересечется с окружностью (24.13). Это значит, что при условии (25.7) в потенциальной яме не появится *ни одного уровня дискретного спектра энергии.* Первый уровень появляется, когда крайняя левая кривая $\eta = -\xi \operatorname{ctg} \xi$ на рис. 46 *б* начинает пересекаться с соответствующей окружностью. Это происходит в точке $\xi = \pi/2$, $\eta = 0$. Из второго уравнения (24.6) следует, что в этом случае $\mathscr{E} = 0$, т. е. при возрастании глубины ямы первый уровень появляется на границе дискретного и непрерывного спектров. Расстояние этого уровня от дна потенциальной ямы равно $-U_0 = \hbar^2\pi^2/(8ma^2)$, как это легко получить из первой формулы (24.6). В рассматриваемом случае весь дискретный спектр состоит из одного только уровня нулевой энергии.

§ 26. Система двух взаимодействующих частиц

1. До сих пор мы рассматривали движение *одной* частицы в заданном силовом поле. Более реальным является случай *двух* частиц, взаимодействующих между собой. В классической механике в этом случае движение распадается на движение системы как целого в отсутствие внешних сил (*движение центра масс*) и на движение *одной частицы относительно другой* под действием сил взаимодействия между ними

(*относительное движение*). Последнее формально сводится к движению одной частицы с заменой ее истинной массы на *приведенную массу*

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \tag{26.1}$$

где m_1 и m_2 — массы первой и второй частиц. Совершенно так же обстоит дело и в квантовой механике при рассмотрении стационарных состояний.

Исходным служит уравнение Шредингера для стационарных состояний двух частиц. Оно является естественным обобщением уравнения (21.7) и имеет вид

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2 + U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right]\psi = \mathscr{E}\psi.$$

Здесь

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}, \quad \nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}, \tag{26.2}$$

а через $\mathbf{r}_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{r}_2(x_2, y_2, z_2)$ обозначены координаты рассматриваемых частиц. Потенциальная функция взаимодействия $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ зависит только от разностей координат первой и второй частиц. Обычно (в случае центральных сил) она является функцией только расстояния между ними $r \equiv |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

2. Преобразуем уравнение (26.2) к новым независимым переменным: координатам центра масс

$$\mathbf{R}(X, Y, Z) = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{26.3}$$

и координатам первой частицы относительно второй

$$\mathbf{r}(x, y, z) = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \tag{26.4}$$

Величина ψ теперь является функцией шести переменных: $\psi = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Но мы для сокращения выкладок (без нарушения общности) произведем их только для функции $\psi(x_1, x_2)$ двух переменных x_1 и x_2 и соответственно для $\psi(X, x)$, где

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad x = x_1 - x_2.$$

На основании инвариантности полного дифференциала

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\,dx_2 = \frac{\partial\psi}{\partial X}\,dX + \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx.$$

Подставим в правую часть

$$dX = \frac{m_1 dx_1 + m_2 dx_2}{m_1 + m_2}, \quad dx = dx_1 - dx_2.$$

Сравнением коэффициентов получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi.$$

Мы представили результат дифференцирования в операторной форме. Это позволяет сразу написать выражения для вторых производных:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi = \\ = \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2} + 2\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi = \\ = \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2} - 2\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

Поделив эти соотношения соответственно на m_1 и m_2 и сложив, получим

$$\frac{1}{m_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{1}{m_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = \frac{1}{m_1+m_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2} + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

Теперь уже легко перейти к трем переменным, а затем представить уравнение Шредингера в виде

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2(m_1+m_2)}\nabla_{\mathbf{R}}^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right]\psi = \mathscr{E}\psi, \tag{26.5}$$

где $\nabla_{\mathbf{R}}^2$ и ∇^2 — операторы Лапласа соответственно в переменных X, Y, Z и x, y, z.

3. Оператор, действующий на ψ в левой части (26.5), распадается на сумму двух независимых членов, один из которых зависит только от $\mathbf{R}$, а другой только от $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. В соответствии с этим решение уравнения (26.5) сводится к решению двух уравнений:

$$-\frac{\hbar^2}{2(m_1+m_2)}\nabla_{\mathbf{R}}^2\psi(\mathbf{R}) = \mathscr{E}_{\mathbf{R}}\psi(\mathbf{R}), \tag{26.6}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = \mathscr{E}_{\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r}), \tag{26.7}$$

где $\mathscr{E}_{\mathbf{R}}$ и $\mathscr{E}_{\mathbf{r}}$ — постоянные, удовлетворяющие условию $\mathscr{E}_{\mathbf{R}} + \mathscr{E}_{\mathbf{r}} = \mathscr{E}$. Из них первое описывает *свободное движение центра масс* системы — воображаемой частицы с массой $m_1 + m_2$. Второе же описывает *относительное движение первой частицы относительно второй*, в нем истинная масса частицы заменена приведенной массой $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$. В самом деле, произведение $\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{R})$, в котором переменным является $\mathbf{R}$, а $\mathbf{r}$ рассматривается как параметр, т. е.

в сущности как постоянная, описывает то же движение центра масс, что и функция $\psi(\mathbf{R})$. Аналогично, то же произведение $\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{R})$ будет описывать относительное движение, если за переменную принять $\mathbf{r}$, а $\mathbf{R}$ рассматривать как параметр. Если теперь (26.6) умножить на $\psi(\mathbf{r})$, а (26.7) на $\psi(\mathbf{R})$ и оба уравнения сложить почленно, то мы получим, что функция $\psi = \psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{R})$ будет *общим решением* уравнения (26.5). Таким образом, *общая волновая функция, описывающая независимые движения центра масс и относительное движение частиц, распадается на произведение двух функций от различных переменных*: $\psi(\mathbf{r})$ и $\psi(\mathbf{R})$. При этом, как и в классической механике полная энергия распадается на сумму энергии, связанной с движением центра масс системы, и энергии относительного движения частиц.

Если отвлечься от движения центра масс, считая его как бы неподвижным, то уравнение (26.6) отпадает. Остается только уравнение (26.7) для относительного движения частиц. Поэтому это уравнение мы будем писать просто в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U(\mathbf{r})\psi = \mathscr{E}\psi. \qquad (26.8)$$

ЗАДАЧА

Дейтрон состоит из связанных протона и нейтрона Они удерживают друг друга посредством короткодействующих *ядерных сил*. Потенциальную функцию взаимодействия можно аппроксимировать пространственной потенциальной ямой прямоугольной формы с глубиной $-U_0$ и радиусом a (расстояние между центрами протона и нейтрона). Дейтрон имеет *только одно* связанное состояние. Энергия связи дейтрона, измеренная экспериментально, составляет 2,225 МэВ. Этого недостаточно для определения двух неизвестных U_0 и a. Зададим $a = 2 \cdot 10^{-13}$ см (это недалеко от истины). Мы не настаиваем, что это есть точное значение a. Наша цель — привести только схему расчета. Из этих данных определить глубину потенциальной ямы $-U_0$.

Решение. Представляет интерес только относительное движение протона и нейтрона. Поэтому можно воспользоваться уравнением (26.8), понимая под m приведенную массу системы. Если пренебречь различием масс протона и нейтрона, то приведенная масса будет $m/2$, где m — масса одной из частиц (например, протона). В дальнейших вычислениях используются следующие постоянные:

$$mc^2 = 938{,}28 \text{ МэВ}, \quad \hbar c = 1{,}97329 \cdot 10^{-11} \text{ МэВ} \cdot \text{см}.$$

Так как у дейтрона только одно связанное состояние, то его энергия в этом состоянии $\mathscr{E} = -2{,}225$ МэВ. Это позволяет по формулам (24.6) и (24.12) найти η. Только в формуле (24.6) m следует заменить на $m/2$. Это дает

$$\eta^2 = -\frac{m\mathscr{E}a^2}{\hbar^2} = -\frac{mc^2\mathscr{E}a^2}{\hbar^2c^2} = 0{,}21437, \quad \eta = 0{,}463099.$$

Величину ξ находим из уравнения

$$\eta = -\xi \operatorname{ctg} \xi.$$

Сначала решаем это уравнение грубо графически, пользуясь крайней левой кривой на рис. 46 *б*. Затем уточняем решение аналитически с использованием

интерполирования. Таким путем без труда находим

$$\xi = 1{,}81993.$$

Искомая глубина потенциальной ямы

$$-U_0 = \frac{\hbar^2 c^2}{mc^2 a^2}\,(\xi^2 + \eta^2) = 36{,}61 \text{ МэВ}.$$

§ 27. Квантование водородоподобного атома в сферически симметричном случае

1. Приведем еще один пример на квантование энергии атомной системы. Речь идет о водородоподобном атоме. Рассмотрим частный случай, когда волновая функция ψ электрона в атоме *сферически симметрична*, т. е. зависит только от радиуса r — расстояния электрона от атомного ядра. Такой случай не предусматривался старой теорией Бора. В ней всякое движение электрона вокруг ядра происходило по *плоским орбитам* и, следовательно, не могло быть сферически симметричным. Но в квантовой механике, в которой нет представления о движении электронов по орбитам, нет никаких препятствий для реализации сферически симметричных состояний атома. Из сферической симметрии следует, что в таких состояниях должна обращаться в нуль величина, соответствующая тому, что в классической механике называется моментом количества движения. В теории Бора нулевым моментом количества движения обладал бы электрон, движущийся прямолинейно вдоль радиуса. При таких движениях он неизменно претерпевал бы столкновения с атомным ядром. Старая теория Бора не давала удовлетворительного решения возникавшей здесь трудности, — чтобы избежать столкновений с ядром, она просто исключала возможность радиальных движений электрона. Понятно, что в квантовой механике подобной трудности не возникает.

2. Пусть Ze — заряд ядра. Естественно записать уравнение Шредингера в полярных координатах. В рассматриваемом случае сферической симметрии оно будет

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\psi}{dr} + \left(\frac{q}{r} - \beta^2\right)\psi = 0, \tag{27.1}$$

где введены обозначения

$$\beta^2 = -\frac{2m\mathscr{E}}{\hbar^2}, \quad q = \frac{2mZe^2}{\hbar^2}. \tag{27.2}$$

Введем новую функцию $u(r)$ по формуле

$$\psi = \frac{u(r)}{r}\,e^{-\beta r}.$$

Тогда

$$\frac{d^2u}{dr^2} - 2\beta\frac{du}{dr} + \frac{q}{r}\,u = 0. \tag{27.3}$$

Ищем решение этого уравнения в виде ряда

$$u = \sum_{k=\gamma}^{\infty} a_k r^k, \tag{27.4}$$

где γ — постоянное число, пока что не определенное. Подставляя (27.4) в (27.3) и приравнивая члены с одинаковыми степенями, придем к соотношениям

$$\gamma(\gamma - 1) = 0, \tag{27.5}$$

$$k(k+1)a_{k+1} - 2\beta k a_k + q a_k = 0 \quad \text{при} \quad k \neq \gamma. \tag{27.6}$$

Из (27.5) следует, что либо $\gamma = 0$, либо $\gamma = 1$. Первая возможность исключается, так как при $\gamma = 0$ нулевой член ряда (27.4), т. е. a_0, был бы отличен от нуля. А в таком случае функция ψ при $r = 0$ обращалась бы в бесконечность как a_0/r, что противоречит общим требованиям, накладываемым на ψ в особых точках. Таким образом, разложение (27.4) должно начинаться с $k = 1$, а это значит, что $\gamma = 1$.

Исследуем теперь поведение ряда (27.4) на бесконечности. Из (27.6) получаем

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2\beta k - q}{k(k+1)}. \tag{27.7}$$

Отсюда следует, что при $k \to \infty$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \to \frac{2\beta}{k+1}.$$

Сравним разложение (27.4) с разложением показательной функции:

$$e^{2\beta r} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (2\beta r)^k.$$

Коэффициенты c_k последнего разложения асимптотически ведут себя на бесконечности так же, как и коэффициенты a_k, ибо

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{2\beta}{k+1}.$$

Значит, на бесконечности сумма ряда (27.4) асимптотически ведет себя как показательная функция $e^{+2\beta r}$, а волновая функция $\psi(r)$ — как $e^{\beta r}/r$, т. е. при произвольно выбранном значении $\mathscr{E}$ функция $\psi(r)$ при $r = \infty$ обращается в бесконечность. Этого не будет только для таких значений $\mathscr{E}$, при которых ряд (27.4) обрывается, т. е. переходит в сумму конечного числа членов. Пусть, например, при $k = n$ числитель формулы (27.7) $2\beta k - q = 0$. Тогда, как видно из (27.7), a_{n+1} и все последующие коэффициенты будут равны нулю, т. е. ряд (27.4) оборвется. Следовательно, n-й энергетический уровень определится условием $2\beta n - q = 0$. Используя его, из (27.2) находим

$$\mathscr{E} = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2}, \tag{27.8}$$

что совпадает с соответствующей формулой теории Бора.

Изложенным еще не решается задача о спектре водородного и водородоподобного атомов, даже в ее наиболее грубой постановке. Чтобы объяснить спектральные серии, необходимо схему энергетических уровней дополнить *правилами отбора* при излучении фотонов. Оказывается, что переходы между найденными нами уровнями энергии, соответствующими сферически симметричным состояниям водородоподобного атома, являются *запрещенными*, т. е. не сопровождаются (дипольным) излучением. Для объяснения спектральных серий необходимо рассмотреть сферически несимметричные состояния водородоподобного атома и установить *правила отбора*. Это будет сделано ниже (см. § 39).

3. Для сравнения с теорией Бора найдем еще волновую функцию $\psi_1(r)$ основного состояния в сферически симметричном случае. Так называется стационарное состояние наименьшей энергии. Посмотрим, при каких значениях параметров $\mathscr{E}$ и a_1 уравнению (27.1) удовлетворяет экспоненциальная функция

$$\psi_1(r) = e^{-r/a_1}, \tag{27.9}$$

где $a_1 > 0$. Эта функция не имеет узлов. Поэтому, если $\psi_1(r)$ удовлетворяет уравнению Шредингера (27.1), то она и будет волновой функцией основного состояния. Дифференцируя $\psi_1(r)$ дважды по r и подставляя результаты в (27.1), получим

$$\frac{1}{a_1^2} - \frac{2}{a_1 r} + \frac{q}{r} - \beta^2 = 0.$$

Это соотношение должно выполняться тождественно по r, а потому должно быть

$$\frac{1}{a_1^2} = \beta^2, \quad \frac{2}{a_1} = q,$$

или на основании (27.2)

$$a_1 = \frac{\hbar}{mZe^2}, \quad \mathscr{E} = \mathscr{E}_1 = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2}. \tag{27.10}$$

Последнее выражение является частным случаем (27.8) при $n = 1$, как и должно быть для основного состояния. Параметр a_1 имеет размерность длины, при $Z = 1$ он обращается в боровский радиус. О физическом смысле этого параметра в квантовой механике будет сказано несколько ниже.

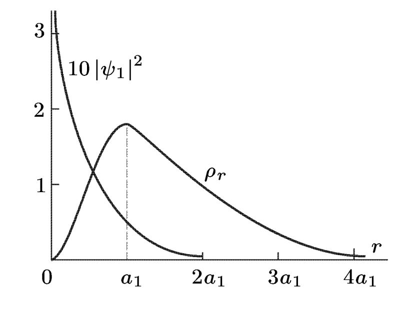


Рис. 49

Функция $\psi_1(r)$ при $r = 0$ обращается в единицу, т. е. остается конечной. Следовательно, при $r = 0$ $u(r) = r\psi_1(r) = 0$, как того требует и общая теория.

Если функция ψ_1 нормирована, то $|\psi_1|^2$ дает объемную плотность вероятности обнаружения электрона

в пространстве. Наряду с ней введем *радиальную плотность вероятности* ρ_r. Вероятность обнаружения электрона в сферическом слое между r и $r + dr$ равна объему этого слоя $4\pi r^2 dr$, умноженному на $|\psi_1|^2$, т. е. $4\pi r^2|\psi_1|^2\,dr$. Эту вероятность можно представить в виде $\rho_r dr$. Величина ρ_r и есть радиальная плотность вероятности — произведение $\rho_r dr$ дает вероятность того, что электрон будет обнаружен на расстоянии от ядра между r и $r + dr$. Таким образом,

$$\psi_1 = Ce^{-r/a_1},$$

$$\rho_r = 4\pi C^2 r^2 e^{-2r/a_1}.$$

Интегрируя второе выражение по r в пределах от 0 до $+\infty$ и приравнивая результат единице, находим нормировочную постоянную C и таким путем получаем

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi a_1^3}}\,e^{-r/a_1}, \quad \rho_r = \frac{4}{a_1^3}\,r^2 e^{-2r/a_1}. \tag{27.11}$$

На рис. 49 представлены графики кривых $|\psi_1|^2$ и ρ_r. Ординаты первой кривой увеличены в десять раз. Кривая ρ_r проходит через максимум при $r = a_1$. Следовательно, в квантовой механике радиус первой боровской орбиты надо истолковать как такое расстояние от ядра, на котором вероятность обнаружения электрона максимальна.

ЗАДАЧИ

1. Найти среднее расстояние $\overline{r}$, на каком будет обнаружен электрон от ядра атома, если последний находится в основном состоянии.

Ответ. $\overline{r} = (3/2)a_1$.

2. В той же задаче найти среднее значение $\overline{(1/r)}$ обратного расстояния электрона от ядра.

Ответ. $\overline{(1/r)} = 1/a_1$.

3. Найти средние значения потенциальной $\overline{U}$ и кинетической $\overline{\mathscr{E}}_{\text{кин}}$ энергий основного состояния водородоподобного атома.

Ответ. $\overline{U} = -Ze^2/a_1$; $\overline{\mathscr{E}}_{\text{кин}} = Ze^2/2a_1 = -\overline{U}/2$. Отметим, что такое же соотношение между U и $\mathscr{E}_{\text{кин}}$ получилось бы в классической механике для электрона, движущегося вокруг ядра по всякой круговой орбите.

4. Определить уровни энергии в сферически симметричном состоянии водородоподобного атома по числу узлов волновой функции, подобно тому как это было сделано в § 23 для гармонического осциллятора.

Решение. Волновые функции возбужденных состояний должны иметь узлы, число которых на единицу меньше номера соответствующего стационарного состояния. Этому условию для n-го стационарного состояния удовлетворяет выражение

$$\psi_n(r) = P_{n-1}(r)e^{-r/a_n},$$

где a_n — положительная постоянная, а $P_{n-1}(r)$ — полином степени $n-1$, все корни которого вещественны и различны. Необходимо, чтобы функция

$\psi_n(r)$ удовлетворяла уравнению Шредингера (27.1). Простым дифференцированием находим

$$\frac{d\psi_n}{dr} = \left(-\frac{1}{a_n} P_{n-1} + P'_{n-1}\right) e^{-r/a_n},$$

$$\frac{d^2\psi_n}{dr^2} = \left(\frac{1}{a_n^2} P_{n-1} - \frac{2}{a_n} P'_{n-1} + P''_{n-1}\right) e^{-r/a_n}.$$

После подстановки в (27.1) получаем

$$\frac{1}{a_n^2} P_{n-1} - \underline{\frac{2}{a_n} P'_{n-1}} + P''_{n-1} - \underline{\frac{2}{a_n} \frac{P_{n-1}}{r}} + \frac{2P'_{n-1}}{r} + \underline{\frac{qP_{n-1}}{r}} - \beta^2 P_{n-1} = 0.$$

Это соотношение должно выполняться тождественно по r. Старшую степень r^{n-1} содержат только первое и последнее слагаемые. Поэтому должно быть

$$1/a_n^2 = \beta^2 \quad \text{или} \quad 1/a_n = \beta.$$

Степень r^{n-2} содержат только подчеркнутые члены. При этом при взятии производной P_{n-1} появляется коэффициент $(n-1)$. С учетом этого

$$-\frac{2(n-1)}{a_n} - \frac{2}{a_n} + q = 0, \quad \text{или} \quad \frac{2n}{a_n} = q.$$

Таким образом,

$$a_n = \frac{2n}{q} = n\frac{\hbar^2}{mZe^2} = na_1,$$

$$\mathscr{E} = -\frac{\hbar^2\beta}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} = \frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2},$$

что совпадает с ранее полученными результатами.

Недостаток приведенного решения — в том, что мы не исследовали до конца, что наша функция $\psi_n(r)$ действительно является решением уравнения Шредингера. Для небольших n, подобно тому как это было сделано в § 23, нетрудно найти в явном виде полиномы $P_{n-1}(r)$ и соответствующие им постоянные a_n. Таким путем можно убедиться, что функции $\psi_n(r) = P_{n-1}(r)e^{-r/a_n}$ действительно удовлетворяют уравнению Шредингера. Можно проверить также, что все корни полинома $P_{n-1}(r)$ вещественные и некратные.

§ 28. Потенциальные барьеры

1. К задаче о квантовании энергии в потенциальных ямах примыкает задача о прохождении частицы через потенциальные барьеры. Ограничимся рассмотрением *одномерных потенциальных барьеров*, когда потенциальная функция U зависит только от одной координаты x. Потенциальным барьером такого типа называется ограниченная параллельными плоскостями область пространства, в которой потенциальная функция $U(x)$ больше, чем в примыкающих областях.

Начнем с простейшего идеализированного случая *прямоугольного потенциального барьера*, когда одна из его стенок удалена в бесконечность (рис. 50). Такой барьер может быть назван *ступенчатым*, так как потенциальная функция $U(x)$ в этом случае представляется

ступенчатой линией:

$$U(x) = \begin{cases} U_1 = \text{const} & \text{в области I}, \quad \text{где } x < 0, \\ U_2 = \text{const} & \text{в области II}, \quad \text{где } x > 0, \end{cases} \tag{28.1}$$

причем $U_2 > U_1$. На границу барьера слева с постоянной скоростью налетает частица или поток частиц. С классической точки зрения частица ведет себя по-разному в зависимости от того, будет ли ее полная энергия $\mathscr{E}$ больше или меньше U_2. В первом случае, когда $\mathscr{E} > U_2$, частица, достигнув границы барьера, будет продолжать движение в прежнем направлении, но с меньшей кинетической энергией. Во втором случае, когда $\mathscr{E} < U_2$, частица вообще не может проникнуть через границу барьера. Она отразится от него и начнет движение в обратном направлении с той же кинетической энергией.

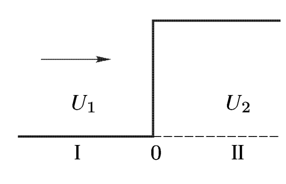


Рис. 50

2. Совсем иное решение задачи дает квантовая механика. Здесь движение частицы, хотя и символически, связано с распространением волны. Основное уравнение квантовой механики — уравнение Шредингера — описывает (и притом детерминистически) распространение именно *волн*, а не движение частиц. Переход же от поведения волн к движению частиц устанавливается *вероятностными законами*. Поэтому поставленная нами задача должна быть переформулирована, а затем решена для волн на основе уравнения Шредингера. Последнее мы будем записывать в виде

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \tag{28.2}$$

где

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(\mathscr{E} - U), \tag{28.3}$$

причем U имеет разные, но постоянные значения U_1 и U_2 по разные стороны границы барьера. Соответствующие им значения k обозначаются через k_1 и k_2.

Вместо потока частиц теперь надо предположить, что в области I к границе барьера распространяется плоская монохроматическая волна

$$\psi_1 = e^{i(k_1 x - \omega t)}.$$

Чтобы удовлетворялись граничные условия для ψ и $d\psi/dx$ на границе барьера, в области I должна существовать отраженная волна

$$\psi_1' = re^{-i(k_1 x + \omega t)},$$

а в области II — прошедшая волна

$$\psi_2 = de^{i(k_2 x - \omega t)}.$$

Амплитуда падающей волны принята равной единице, что, очевидно, не нарушает общности получаемых ниже результатов. Постоянные r

и d называются *амплитудными коэффициентами* отражения и пропускания волн. Для их определения заметим, что функция ψ и ее производная по x на границе барьера должны быть непрерывны. Это значит, что при $x = 0$ должны выполняться соотношения

$$\psi_1 + \psi_1' = \psi_2, \quad \frac{d}{dx}(\psi_1 + \psi_1') = \frac{d\psi_2}{dx},$$

или

$$1 + r = d, \quad k_1 - k_1 r = k_2 d.$$

Отсюда находим

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad d = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \tag{28.4}$$

Это такие же соотношения, но записанные в иной форме, которые были получены в оптике для *коэффициентов Френеля* (1788–1827) при нормальном падении света на границу раздела сред (см. т. IV, § 65, 69). Они справедливы не только при $U_2 > U_1$ (потенциальный барьер), но и при $U_2 < U_1$ (потенциальная яма).

3. Принципиальное отличие квантовомеханического решения от классического состоит в том, что в классической физике частица *локализована*, а в квантовой механике — нет. В классической физике говорят об энергии и состоянии частицы, когда она находится в определенном месте пространства, независимо от того, что происходит в остальных местах пространства. В квантовой механике это не так. Решение, даваемое квантовой механикой, — волна, есть понятие, относящееся *ко всему пространству*. Падающая волна органически связана с отраженной и прошедшей волнами. Нельзя выделить одну из этих волн, отвлекаясь от остальных. Полная энергия $\mathscr{E}$ относится не к какой-либо одной волне, а к *состоянию частицы в целом*, определяемому всеми тремя функциями ψ_1, ψ_1', ψ_2. Понимание этого обстоятельства позволяет избежать многих парадоксальных выводов, связанных с прохождением частиц через потенциальные барьеры.

Заметим еще, что задача об определении амплитудных коэффициентов отражения и пропускания волн есть чисто *детерминистическая задача*. Она формулируется и решается в стиле классической физики — на основе точно сформулированного уравнения Шредингера и соответствующих ему граничных условий. Но не эти коэффициенты определяют реальные величины, с которыми приходится иметь дело на опыте. На опыте измеряются *коэффициенты отражения и пропускания* не для волн, а *для частиц*. Они же связаны с амплитудными коэффициентами отражения и пропускания волн *вероятностными соотношениями*. Коэффициенты отражения и пропускания для частиц определяются ниже. Таким образом, отражение частиц от потенциального барьера и прохождение через него определяются вероятностными законами.

4. При сравнении квантовомеханического решения с классическим рассмотрим сначала случай $\mathscr{E} > U_2$. В этом случае все три волны — падающая, отраженная и прошедшая — *однородны*. Отличие квантового случая от классического состоит прежде всего в том, что в классическом случае нет отраженного потока частиц. В квантовом же

случае неизбежно появляется отраженная волна, а с ней и вероятность обнаружить частицу, движущуюся навстречу падающему потоку. Для однородной волны можно ввести понятие *плотности вероятности потока вещества*. В самом деле, *однородный поток не локализован*, он характеризуется определенной *плотностью импульса*, тогда как его координата совершенно не определена. Можно говорить и о *скорости распространения вероятности* такого потока. Она просто совпадает с классической скоростью и равна $v = p/m = \hbar k/m$. Наконец, плотность вероятности потока массы вещества равна $mv\psi^*\psi = \hbar k\psi^*\psi$. В падающей волне эта величина равна $\hbar k_1\psi_1^*\psi_1 = \hbar k_1$. Аналогично, плотности вероятности потока вещества в отраженной и прошедшей волнах равны соответственно $|r|^2\hbar k_1$ и $|d|^2\hbar k_2$. Отношение плотности вероятности потока массы в отраженной волне к плотности вероятности потока массы в падающей волне называется *коэффициентом отражения частицы* R. Аналогично определяется *коэффициент пропускания частицы* D. Он называется также *пропускаемостью* или *прозрачностью барьера*. Для этих величин находим

$$R = |r|^2 = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2, \quad D = \frac{k_2}{k_1}|d|^2 = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_1)^2}, \tag{28.5}$$

так что $R + D = 1$, в согласии с законом сохранения вещества.

5. Обратимся теперь к случаю, когда $\mathscr{E} < U_2$. В этом случае формулы (28.4), конечно, также остаются справедливыми. Остается справедливой и первая формула (28.5), поскольку отраженная волна по-прежнему однородна. Однако величина k_2 будет *чисто мнимой*, так что волна во второй области станет *неоднородной*. В первой же формуле (28.5) числитель и знаменатель будут величинами комплексно сопряженными. Значит, $R = 1$, т. е. отражение частиц становится *полным*, как и в аналогичном случае в оптике. Однако волна во второй области не исчезает. Действительно, полагая $k_2 = i\alpha$, для этой волны получаем

$$\psi_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}\, e^{-\alpha x}e^{-i\omega t}, \tag{28.6}$$

т. е. амплитуда волны в области II экспоненциально затухает при удалении от границы раздела областей. Глубина проникновения l определяется как расстояние, на котором плотность вероятности потока вещества убывает в e раз. Для нее получаем

$$l = \frac{1}{2\alpha} = \frac{\lambda_2}{4\pi}, \tag{28.7}$$

где

$$\lambda_2 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(U_2 - \mathscr{E})}} = \frac{h}{\sqrt{2m(U_2 - \mathscr{E})}}. \tag{28.8}$$

Таким образом, волна проникает в область II, несмотря на то, что она отражается полностью, а вероятность отражения частицы обращается в единицу. Разрешение возникающего здесь кажущегося парадокса в точности такое же, как и в случае полного отражения света

(см. т. IV, § 66). Наше решение относится к *стационарному состоянию*, поскольку оно основано на уравнении Шредингера именно для таких состояний. Проникновение же волны во вторую область происходит в переходный период, когда состояние во времени еще не установилось. В этот переходный период полного отражения волны еще не может быть. Исследование же переходного периода может быть осуществлено на основе уравнения Шредингера, но уже для нестационарных состояний (21.5).

6. Подчеркнем еще раз, что в найденном нами стационарном состоянии, описываемом тремя волновыми функциями ψ_1, ψ_1', ψ_2 частица не локализована. Она может с той или иной вероятностью находиться в любой точке пространства. Общим для всего этого состояния является параметр $\mathscr{E}$, названный нами *полной энергией* частицы. Следует с осторожностью отождествлять это понятие с полной энергией, как она понимается в классической механике. Так, мы уже указывали, что в квантовой механике не всегда имеет смысл деление полной энергии на кинетическую и потенциальную (см. § 20, п. 8). Чтобы определить параметр $\mathscr{E}$ надо произвести *измерение*, т. е. как-то воздействовать на частицу.

7. Рассмотрим сначала состояние частицы в части пространства I. Оно представляет собой суперпозицию двух плоских монохроматических волн ψ_1 и ψ_1', распространяющихся навстречу друг другу. Их волновые числа имеют определенные значения, одинаковые по величине. Поэтому одинаковы по величине и импульсы, соответствующие обеим волнам. Измеряя импульс, когда частица находится в части пространства I, мы найдем, что он с той или иной вероятностью равен либо $p_1 = \hbar k_1$, либо $p_1' = -\hbar k_1$. Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга определенность импульса в каждой волне связана с тем, что *частица не локализована*. Действительно, неопределенность координаты Δx бесконечно велика, и потому, согласно соотношению (20.2), неопределенность импульса Δp для каждой волны обращается в нуль. Учитывая соотношение $p = \hbar k$, формулу (28.3) можно переписать в виде

$$\mathscr{E} = \frac{p^2}{2m} + U, \tag{28.9}$$

т. е. $\mathscr{E}$, как и в классической механике, равна сумме кинетической и потенциальной энергии. Такое совпадение с классической механикой обусловлено тем, что потенциальная функция U_1 во всем пространстве I постоянна, т. е. это пространство свободно от сил. К тому же результату мы придем и в пространстве II, если только в этом пространстве $\mathscr{E} > U_2$, и, следовательно, волна однородна.

8. Рассмотрим теперь область II в случае, когда $\mathscr{E} < U$. Вероятность обнаружить частицу в области II в этом случае рассматривалась как парадокс. Основанием для этого является соотношение (28.9), из которого следует, что всегда $\mathscr{E} > U$, так как кинетическая энергия $p^2/2m$ существенно положительна. Однако, как уже неоднократно

подчеркивалось, формула (28.9) есть *соотношение классической механики* и неприменима при $\mathscr{E} < U$. В этом случае волна де Бройля неоднородна и обычные выражения импульса и кинетической энергии частицы теряют смысл. Однако обнаружить частицу в области II возможно, поскольку вероятность такого обнаружения не обращается в нуль, а лишь экспоненциально убывает по мере удаления от границы барьера в сторону положительных x. Обнаружить частицу — это значит указать границы, между которыми она окажется в результате обнаружения. Практически частицу можно обнаружить только в тонком поверхностном слое вблизи границы барьера, толщина которого порядка глубины проникновения l. Величина l и может быть принята за неопределенность координаты после обнаружения частицы. Неопределенность импульса обозначим через Δp. Тогда в силу соотношения неопределенностей (20.4)

$$\overline{\Delta p^2} \cdot l^2 \geqslant \frac{\hbar^2}{4}.$$

Подставляя сюда значение l из (28.7) и (28.8), получим

$$\frac{\overline{\Delta p^2}}{2m} \geqslant U_2 - \mathscr{E},$$

т. е. для локализации частицы в области II в слое толщины l ей необходимо сообщить кинетическую энергию, величина которой во всяком случае не меньше $U_2 - \mathscr{E}$, т. е. положительна. Такую энергию частица может, например, получить при освещении ее световым квантом достаточно короткой длины волны (эффект Комптона). Понятно, что такая локализация меняет квантовое состояние частицы. После взаимодействия со световым квантом волновая функция частицы будет отличаться от нуля только внутри выбранного нами слоя толщины l, обращаясь в нуль вне этого слоя.

Не обязательно, чтобы слой толщины l, в котором обнаруживается частица, располагался у края барьера. Он может быть расположен где угодно в области II. От его положения зависит лишь величина вероятности обнаружения частицы в слое. Но энергия, которую надо сообщить частице при ее локализации в слое толщины l, *зависит только от толщины слоя*, а не от его положения. Толщина же слоя определяется экспонентой $e^{-2\alpha l}$ и от положения слоя не зависит.

Иллюстрируем роль измерения еще на следующем примере. Частица должна быть локализована внутри слоя толщины l. С этой целью осветим ее пучком света, распространяющимся вдоль слоя перпендикулярно к оси X. Если произойдет рассеяние света, то это и будет означать, что частица в момент рассеяния была локализована внутри рассматриваемого слоя. Из оптики известно, что длина световой волны для локализации должна быть короче l, т. е. $\lambda < l$. Из формул (28.7) и (28.8) получаем

$$\lambda < \frac{h}{4\pi\sqrt{2m(U_2 - \mathscr{E})}},$$

или

$$(hc/\lambda)^2 \equiv (h\nu)^2 > 32\pi^2 mc^2(U_2 - \mathscr{E}).$$

Нерелятивистская механика применима к процессам, когда энергия светового кванта $h\nu$ мала по сравнению с собственной энергией частицы mc^2. Поэтому, разделив левую часть предыдущего неравенства на меньшую величину $h\nu$, а правую на бо́льшую $32\pi^2 mc^2$, получим

$$h\nu > U_2 - \mathscr{E}.$$

Таким образом, для локализации должны применяться световые кванты, энергия которых во всяком случае не меньше разности между потенциальной и полной энергиями частицы. Это находится в согласии с тем, что было сказано выше.

9. Заканчивая рассмотрение ступенчатого барьера, выведем некоторые общие соотношения, связывающие амплитудные коэффициенты отражения и пропускания волн де Бройля на границе барьера. Если переменить на противоположные направления распространения всех волн де Бройля без изменения их амплитуд, то уравнение Шредингера и соответствующие ему граничные условия будут по-прежнему удовлетворены. Отсюда следует, что если возникло состояние, изображенное на рис. 51 *а*, то возможно также и состояние, изображенное на рис. 51 *б*. На этих рисунках каждая волна де Бройля представлена двумя символами. Первый из них представляет амплитуду, а второй — волновое число соответствующей волны, распространяющейся в положительном или отрицательном направлении оси X. Направления распространения волн обозначены стрелками. На рис. 51 *а* есть только одна, а на рис. 51 *б* — две падающие волны. Обозначим через r' и d' амплитудные



Рис. 51

коэффициенты отражения и пропускания, когда падающая волна распространяется справа налево из области II к области I. Падающая волна (r, k_1) дает отраженную волну $(r^2, -k_1)$. Падающая волна $(d, -k_2)$ возбуждает проходящую волну $(dd', -k_1)$. Обе возбужденные волны должны при наложении дать уходящую волну $(1, -k_1)$. Таким образом, должно быть

$$r^2 + dd' = 1. \tag{28.10а}$$

Аналогично, волна (r, k_1) возбуждает проходящую волну (rd, k_2), а волна $(d, -k_2)$ — отраженную волну (dr', k_2). Обе возбужденные волны должны гасить друг друга, т. е. $rd + dr' = 0$, откуда

$$r' = -r. \tag{28.10б}$$

Соотношения (28.10а) и (28.10б) справедливы как для однородных, так и для неоднородных волн. Они были уже получены в т. IV (§ 67)

для световых волн. Применим их к прямоугольному потенциальному барьеру (или яме) конечной ширины.

Барьер вместе с падающей волной изображен на рис. 52 *а*. Более детальная картина падающей, прошедших и отраженных волн представлена на рис. 52 *б*. Для волн и их направлений примем те же обозначения, что и на рис. 51. Амплитудные коэффициенты отражения и прохождения волн (слева направо) на первой границе обозначим через r_1 и d_1, на второй — через r_2 и d_2. Для обратного направления волн (справа налево) те же коэффициенты обозначим через r'_1, d'_1, r'_2, d'_2. Результирующие амплитудные коэффициенты отражения и пропускания волн для всего барьера обозначим соответственно через r и d. Все волны, которые возникнут внутри и вне барьера, представлены на рис. 52 *б*. Внутри барьера в противоположных направлениях будут распространяться две волны: (a, k) и $(b, -k)$. На левой границе барьера, как видно из рисунка, сходятся четыре волны, а на правой — три волны. Написав граничные условия — непрерывность ψ и $d\psi/dx$ на каждой границе барьера, — мы получим четыре уравнения первой степени, из которых могут быть найдены все неизвестные амплитуды r, a, b, d. Однако выкладки упростятся, а результаты выразятся в более краткой и компактной форме, если поступить несколько иначе.

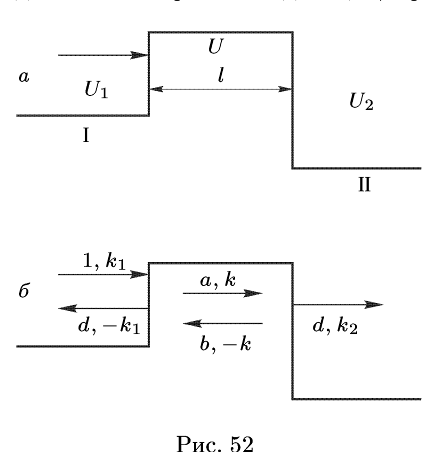


Рис. 52

10. Рассмотрим сначала условия на левой границе барьера. Примем эту границу за начало координат. К ней подходят две волны: $(1, k_1)$ слева и $(b, -k)$ справа. Обе волны отражаются от рассматриваемой границы барьера и частично проходят через нее. В результате наложения отраженной и прошедшей волн в первой области должна получиться результирующая отраженная волна $(r, -k_1)$, а внутри барьера — волна (a, k). Таким образом, должно быть

$$r = r_1 + d'_1 b, \quad a = d_1 + r'_1 b. \tag{28.11}$$

Аналогично поступаем на второй границе барьера. Только теперь начало координат надо перенести на вторую границу и соответственно этому преобразовать амплитуды сходящихся на ней волн. Амплитуды волн, изображенных на рис. 52 *б*, отнесены к началу координат, помещенному на левой границе. Соответствующие координаты обозначены через x, а координаты относительно начала, помещенного на второй границе, обозначим через x'. Эти координаты связаны соотношением $x = x' + l$. При прежнем выборе начала координат волны, сходящиеся

на правой границе барьера, представляются выражениями

$$ae^{ikx}, \quad be^{-ikx}, \quad de^{ik_2x}$$

(временной множитель $e^{-i\omega t}$ мы опускаем). При замене x через x' те же выражения преобразуются в

$$(ae^{ikl})e^{ikx'}, \quad (be^{-ikl})e^{-ikx'}, \quad (de^{ik_2l})e^{ik_2x'}.$$

Теперь роль амплитуд волн играют выражения, заключенные в круглых скобках. В результате условия на правой границе барьера принимают вид

$$de^{ik_2l} = d_2ae^{ikl}, \quad be^{-ikl} = r_2ae^{ikl}. \tag{28.12}$$

Из уравнений (28.11) и (28.12) можно найти все неизвестные r, d, a, b. Из них представляют интерес прежде всего r и d. С учетом соотношений $r_1' = -r_1$ и $r_1^2 + d_1d_1' = 1$ для них находим

$$r = \frac{r_1 + r_2e^{2ikl}}{1 + r_1r_2e^{2ikl}}, \quad d = \frac{d_1d_2e^{-i(k_2-k)l}}{1 + r_1r_2e^{2ikl}}. \tag{28.13}$$

11. Пользуясь этими формулами, можно рассчитать коэффициенты отражения и пропускания для частиц. Рассчитаем коэффициент пропускания D. Предположим, что вне барьера $U_1 < \mathscr{E}$ и $U_2 < \mathscr{E}$, тогда как внутри барьера $U > \mathscr{E}$. Тогда обе величины

$$k_1 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(\mathscr{E} - U_1)} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(\mathscr{E} - U_2)}$$

вещественны и положительны, внутри же барьера $k = i\alpha$, где

$$\alpha = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U - \mathscr{E})}.$$

Далее,

$$r_1 = \frac{k_1 - k}{k_1 + k} = \frac{k_1 - i\alpha}{k_1 + i\alpha}, \quad r_2 = \frac{k - k_2}{k + k_2} = \frac{i\alpha - k_2}{i\alpha + k_2},$$

$$d_1 = \frac{2k_1}{k_1 + k} = \frac{2k_1}{k_1 + i\alpha}, \quad d_2 = \frac{2k}{k + k_2} = \frac{2i\alpha}{k_2 + i\alpha}.$$

Коэффициент пропускания частицы, согласно (28.5), вычисляется по формуле

$$D = \frac{k_2}{k_1}\,|d|^2 = \frac{k_2}{k_1}\,dd^*. \tag{28.14}$$

Простые, но несколько длинные вычисления приводят к результату

$$D = \frac{16k_1k_2\alpha^2}{(k_1^2 + \alpha^2)(k_2^2 + \alpha^2)(e^{2\alpha l} + e^{-2\alpha l}) + 2(\alpha^2 - k_1k_2)}. \tag{28.15}$$

В большинстве интересующих нас случаев экспонентой $e^{-2\alpha l}$ в знаменателе можно пренебречь. Допустим, например, что $U - \mathscr{E} = 50$ эВ $=$ $= 0{,}8\cdot10^{-10}$ эрг. Тогда для электрона $\alpha = 3{,}64\cdot10^8$ см$^{-1}$, $e^{2\alpha l} = 1{,}45\cdot10^3$, $e^{-2\alpha l} = 0{,}69\cdot10^{-3}$. Можно также пренебречь слагаемым $2(\alpha^2 - k_1k_2)$, так как оно того же порядка, что и коэффициент $(k_1^2 + \alpha^2)(k_2^2 + \alpha^2)$.

В результате получается простая формула

$$D = D_0 e^{-2\alpha l} = D_0 \exp\left[-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m(U-\mathscr{E})}\right], \tag{28.16}$$

где коэффициент D_0 слабо меняется с изменением l, $\mathscr{E}$, U_1, U_2. Его можно принять постоянным и в большинстве интересных случаев считать порядка единицы.

Если частица падает на барьер с одной стороны, то по классическим представлениям при $U > \mathscr{E}$ она не может появиться с другой стороны. Напротив, согласно квантовой механике это возможно. Частица как бы проходит по туннелю через классически запрещенную область $U > \mathscr{E}$. Это явление получило название *туннельного эффекта.* Если при этом $U_1 = U_2$ (симметричный прямоугольный потенциальный барьер), то кинетическая энергия, с которой частица появляется за барьером, равна начальной кинетической энергии, с которой она падала на барьер. Начало представления о туннельных переходах было заложено в 1927 г. Л. И. Мандельштамом и М. А. Леонтовичем (1903–1981). Они на основе уравнения Шредингера рассмотрели проблему квантования для ангармонического осциллятора, у которого потенциальная функция $U = (1/2)kx^2$ при $|x| < a$ и $U = \text{const}$ при $|x| > a$.

12. Мы рассмотрели потенциальный барьер прямоугольной формы (см. рис. 52). Это было сделано только с целью математического упрощения задачи. Ничего принципиального при этом потеряно не было. Для полноты рассмотрим теперь потенциальный барьер, в котором U является произвольной функцией x. Пример такого барьера приведен на рис. 53. Горизонтальная прямая $U(x) = \mathscr{E}$ пересекает кривую барьера в двух точках с абсциссами x_1 и x_2. Аппроксимируем кривую барьера над этой прямой ступенчатой линией. Тогда вся площадь, где $\mathscr{E} < U$, разобьется на заштрихованные прямоугольники, каждый из которых можно рассматривать как прямоугольный потенциальный барьер. Пусть ширина одного из таких прямоугольников равна dx, а высота $U(x)$. Если dx взять достаточно большим, то коэффициент пропускания такого прямоугольного барьера представится выражением

$$D_0' \exp\left[-\frac{2dx}{\hbar}\sqrt{2m(U-\mathscr{E})}\right].$$

Коэффициент пропускания всего барьера получится путем перемножения выражений такого вида. При этом показатели степеней сложатся, и мы придем к выражению вида

$$D = D_0 \exp\left[-\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-\mathscr{E})}\,dx\right]. \tag{28.17}$$

Эту приближенную формулу можно обосновать и математически более строго.

Туннельным прохождением через потенциальный барьер объясняются многие физические явления. Сюда относятся разбираемые в следующем параграфе контактная разность потенциалов и холодная эмис-

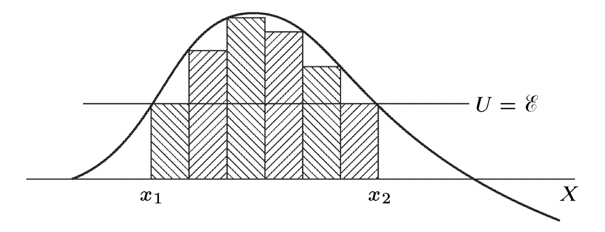


Рис. 53

сия электронов из металлов. Сюда же относятся такие явления, как α-распад, спонтанное деление атомных ядер, ядерные реакции, когда по классическим представлениям кинетической энергии сталкивающихся ядер недостаточно для преодоления кулоновского потенциального барьера между ними, и т. д. Эти явления будут разобраны в ядерной физике.

ЗАДАЧА

В прямоугольном барьере (или яме) $U_1 = U_2$. При каком условии частица не будет отражаться от потенциального барьера (ямы)?

Ответ. Полная энергия $\mathscr{E}$ должна быть больше потенциальной энергии U частицы внутри барьера (ямы). Толщина барьера (ямы) должна быть $l = (1/4)\lambda,\ (3/4)\lambda,\ (5/4)\lambda, \ldots$, где $\lambda = h/\sqrt{2m(\mathscr{E} - U)}$ — длина волны де Бройля внутри барьера (ямы).

§ 29. К объяснению контактной разности потенциалов. Холодная эмиссия электронов из металлов

1. Будем исходить из простейшей модели металла — модели *свободных электронов.* Согласно этой модели электроны в металле ведут себя как газ невзаимодействующих частиц, движущихся в свободном от поля пространстве. Электроны удерживаются в металле силами отталкивания, возникающими при приближении электронов к стенке металла. В такой модели металл можно рассматривать как потенциальную яму, в которой заперты электроны. Для простоты будем считать яму прямоугольной определенной глубины. Мы не можем дать удовлетворительное обоснование и указать границы применимости такой модели. Особое удивление вызывает то, что электрические силы взаимодействия между электронами не учитываются, хотя они отнюдь не малы. Возможность отвлекаться от таких сил, по-видимому, связана с тем, что взаимодействие между электронами не меняет числа энергетических уровней системы. Последнее определяется только *общим числом электронов*, а не силами взаимодействия между ними. Для

ряда явлений, по крайней мере при их качественном рассмотрении, существенно именно общее число энергетических уровней, а не их точное расположение. Разумеется, как и всякая модель, модель свободных электронов объясняет отнюдь не все свойства металлов. Однако ряд явлений объясняется этой моделью правильно, по крайней мере качественно.

На рис. 54 представлена модель металла в виде прямоугольной потенциальной ямы. Внутри металла (т. е. на дне потенциальной ямы) потенциальная функция принята равной нулю, на стенках ямы она скачкообразно меняется до постоянного значения $U_0 > 0$. Конечно, энергетические уровни электрона внутри ямы дискретны, хотя в макроскопических кусках металла и расположены очень густо. Собственно говоря, нельзя сказать, что в модели свободных электронов между электронами нет никакого взаимодействия. Оно имеется. Но это не есть силовое взаимодействие, а взаимодействие особого рода, которое не может быть понято в рамках классической механики. О нем подробно говорится в гл. VI. Такое взаимодействие проявляется в том, что в каждом квантовом состоянии системы может находиться не более одного электрона. Это положение называется *принципом Паули* (1900–1958). Под квантовым состоянием в рассматриваемом нами вопросе следует понимать энергетический уровень электрона (с одним уточнением: допустимое число электронов на энергетическом уровне должно быть удвоено из-за наличия у них спина; но это обстоятельство в разбираемых сейчас вопросах не играет роли, и мы его учитывать не будем).

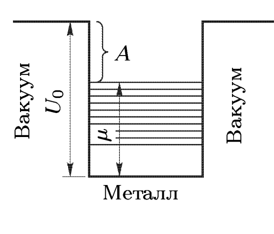


Рис. 54

Будем теперь последовательно заполнять потенциальную яму электронами в предположении, что температура системы равна абсолютному нулю. Первый электрон займет самый нижний (нулевой) уровень энергии. Второй электрон расположится на втором энергетическом уровне и т. д. Последний электрон соответствует такому состоянию металла, когда он сделается электрически нейтральным. Этот электрон займет наивысший уровень энергии μ, называемый *уровнем* или *энергией Ферми* (1901–1954). Таким образом, ниже уровня Ферми все энергетические уровни потенциальной ямы заполнены, а выше — свободны. Напомним, что при этом температура металла предполагается равной абсолютному нулю. Чтобы удалить электрон из металла с уровня Ферми, необходимо затратить работу, не меньшую

$$A = U_0 - \mu. \tag{29.1}$$

Это и есть *работа выхода* электрона из металла. Разумеется формула (29.1) остается справедливой и тогда, когда величины U_0 и μ отсчитываются не от дна ямы, а от произвольно выбранного уровня.

2. Обратимся теперь к объяснению *контактной разности потенциалов*, открытой еще Вольтой (1745–1827). Рассмотрим два разных металла I и II (рис. 55 *а*). Дно обеих потенциальных ям и все уровни

энергии условимся отсчитывать от одного и того же общего уровня. Дно потенциальной ямы первого металла, вообще говоря, не будет совпадать с дном потенциальной ямы второго металла. То же самое

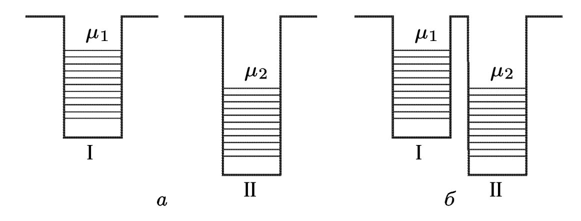


Рис. 55

относится к соответствующим уровням Ферми. Пусть, например, уровень Ферми первого металла расположен выше, чем у второго металла. Сблизим оба металла друг с другом, чтобы зазор между ними стал порядка атомных расстояний, т. е. 10^{-8} см (рис. 55 *б*). Тогда в зазоре между металлами образуется узкий потенциальный барьер, через который электроны с заметной вероятностью могут переходить из одного металла в другой. Переход электронов из металла I в металл II действительно будет осуществляться. Однако обратный переход из металла II в металл I невозможен, так как все уровни энергии, на которые могли бы переходить электроны из металла II, в металле I уже заполнены. В результате металл I будет терять электроны и заряжаться положительно, его потенциал начнет повышаться, а уровень Ферми понижаться. Наоборот, металл II, приобретая электроны, начнет заряжаться отрицательно, его потенциал будет уменьшаться, а уровень Ферми подниматься. Статистическое равновесие установится, когда уровни Ферми обоих металлов сравняются. Но это есть как раз то условие, на основе которого в томе III (§ 104) было подробно рассмотрено возникновение контактной разности потенциалов, как внутренней, так и внешней. Поэтому нет надобности продолжать дальнейшее изложение, а достаточно ограничиться ссылкой на указанный параграф тома III. Здесь же важно было подчеркнуть только то, что процесс установления равновесного состояния осуществляется путем *туннельных переходов* электронов через потенциальный барьер.

3. Перейдем теперь к рассмотрению эмиссии электронов из металлов. Когда температура металла делается достаточно высокой (выше ~ 1000 °C), появляются быстрые электроны, способные преодолевать задерживающий потенциал и выходить из металла. Это — *термоэлектронная эмиссия* (см. т. III, § 101). Однако эмиссия электронов может происходить и из *холодного* металла. Для этого нормально к поверхности металла надо приложить сильное электрическое поле (порядка 10^6 В/см), направленное к металлу. Такая эмиссия называется *холодной.* Объяснение этого явления, в общих чертах согласующееся с опытом, основано на теории прохождения электронов через потенциальный барьер.

В отсутствие внешнего электрического поля потенциальная энергия электрона представляется на рис. 56 ступенчатой линией $AOBC$, причем начало координат O помещено на стенке металла. Внутри металла потенциальная энергия принята равной нулю, вне металла она постоянна и равна C. Если наложить внешнее электрическое поле E, направленное к металлу, то в металл оно не проникнет, и потенциальная энергия электрона в металле по-прежнему будет равна нулю. Снаружи же металла к потенциальной энергии C добавится потенциальная энергия электрона во внешнем электрическом поле, равная $-eEx$ (заряд электрона обозначен через $-e$). Она изображена наклонной прямой BM. В результате полная потенциальная функция электрона во внешнем поле представляется выражениями

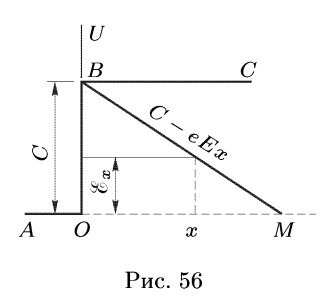


Рис. 56

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ C - eEx & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Между металлом и вакуумом возникает потенциальный барьер OBM. Выделим в металле группу электронов с энергией, близкой к $\mathscr{E}_x$. Проницаемость барьера для электронов с такой энергией найдется по формуле (28.17), в которой следует положить $x_1 = 0$. Здесь x_2 найдется из уравнения $C - eEx_2 = \mathscr{E}_x$, которое дает $x_2 = (C - \mathscr{E}_x)/eE$. Задача сводится к вычислению интеграла

$$S = \int_0^{x_2} \sqrt{2m[U(x) - \mathscr{E}_x]}\, dx = \int_0^{x_2} \sqrt{2m(C - eEx - \mathscr{E}_x)}\, dx = \\ = \frac{2}{3}\sqrt{2m}\, \frac{(C - \mathscr{E}_x)^{3/2}}{eE}.$$

Таким образом, коэффициент прозрачности барьера для электронов с энергией $\mathscr{E}_x$ выражается формулой

$$D(\mathscr{E}_x) = D_0 \exp\left\{-\frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\,\frac{(C - \mathscr{E}_x)^{3/2}}{eE}\right\}. \tag{29.2}$$

Коэффициент этот имеет несколько разные значения для различных $\mathscr{E}_x$. Можно ввести средний или *эффективный коэффициент прозрачности барьера* путем соответствующего усреднения по $\mathscr{E}_x$ (чтобы получился тот же ток эмиссии). Всякое усреднение сводится к усреднению выражения вида $D_0 \exp\,[-f(\mathscr{E}_x)/E]$, где смысл функции $f(\mathscr{E}_x)$ легко устанавливается сравнением с формулой (29.2). Поскольку усреднение производится по $\mathscr{E}_x$ при фиксированном E, усреднению фактически подлежит функция $f(\mathscr{E}_x)$. Эта функция положительна, так как $C > \mathscr{E}_x$, а потому после усреднения ее можно представить в виде

экспоненциального выражения. В результате для усредненного коэффициента прозрачности барьера получаем

$$\overline{D} = \overline{D}_0 e^{-E_0/E}, \tag{29.3}$$

где $\overline{D}_0$ и E_0 — постоянные, зависящие от рода металла. Ток холодной эмиссии выражается формулой

$$I(E) = I_0\overline{D} = Ae^{-E_0/E}. \tag{29.4}$$

Именно такая зависимость тока холодной эмиссии от напряженности внешнего приложенного электрического поля была экспериментально подтверждена П. И. Лукирским.

Классическую теорию холодной эмиссии и ее сравнение с опытом см. в задаче к этому параграфу.

ЗАДАЧА

Холодную эмиссию электронов из металла пытались объяснить классически влиянием силы электрического изображения $e^2/4x$, с которой электрон притягивается к поверхности металла (см. т. III, § 23, п. 2). С учетом этой силы потенциальная энергия электрона вблизи поверхности металла на расстоянии x от нее представляется выражением $U = C - eEx - e^2/4x$. Учет этой силы понижает потенциальный барьер, который должен преодолеть электрон, чтобы выйти из металла, т. е. уменьшает работу выхода. Рассчитать это уменьшение и оценить напряженность внешнего электрического поля, начиная с которого должна была бы происходить холодная эмиссия. Провести численный расчет для вольфрама. Работа выхода для вольфрама $A = 4{,}5$ эВ.

Решение. Функция U достигает максимума при $x = (1/2)\sqrt{e/E}$, который равен

$$U_{\text{макс}} = C - \sqrt{Ee^3}.$$

Отсюда видно, что сила электрического изображения уменьшает высоту барьера, а с ней и величину работы выхода на величину $\sqrt{Ee^3}$. Новая работа выхода $A' = A - \sqrt{Ee^3}$. Холодная эмиссия начинается, когда $A' = 0$. Это дает

$$E = \frac{A^2}{e^3} = \frac{V^2}{e}. \tag{29.5}$$

Последнее выражение получается из предыдущего, если работу выхода выразить через соответствующее напряжение V по формуле $A = eV$. Для вольфрама $V = 4{,}5$ В $= 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ СГСЭ,

$$E = \frac{2{,}25 \cdot 10^{-4}}{4{,}8 \cdot 10^{-10}} = 0{,}469 \cdot 10^6 \text{ СГСЭ } = 1{,}41 \cdot 10^8 \text{ В/см}.$$

Между тем Милликен получал сильные токи холодной эмиссии уже при $E \approx 4 \cdot 10^6$ В/см.

Глава V
ДАЛЬНЕЙШЕЕ ПОСТРОЕНИЕ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И СПЕКТРЫ

§ 30. Операторный метод

1. *Операторный метод* широко распространен в большинстве исследований квантовой механики, а потому необходимо сообщить краткие сведения о нем. Это тем более необходимо для того, чтобы дать законченную форму связи символов квантовой механики с реально наблюдаемыми величинами.

Под *оператором* понимают символ, который при действии на функцию некоторых переменных дает новую функцию тех же переменных. Примерами такого действия может служить умножение на x или на какую-либо функцию $f(x)$. Рассматриваемые с этой точки зрения символы x и $f(x)$ являются операторами. Для отличия от чисел их обозначают через $\widehat{x}$ и $\widehat{f}(x)$, т. е. ставят шляпку над x и $f(x)$. Другим примером оператора может служить дифференцирование по x, т. е. $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}, \ldots$

Операторы можно складывать. Под *суммой операторов* $\widehat{A}+\widehat{B}$ понимают такой оператор, действие которого на любую функцию $f(x)$ дает результат $\widehat{A}f(x)+\widehat{B}f(x)$. Под *произведением операторов* $\widehat{A}\widehat{B}$ понимают оператор, результат действия которого на любую функцию $f(x)$ равен $\widehat{A}[\widehat{B}f(x)]$. Здесь функция $f(x)$ сначала подвергается действию оператора $\widehat{B}$, а затем на полученный результат действует оператор $\widehat{A}$. Частным случаем произведения операторов является произведение оператора $\widehat{A}$ на число λ, т. е. либо $\lambda\widehat{A}$, либо $\widehat{A}\lambda$, ибо всякое число можно рассматривать как частный случай оператора. В алгебре операторов не всегда соблюдается коммутативный закон относительно умножения. Это значит, что не всегда $\widehat{A}\widehat{B}=\widehat{B}\widehat{A}$. Если такое равенство соблюдается, то говорят, что операторы $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ *коммутируют* друг с другом. Иначе их называют *коммутирующими операторами*. В противном случае операторы A и B *не коммутируют* и называются *некоммутирующими* или антикоммутирующими. Примером некоммутирующих операторов могут служить умножение на x и дифференцирование по x. Действительно,

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)f = x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\,x\right)f = \frac{\partial}{\partial x}\,(xf) = f + x\frac{\partial f}{\partial x},$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial x}\,x - x\frac{\partial}{\partial x} = 1. \tag{30.1}$$

Эти определения позволяют по заданным операторам $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ строить другие операторы $\widehat{L}(\widehat{A}, \widehat{B})$, являющиеся их функциями. Определение это имеет смысл только для *целых рациональных функций* операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$. Достаточность такого ограничения в этом построении связана с тем, что именно при таком ограничении в классической физике определяют новые физические величины через другие, ранее введенные физические величины.

Сложение и умножение операторов производится по обычным алгебраическим правилам сложения и умножения чисел. Единственное отличие состоит в том, что при умножении операторов не всегда можно переставлять порядок сомножителей. Например, всегда

$$(\widehat{A} + \widehat{B})^2 = (\widehat{A} + \widehat{B})(\widehat{A} + \widehat{B}) = \widehat{A}^2 + \widehat{B}\widehat{A} + \widehat{A}\widehat{B} + \widehat{B}^2.$$

В общем виде было бы неправильно писать

$$(\widehat{A} + \widehat{B})^2 = \widehat{A}^2 + 2\widehat{A}\widehat{B} + \widehat{B}^2.$$

Такая формула верна только тогда, когда операторы $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ коммутируют между собой, ибо при $\widehat{B}\widehat{A} = \widehat{A}\widehat{B}$ она получается из предыдущей. Но в случае некоммутирующих операторов эта формула неверна, ибо в этом случае $\widehat{B}\widehat{A} \neq \widehat{A}\widehat{B}$.

Оператор $\widehat{A}$ называется *линейным*, если для любых двух функций f и φ и любых постоянных λ и μ соблюдается соотношение

$$\widehat{A}(\lambda f + \mu\varphi) = \lambda\widehat{A}f + \mu\widehat{A}\varphi.$$

В квантовой механике применяются только линейные операторы. В противном случае нарушался бы *принцип суперпозиции состояний.*

2. Предположим теперь, что многократно производится измерение координаты x частицы, причем частица, поскольку это позволяет опыт, всякий раз приводится в *одинаковые макроскопические условия.* Тогда состояние частицы в этих опытах можно характеризовать волновой функцией $\Psi(x)$, которую мы ради простоты будем считать функцией только одной пространственной координаты x. Среднее значение координаты, которое будет найдено в результате измерений, можно записать в виде

$$\langle x\rangle = \int x\Psi^*\Psi\,dx,$$

ибо $\Psi^*\Psi\,dx$ есть вероятность того, что частица будет обнаружена в интервале $x, x + dx$. При этом необходимо оговорить, что функция $\Psi(x)$ всюду конечна, отлична от нуля в ограниченной области пространства и нормирована к единице, т. е.

$$\int \Psi^*\Psi\,dx = 1, \tag{30.2}$$

где интегрирование производится по всему пространству, в котором Ψ отлична от нуля. Выражение для среднего значения $\langle x\rangle$ мы предпочитаем записать в виде

$$\langle x\rangle = \int \Psi^* \widehat{x} \Psi \, dx. \tag{30.3}$$

Совершенно так же вычисляется среднее значение функции $f(x)$, т. е. по формуле

$$\langle f(x)\rangle = \int \Psi^*(x) \widehat{f}(x) \Psi(x) \, dx, \tag{30.4}$$

в которой $f(x)$ рассматривается как оператор.

Если состояние Ψ меняется во времени, то формула (30.4) дает среднее значение для определенного момента времени. В этом случае в функции $\Psi(x,t)$ следует время t рассматривать как *параметр*, т. е. при взятии интеграла его следует считать постоянным.

3. Как же вычислять по волновой функции $\Psi(x)$ средние значения импульса частицы или средние значения целых рациональных функций от импульса? Будем предполагать, что в каждый момент времени функция $\Psi(x)$ всюду конечна и отлична от нуля в ограниченной области пространства, а потому может быть нормирована согласно формуле (30.2). В целях математического упрощения применим искусственный прием. Заменим истинную волновую функцию $\Psi(x)$ другой периодической функцией $\Phi(x)$ с периодом l, так что при любом x $\Phi(x+l) = \Phi(x)$. Функция $\Psi(x)$ отлична от нуля только на небольшом участке где-то в середине интервала $0 < x < l$ (основного периода). В этом интервале обе функции $\Psi(x)$ и $\Phi(x)$ совпадают. Вне интервала $0 < x < l$ функция $\Psi(x)$ обращается в нуль. Поэтому из нормировки (30.2) следует нормировка для функции $\Phi(x)$:

$$\int_0^l \Phi^*(x)\Phi(x)\, dx = 1. \tag{30.5}$$

Указанная замена не может существенно отразиться на явлениях, протекающих в рассматриваемое время в рассматриваемой нами области пространства. Действительно, различие между функциями $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ относится только к достаточно удаленным областям пространства, которые не могут оказать существенное влияние на протекание изучаемого нами явления. В пределе, когда $l \to \infty$, небольшие искажения явлений, вызванные заменой Ψ на Φ, совсем исчезают.

Периодическую функцию $\Phi(x)$ разложим в ряд Фурье:

$$\Phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{ik} n^x, \tag{30.6}$$

где

$$k_n = \frac{2\pi}{l} n. \tag{30.7}$$

Чтобы определить коэффициент c_m этого ряда, надо обе части (30.6) умножить на $e^{-ik}m^x$ и проинтегрировать по x от 0 до l. При этом

$$\int\limits_0^l e^{i(k_n-k_m)x}\,dx = \begin{cases} l, & \text{при } n=m,\\ \dfrac{1}{i(k_n-k_m)}\,e^{i(k_n-k_m)x}\Big|_0^l = 0, & \text{при } n\neq m,\end{cases}$$

так как

$$e^{i(k_n-k_m)l} = e^{i2\pi(n-m)} = 1 = e^0.$$

С учетом этого получаем

$$c_m = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \Phi(x)e^{-ik_mx}\,dx = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \Psi(x)e^{-ik_mx}\,dx. \tag{30.8}$$

С учетом того же условия нормировка приводится к виду

$$\int\limits_0^l \Phi^*\Phi\,dx = \int\limits_0^l \Psi^*\Psi\,dx = l\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}|c_n|^2 = 1. \tag{30.9}$$

Выведем еще одну вспомогательную формулу. Имеем

$$\int\limits_0^l \Phi^*\frac{\partial}{\partial x}\Phi\,dx = \int\limits_0^l \sum_m\sum_n c_m^*c_n e^{-ik_mx}\frac{\partial}{\partial x}e^{ik_nx}\,dx =$$
$$= i\int\limits_0^l \sum_m\sum_n c_m^*c_nk_ne^{i(k_n-k_m)x}\,dx,$$

или после перестановки порядка суммирования и интегрирования

$$\int\limits_0^l \Phi^*\frac{\partial}{\partial x}\Phi\,dx = i\sum_m\sum_n c_m^*c_nk_n\int\limits_0^l e^{i(k_n-k_m)x}\,dx.$$

Входящий сюда интеграл уже был вычислен выше. Воспользовавшись вычисленным значением, получим

$$-i\int\limits_0^l \Phi^*\frac{\partial}{\partial x}\Phi\,dx = l\sum|c_n|^2k_n. \tag{30.10}$$

4. До сих пор мы не обращали внимания на зависимость функции Ψ, а с ней и функции Φ, от времени t. Наши вычисления в сущности, относились к функциям $\Psi(x,t)$ и $\Phi(x,t)$ при фиксированном значении t, — время t рассматривалось как параметр. Временная зависимость определится из требования, чтобы функции Ψ и Φ удовлетворяли временному уравнению Шредингера (21.5). Такому условию удовлетворяет

функция

$$\Phi(x,t) = \sum_n c_n e^{i(k_n x - \omega_n t)}, \qquad (30.11)$$

где частоты ω_n определяются законом дисперсии $\omega_n = \omega_n(k_n)$ по формуле (19.6). Этот ряд представляет собой разложение функции $\Phi(x,t)$ по плоским волнам де Бройля [1].

Волне де Бройля $e^{i(k_n x - \omega_n t)}$ соответствует импульс $p_n = \hbar k_n$. Значения импульса дискретны. Но эта дискретность искусственная и получилась в результате замены истинной волновой функции $\Psi(x,t)$ на вспомогательную периодическую функцию $\Phi(x,t)$. *Истинные значения импульса непрерывны.* И действительно, чем длиннее взять период l, тем меньше расстояние между соседними значениями дискретного спектра импульса. В пределе, когда $l \to \infty$, это расстояние стремится к нулю, так что фактически импульс становится величиной, меняющейся непрерывно. Измерение импульса в состоянии $\Phi(x,t)$ дает одно из значений p_n. Вероятность этого значения, в силу условия нормировки (30.9), равна $l|c_n|^2$. Поэтому среднее значение импульса, которое получится в результате измерения, будет равно

$$\langle p \rangle = \sum l|c_n|^2 p_n, \qquad (30.12)$$

или в силу соотношения (30.10)

$$\langle p \rangle = \int_0^l \Phi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi \, dx.$$

Теперь можно выполнить предельный переход к $l \to \infty$ и получить формулу

$$\langle p \rangle = \int \Psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi \, dx, \qquad (30.13)$$

в которой всякая неопределенность, связанная с введением вспомогательной функции Φ, исчезла. При этом интегрирование распространяется уже по всему бесконечному пространству, так как большие значения x не вносят никакого вклада в интеграл.

Рассуждая аналогичным образом, можем без труда получить для произвольного целого положительного n

$$\langle p^n \rangle = \int \Psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Psi \, dx, \qquad (30.14)$$

---

[1] Произвольную функцию $\Phi(x,t)$, периодичную по x, можно разложить в ряд Фурье по x, коэффициенты которого будут функциями t. Распространено ошибочное мнение, что это и есть разложение по плоским волнам де Бройля. Ошибка состоит в том, что периодическая функция $\Phi(x,t)$ не может быть произвольной, а должна удовлетворять уравнению Шредингера (21.5). Это накладывает ограничения на коэффициенты разложения как функции времени t.

а для целой рациональной функции импульса

$$\langle F(p)\rangle = \int \Psi^* F(\widehat{p})\Psi\, dx, \tag{30.15}$$

где через $\widehat{p}$ обозначен оператор

$$\widehat{p} \equiv \widehat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \tag{30.16}$$

называемый *оператором импульса*, точнее — оператором проекции импульса $\widehat{p}_x$.

5. Квантовая механика постулативно обобщает полученные результаты на любые физические величины, являющиеся функциями координат и импульсов. Иначе говоря, она полагает

$$\langle F(x,p)\rangle = \int \Psi^*(x) F(\widehat{x},\widehat{p})\Psi(x)\, dx. \tag{30.17}$$

Здесь $F(x,p)$ — целая рациональная функция координат и импульсов, как она определяется классически, а $F(\widehat{x},\widehat{p})$ — соответствующий ей оператор. Формула (30.17) и может быть положена в основу введения операторов в квантовую механику. Заметим, что поскольку мы располагаем операторами $\widehat{x}$ и $\widehat{p}$ в прямоугольных координатах, при нахождении оператора $F(\widehat{x},\widehat{p})$ надо исходить из соответствующей классической формулы также в прямоугольных координатах или в векторной форме.

Нелишне подчеркнуть, что под x и p в формуле (30.17) нельзя понимать значения координаты x и импульса p, полученные в результате одного и того же измерения. Такое понимание противоречит принципу неопределенностей Гейзенберга. Под x и p следует понимать координату и импульс в классическом смысле. Квантовая механика заменяет эти величины операторами $\widehat{x}$ и $\widehat{p}$ и вводит новые операторы $F(\widehat{x},\widehat{p})$. Оператор $F(\widehat{x},\widehat{p})$ получается в результате применения к $\widehat{x}$ и $\widehat{p}$ тех же операций сложения и умножения, с помощью которых в классической физике по значениям x и p находится значение функции $F(x,p)$. Здесь нет еще никакой статистичности, свойственной квантовой механике. Статистичность появляется при переходе к формуле (30.17), ибо она дает только среднее значение функции $F(x,p)$, а не ее истинное значение (которое в квантовой механике, вообще говоря, может не иметь никакого смысла из-за невозможности характеризовать состояние частицы одновременным заданием x и p). Получение оператора $F(\widehat{x},\widehat{p})$ из классической функции $F(x,p)$ обусловливает, наряду с другими соображениями, тесною связь между классической и квантовой механиками. Получается парадоксальное утверждение, что обоснование квантовой механики *принципиально невозможно* без механики классической, хотя квантовая механика и является более общей теорией, в которой классическая механика содержится как предельный частный случай. Этот предельный случай получается из квантовой механики, когда постоянная Планка $\hbar$ пренебрежимо мала по сравнению со всеми величинами той же размерности, играющими роль в рассматриваемом явлении.

Все полученные результаты выведены для одномерного случая. Это сделано только в целях простоты и сокращения записи формул. Но эти результаты без труда обобщаются и на трехмерный случай. Так, оператором трехмерного импульса частицы является символический вектор

$$\widehat{\mathbf{p}} = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}\right) = -i\hbar\nabla, \tag{30.18}$$

а формула для среднего значения такого импульса принимает вид

$$\langle\mathbf{p}\rangle = \int \Psi^*(-i\hbar\nabla)\Psi\,dV, \tag{30.19}$$

где интегрирование производится по всему пространству V, а функция Ψ предполагается нормированной к единице:

$$\int \Psi^*\Psi\,dV = 1. \tag{30.20}$$

Таким образом, всякой классической величине $F(\mathbf{r},\mathbf{p})$ квантовая механика сопоставляет оператор $F(\widehat{\mathbf{r}},\widehat{\mathbf{p}})$, получающийся заменой классических величин $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ на соответствующие операторы $\widehat{\mathbf{r}}$ и $\widehat{\mathbf{p}}$. При этом связь с реально наблюдаемыми величинами устанавливается статистически с помощью формулы

$$\langle F(\mathbf{r},\mathbf{p})\rangle = \int \Psi^* F(\widehat{\mathbf{r}},\widehat{\mathbf{p}})\Psi\,dV. \tag{30.21}$$

6. Поставим теперь вопрос, не существует ли таких состояний, что при измерении величины L, соответствующей оператору $\widehat{L}$, всегда получается определенное значение L. Легко видеть, что такому условию удовлетворяют волновые функции, являющиеся решениями уравнения

$$\widehat{L}\Psi = L\Psi. \tag{30.22}$$

Действительно, в этом случае

$$\langle L\rangle = \int \Psi^*\widehat{L}\Psi\,dx = \int \Psi^* L\Psi\,dx = L\int \Psi^*\Psi\,dx = L,$$

т. е. среднее значение $\langle L\rangle$ всегда равно L. А это возможно тогда и только тогда, когда результат каждого измерения равен L. Мы доказали достаточность условия (30.22). Немного сложнее доказывается и его необходимость, но на этом мы не будем останавливаться.

Функции Ψ, удовлетворяющие уравнению (30.22), называются *собственными функциями* оператора $\widehat{L}$, а числа L — его *собственными значениями*. В квантовой механике принимается, что *при измерении физической величины могут получиться* (*с той или иной вероятностью*) *только собственные значения соответствующего ей оператора*. Так как физические величины *существенно вещественны*, то операторы $\widehat{L}$ физических величин должны быть такими, чтобы их собственные значения были также *вещественными*. Но мы не будем

углубляться в обсуждение условий, при которых это требование выполняется.

Уравнение (30.22) является обобщением на случай любых физических величин правила квантования энергии, рассмотренного в предыдущей главе. Чтобы убедиться в этом, найдем оператор $\widehat{H}$, соответствующий полной энергии частицы. Согласно изложенному такой оператор представляется суммой операторов кинетической и потенциальной энергий, т. е.

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\widehat{p}^2 + \widehat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U. \tag{30.23}$$

Следовательно, (30.22) переходит в

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U\right)\psi - \mathscr{E}\psi.$$

Это уравнение Шредингера (21.7) для стационарных состояний. Таким образом, сокращенно его можно записать в символической форме

$$\widehat{H}\psi = \mathscr{E}\psi, \tag{30.24}$$

отличающейся от (30.22) только обозначениями. Общее уравнение Шредингера (21.5) для нестационарных состояний также можно записать символически:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \widehat{H}\Psi. \tag{30.25}$$

Для полноты заметим, что *уравнение* (30.25) *справедливо не только в случае потенциальных сил, но и в случае, когда силы потенциалом не обладают* (например, магнитные силы). Требуется только, чтобы соответствующие классические уравнения могли быть записаны в форме *уравнений Гамильтона.* В этом случае $\widehat{H}$ называют *оператором Гамильтона* или *гамильтонианом.* Если силы потенциальны, то гамильтониан тождественно совпадает с оператором энергии.

Приведем второй пример на применение уравнения (30.22). Найдем собственные функции и собственные значения оператора импульса. Ограничиваясь одномерным случаем, положим $\widehat{L} = \widehat{p} = -i\hbar\,\partial/\partial x$ и получим

$$-i\hbar\,\frac{\partial\Psi}{\partial x} = p\Psi.$$

Отсюда

$$\Psi = C(t)e^{ipx/\hbar} = C(t)e^{ikx}.$$

Чтобы удовлетворить общему уравнению Шредингера (30.25), следует положить $C(t) = Ce^{-i\omega t}$, т. е.

$$\Psi = Ce^{i(kx-\omega t)}. \tag{30.26}$$

Таким образом, собственными функциями оператора импульса являются плоские волны де Бройля. Параметр p может принимать любые значения, т. е. спектр собственных значений оператора $\widehat{p}$ непрерывный.

В связи с этим заметим, что к уравнению (30.22) мы пришли на основе уравнения (30.21). Наш вывод последнего предполагал выполнение условия нормировки (30.20), т. е. обращения функции Ψ в нуль на бесконечности. Собственные функции (30.26) этому условию не удовлетворяют. Да и в случае оператора энергии при $\mathscr{E} > 0$ собственные значения образуют непрерывный спектр, и нормировка (30.20) не может быть выполнена. В этих случаях наше доказательство формулы (30.22) не проходит. Однако сама формула (30.22) остается верной. Можно так обобщить нормировку (30.20), чтобы распространить доказательство и на такие случаи. Но для этого надо пользоваться *обобщенными функциями*. На этом формальном вопросе мы останавливаться не будем. В физике в принципе достаточно ограничиться волновыми функциями, обращающимися в нуль на бесконечности, для которых нормировка (30.20) всегда выполняется.

7. Остановимся в заключение еще на одном вопросе, специфическом только для квантовой, но не классической механики. Пусть $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ — два квантовомеханических оператора, каждому из которых соответствует свой спектр собственных значений. Всегда ли существует состояние Ψ, в котором оба оператора имеют определенные собственные значения A и B? Иными словами, существует ли состояние Ψ, в котором обе величины A и B измеримы одновременно? Для ответа на этот вопрос допустим, что Ψ_n является собственной функцией как оператора $\widehat{A}$, так и оператора $\widehat{B}$, т. е.

$$\widehat{A}\Psi_n = A_n\Psi_n, \quad \widehat{B}\Psi_n = B_n\Psi_n,$$

где A_n и B_n — числа, представляющие собой собственные значения операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ в одном и том же состоянии Ψ_n. Умножим первое равенство слева на оператор $\widehat{B}$. Получим

$$\widehat{B}\widehat{A}\Psi_n = \widehat{B}A_n\Psi_n = A_n\widehat{B}\Psi_n = A_nB_n\Psi_n.$$

Аналогично

$$\widehat{A}\widehat{B}\Psi_n = B_nA_n\Psi_n.$$

Отсюда $(\widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A})\Psi_n = 0$. На этом основании нельзя еще заключить, что $\widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A} = 0$, так как Ψ_n — не произвольная функция, а лишь одна из общих собственных функций операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ [1]).

Допустим, однако, что каждая собственная функция оператора $\widehat{A}$ является также собственной функцией оператора $\widehat{B}$ и наоборот. Суще-

[1]) Например, из равенства $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^3}{\partial x^3}\right)x = 0$ не следует, что $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^3}{\partial x^3} = 0$.

ствует математическая теорема, которую мы доказывать не будем, что произвольная волновая функция Ψ может быть разложена по собственным функциям оператора $\widehat{A}$ (или, что то же самое, оператора $\widehat{B}$), т. е.

$$\Psi = \sum c_n \Psi_n$$

(предполагается, что спектр дискретный, что несущественно). Из этой формулы и из соотношения $(\widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A})\Psi_n = 0$ следует

$$(\widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A})\Psi = 0.$$

Теперь уже ввиду произвольности Ψ можно заключить, что

$$\widehat{A}\widehat{B} = \widehat{B}\widehat{A}, \tag{30.27}$$

т. е. операторы $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ коммутативны. Действительно, единственный оператор, обращающий в нуль произвольную функцию, есть оператор умножения на нуль.

Итак, *если все собственные функции операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ совпадают, то эти операторы коммутируют.* Справедлива и обратная теорема: *если операторы $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ коммутируют, то совпадают и их собственные функции.* Эту теорему мы также примем без доказательства.

Приведенной теореме можно придать и другую формулировку. *Две величины A и B измеримы одновременно, вообще говоря, тогда и только тогда, когда соответствующие им операторы $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ коммутируют.* Это правило может нарушаться только в отдельных исключительных случаях (см. § 31, пп. 1 и 4).

Например, координаты x и y можно измерить одновременно, так как операторы $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ коммутируют. Напротив, координата x и соответствующий ей импульс p_x одновременно измерены быть не могут, поскольку операторы $\widehat{x}$ и $\widehat{p}_x$ не коммутируют, как это видно из формулы (30.1). Именно этого требует принцип неопределенностей Гейзенберга. Координата x и импульс p_y, соответствующий другой координате y, измеримы одновременно, ибо операторы $\widehat{x}$ и $\widehat{p}_y = -i\hbar\partial/\partial y$ коммутируют, поскольку при дифференцировании по y координата x ведет себя как постоянная.

§ 31. Момент импульса частицы

1. Момент импульса частицы $\mathbf{l}$ относительно начала координат O в классической механике определяется векторным произведением $[\mathbf{rp}]$. Такое определение в квантовой механике не имеет смысла, поскольку не существует состояния, в котором бы оба вектора $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ имели определенные значения. В квантовой механике векторному произведению $[\mathbf{rp}]$ соответствует оператор

$$\mathbf{l} = [\widehat{\mathbf{r}}\,\widehat{\mathbf{p}}]. \tag{31.1}$$

Раскрывая это векторное произведение и соблюдая при этом порядок расположения операторов координат и проекций вектора импульса, найдем операторы проекций момента импульса на координатные оси X, Y, Z:

$$\begin{aligned} \widehat{l}_x &= (\widehat{y}\widehat{p}_z - \widehat{z}\widehat{p}_y) = i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right), \\ \widehat{l}_y &= (\widehat{z}\widehat{p}_x - \widehat{x}\widehat{p}_z) = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right), \\ \widehat{l}_z &= (\widehat{x}\widehat{p}_y - \widehat{y}\widehat{p}_x) = i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{31.2}$$

Через эти проекции сам оператор вектора момента импульса выражается формулой

$$\widehat{\mathbf{l}} = \mathbf{i}\widehat{l}_x + \mathbf{j}\widehat{l}_y + \mathbf{k}\widehat{l}_z. \tag{31.3}$$

Смысл этого векторного оператора выяснится, если написать результат действия его на произвольную функцию ψ. Это есть

$$\widehat{\mathbf{l}}\psi = \mathbf{i}(\widehat{l}_x\psi) + \mathbf{j}(\widehat{l}_y\psi) + \mathbf{k}(\widehat{l}_z\psi), \tag{31.4}$$

т. е. вектор с составляющими $\widehat{l}_x\psi$, $\widehat{l}_y\psi$, $\widehat{l}_z\psi$. Таким образом, произвольной волновой функции ψ соответствует вектор, определяемый выражением (31.4). Возникает, однако, вопрос, существует ли такая функция ψ, для которой все три проекции вектора (31.4) имеют определенные значения, т. е. одновременно выполняются все три равенства:

$$\widehat{l}_x\psi = l_x\psi, \quad \widehat{l}_y\psi = l_y\psi, \quad \widehat{l}_z\psi = l_z\psi. \tag{31.5}$$

Для ответа на этот вопрос надо найти правила коммутации операторов $\widehat{l}_x$, $\widehat{l}_y$, $\widehat{l}_z$. Перемножая операторы $\widehat{l}_x$ и $\widehat{l}_y$ и сохраняя порядок их расположения, получим

$$\begin{aligned} \widehat{l}_x\widehat{l}_y &= -\hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right) = \\ &= -\hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial y}\,x\frac{\partial}{\partial z} - y\frac{\partial}{\partial z}\,x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\,z\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\,z\frac{\partial}{\partial x}\right) = \\ &= -\hbar^2\left(zx\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z} - yx\frac{\partial^2}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} + yz\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x} + y\frac{\partial}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\widehat{l}_y\widehat{l}_x = -\hbar^2\left(zy\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z} - xy\frac{\partial^2}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + xz\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial y} + x\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Операции дифференцирования по двум независимым переменным перестановочны, т. е., например, $\partial^2/\partial x\,\partial y = \partial^2/\partial y\,\partial x$. Поэтому

почленным вычитанием предыдущих равенств получим

$$\widehat{l}_x\widehat{l}_y - \widehat{l}_y\widehat{l}_x = -\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) = i\hbar\widehat{l}_z.$$

Аналогично получаются и два остальных правила коммутации. Итак,

$$\begin{aligned} \widehat{l}_y\widehat{l}_z - \widehat{l}_z\widehat{l}_y &= i\hbar\widehat{l}_x, \\ \widehat{l}_z\widehat{l}_x - \widehat{l}_x\widehat{l}_z &= i\hbar\widehat{l}_y, \\ \widehat{l}_x\widehat{l}_y - \widehat{l}_y\widehat{l}_x &= i\hbar\widehat{l}_z. \end{aligned} \tag{31.6}$$

Таким образом, *любые две проекции оператора момента не коммутируют между собой. Поэтому не существует состояния, в котором бы все три и даже какие-либо две из трех проекций* $\widehat{l}_x$, $\widehat{l}_y$, $\widehat{l}_z$ *имели определенные значения* (см. § 30, п. 7). Исключением является только случай, когда все три проекции одновременно равны нулю. Значит, *не существует состояния, в котором бы и сам вектор момента импульса имел определенное значение, т. е. был бы полностью определен как по величине, так и по направлению.* Иными словами, *оператор момента* $\widehat{\mathbf{l}}$ *не имеет собственных функций и соответствующих им векторных собственных значений.* Связь векторного оператора момента с реальной действительностью в общем виде устанавливается *статистически* — с помощью формулы (30.21), которая позволяет находить средние значения, получаемые при измерении самого момента импульса, а не соответствующего ему оператора.

2. Какими же физическими величинами (а не их операторами) характеризуется в квантовой механике момент импульса частицы? Для решения этого вопроса выразим прежде всего операторы проекций момента импульса через сферические (полярные) координаты. Вопрос этот может быть просто решен аналитически. Но аналитическое решение довольно громоздко. Мы предпочитаем привести геометрическое решение. Начало координат прямоугольной XYZ и сферической систем координат поместим в общей точке O (рис. 57). В сферических координатах положение точки A характеризуется расстоянием ее r от точки O и двумя углами θ (полярный угол) и φ (азимут). В точке A проведем касательную AB к меридиану ZAN и касательную AC к соответствующей параллели. Введем вспомогательную прямоугольную систему координат $\xi\eta\zeta$ с осями $O\xi$ и $O\eta$,

Рис. 57

параллельными соответственно AB и AC, и осью $O\xi$, направленной вдоль радиуса OA. Предполагая, что (классическая) частица находится в точке A, получаем для нее $\xi = \eta = 0$, $\zeta = r$. Поэтому, заменяя в формулах (31.2) x, y, z на ξ, η, ζ, можем написать

$$\widehat{l}_\xi = i\hbar r\frac{\partial}{\partial\eta}, \quad \widehat{l}_\eta = -i\hbar r\frac{\partial}{\partial\xi}, \quad \widehat{l}_\zeta = 0.$$

Но, как видно из рис. 57, $d\xi = r\,d\theta$ (при постоянных r и η), $d\eta = r\sin\theta\,d\varphi$ (при постоянных r и ξ). Поэтому

$$\widehat{l}_\xi = i\frac{\hbar}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \widehat{l}_\eta = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \widehat{l}_\zeta = 0.$$

Теперь легко перейти к исходной прямоугольной системе координат X, Y, Z, пользуясь обычным правилом преобразования проекций вектора. Применимость такого правила к операторам обусловлена тем, что направляющие косинусы, определяющие расположение координатных систем XYZ и $\xi\eta\zeta$ относительно друг друга, следует рассматривать как величины постоянные, на которые операторы $\partial/\partial\theta$ и $\partial/\partial\varphi$ не действуют. Запишем нужные направляющие косинусы в виде таблицы:

	ξ	η	ζ
X	$\cos\theta\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	
Y	$\cos\theta\sin\varphi$	$\cos\varphi$	
Z	$-\sin\theta$	0	$\cos\theta$

Тогда

$$\widehat{l}_x = \widehat{l}_\xi\cos\theta\cos\varphi - \widehat{l}_\eta\sin\varphi,$$
$$\widehat{l}_y = \widehat{l}_\xi\cos\theta\sin\varphi + \widehat{l}_\eta\cos\varphi,$$
$$\widehat{l}_z = -\widehat{l}_\xi\sin\theta,$$

или

$$\widehat{l}_x = i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$
$$\widehat{l}_y = i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \qquad (31.7)$$
$$\widehat{l}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Отметим существенную разницу между классическим моментом импульса частицы $[\mathbf{rp}]$ и соответствующим ему квантовым оператором момента (31.3). Классический момент зависит от радиуса-вектора $\mathbf{r}$, т. е. от выбора начала координат O, относительно которого берется момент импульса. Оператор момента, как видно из формул (31.7), не содержит $\mathbf{r}$, а зависит только от углов θ и φ. Это значит, что оператор момента (31.3) не зависит от выбора начала координат, а зависит

только от направления координатных осей. Поэтому его лучше называть *оператором углового* или *вращательного момента* частицы. При рассмотрении углового момента, в отличие от классического момента импульса, не надо указывать, относительно какого начала он берется. Разумеется, не зависят от выбора начала координат и собственные значения операторов проекций и квадрата углового момента, о которых говорится ниже.

3. Теперь поставим вопрос, может ли одна из проекций углового момента иметь определенное значение? Ясно, что если вопрос решается в положительном (или отрицательном) смысле для какой-либо одной из проекций, то он должен решаться в том же смысле и для каждой из остальных двух проекций, а также для проекции углового момента вдоль любого произвольно избранного направления. Это непосредственно следует из изотропии пространства, т. е. из эквивалентности всех направлений в пространстве. Не могут иметь в одном и том же состоянии определенные значения проекции углового момента вдоль двух различных направлений. Избранное направление можно поэтому взять произвольно. Такое направление обычно принимают за ось Z, так как в этом случае оператор $\widehat{l}_z$ выражается наиболее простой формулой. Для решения поставленного вопроса служит уравнение

$$\widehat{l}_z\psi = l_z\psi,$$

или

$$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = l_z\psi, \tag{31.8}$$

где l_z — постоянная. Его решением является

$$\psi = C(r,\theta)\exp\left(i\frac{l_z}{\hbar}\varphi\right). \tag{31.9}$$

В силу требуемой однозначности ψ эта функция должна возвращаться к своему исходному значению, когда аргумент φ получает приращение 2π, ибо такое приращение возвращает исходную точку в начальное положение. Таким образом, должно быть

$$\exp\left(i\frac{l_z}{\hbar}\varphi\right) = \exp\left\{i\frac{l_z}{\hbar}(\varphi+2\pi)\right\}.$$

Так как показательная функция периодична с периодом $2\pi i$, то это равенство может выполняться только при условии

$$i\frac{l_z}{\hbar}2\pi = m\cdot 2\pi i,$$

или

$$l_z = m\hbar, \tag{31.10}$$

где m — целое положительное или отрицательное число, включая и нуль ($m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$). Равенство (31.10) означает, что проекция углового момента на любое направление квантуется. Для сокращения за единицу углового момента обычно принимают постоянную $\hbar$. При

таком соглашении говорят, что проекция углового момента на избранное направление может принимать только целочисленные значения $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Проекцию углового момента на ось Z принято обозначать через m_z. Таким образом, $m_z = m$.

Правило (31.10) по своей форме аналогично соответствующему правилу квантования момента импульса (13.6) в теории Бора. Однако между этими двумя правилами есть глубокое различие. В формуле (13.6) под L следует понимать полный момент импульса частицы (электрона), тогда как в (31.10) речь идет только об одной проекции момента импульса на какое-либо направление, а самого вектора момента импульса, как точно определенной величины, вообще не существует.

4. Нетрудно непосредственно проверить, что собственная функция оператора $\widehat{l}_z$, т. е. функция (31.9), не может быть одновременно собственной функцией ни оператора $\widehat{l}_x$, ни оператора $\widehat{l}_y$. Допустим противоположное, что (31.9) является собственной функцией, например, оператора $\widehat{l}_x$. Для этой функции имеем

$$\widehat{l}_x \psi = i\hbar \left(\sin\varphi \frac{\partial C}{\partial \theta} + im \operatorname{ctg}\theta \cos\varphi C \right) e^{im\varphi}.$$

Этот результат не может быть представлен в виде $l_x \psi$, как мы предположили (l_x — постоянное число). Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть частный случай, когда $\varphi = 0$. Тогда

$$\widehat{l}_x \psi = -\hbar m \operatorname{ctg}\theta \psi.$$

С другой стороны, по нашему предположению должно быть

$$\widehat{l}_x \psi = l_x \psi.$$

И оба эти соотношения должны соблюдаться при любых значениях угла θ, что, очевидно, невозможно. Такое же рассуждение применимо для оператора $\widehat{l}_y$. Это подтверждает прежний результат, что не существует волновой функции Ψ, которая была бы одновременно собственной функцией операторов $\widehat{l}_x$, $\widehat{l}_y$, $\widehat{l}_z$. Исключением является только случай, когда функция Ψ сферически симметрична, т. е. зависит только от r. В этом случае Ψ будет собственной функцией всех трех операторов $\widehat{l}_x$, $\widehat{l}_y$, $\widehat{l}_z$, а все три проекции углового момента m_x, m_y, m_z обратятся в нуль.

5. Второй величиной наряду с проекцией m_z, характеризующей величину углового момента, является *квадрат полного углового момента*. Его принято обозначать через $\mathbf{l}^2$. Но это не есть квадрат вектора $\mathbf{l}$ (которого не существует), а *собственное значение квадрата оператора углового момента*, т. е.

$$\widehat{\mathbf{l}}^2 = (\widehat{l}_x \mathbf{i} + \widehat{l}_y \mathbf{j} + \widehat{l}_z \mathbf{k})^2 = \widehat{l}_x^2 + \widehat{l}_y^2 + \widehat{l}_z^2. \tag{31.11}$$

Поэтому общепринятое обозначение $\mathbf{l}^2$ неудачно, но мы не будем его менять. Однако истинный смысл величины $\mathbf{l}^2$, как собственного значения квадрата оператора углового момента $\widehat{\mathbf{l}}^2$ надо постоянно иметь в виду.

Чтобы убедиться, что величины $\mathbf{l}^2$ и m_z могут быть измерены в одном и том же состоянии, надо показать, что операторы $\widehat{\mathbf{l}}^2$ и $\widehat{l}_z$ коммутируют друг с другом. Для этого пишем

$$\widehat{\mathbf{l}}^2\widehat{l}_z = (\widehat{l}_x^2 + \widehat{l}_y^2 + \widehat{l}_z^2)\widehat{l}_z = \widehat{l}_x(\widehat{l}_x\widehat{l}_z) + \widehat{l}_y(\widehat{l}_y\widehat{l}_z) + \widehat{l}_z^3,$$

или в силу соотношений коммутации (31.6)

$$\widehat{\mathbf{l}}^2\widehat{l}_z = \widehat{l}_x(\widehat{l}_z\widehat{l}_x - i\hbar\widehat{l}_y) + \widehat{l}_y(\widehat{l}_z\widehat{l}_y + i\hbar\widehat{l}_x) + \widehat{l}_z^3.$$

Аналогично

$$\widehat{l}_z\widehat{\mathbf{l}}^2 = (\widehat{l}_x\widehat{l}_z + i\hbar\widehat{l}_y)\widehat{l}_x + (\widehat{l}_y\widehat{l}_z - i\hbar\widehat{l}_x)\widehat{l}_y + \widehat{l}_z^3.$$

Почленным вычитанием находим

$$\widehat{\mathbf{l}}^2\widehat{l}_z - \widehat{l}_z\widehat{\mathbf{l}}^2 = 0, \tag{31.12}$$

что и требовалось доказать. Разумеется, такое же соотношение коммутации справедливо и для операторов $\widehat{l}_x$ и $\widehat{l}_y$.

Итак, *существует состояние, в котором одновременно имеют определенные значения квадрат углового момента* $\mathbf{l}^2$ *и одна из его проекций на избранное направление.* Обычно это направление принимают за ось Z.

Рассмотрим какое-либо состояние Ψ, в котором величины $\mathbf{l}^2$ и m_z (а следовательно, и m_z^2) одновременно имеют определенные значения. Докажем, что в этом состоянии всегда (за исключением случая $l^2 = 0$) $\widehat{\mathbf{l}}^2 > m_z^2$. С этой целью рассмотрим операторное равенство

$$\widehat{\mathbf{l}}^2 - \widehat{l}_z^2 = \widehat{l}_x^2 + \widehat{l}_y^2.$$

Для оператора $\widehat{\mathbf{l}}^2 - \widehat{l}_z^2$ функция Ψ является собственной с собственным значением $\mathbf{l}^2 - m_z^2$. То же значение имеет и соответствующая средняя величина. Поэтому, производя усреднение по формуле (30.21), получим

$$\mathbf{l}^2 - m_z^2 = \int \Psi^*(\widehat{l}_x^2 + \widehat{l}_y^2)\Psi\,dV.$$

Но интеграл справа существенно положителен, так как он представляет среднее значение существенно положительной величины $l_x^2 + l_y^2$ в состоянии Ψ. Итак,

$$\mathbf{l}^2 > m_z^2. \tag{31.13}$$

Поэтому угловой момент не может ориентироваться точно вдоль оси Z. В любом состоянии он всегда содержит проекции l_x и l_y, которые, однако, в рассматриваемом состоянии остаются неопределенными. Это — уже известный нам факт, согласно которому не существует состояния, в котором все три проекции l_x, l_y, l_z имеют определенные значения.

Про этот факт иногда говорят, что в собственном состоянии, где $\mathbf{l}^2$ имеет определенное значение, угловой момент сохраняет свою длину, равную $\sqrt{\mathbf{l}^2}$, но его направление испытывает флуктуации. Вряд ли этот способ выражения можно признать удачным, ибо он предполагает, что существует какой-то вектор $\mathbf{l}$, имеющий в каждый момент времени определенную длину и направление, но это направление беспорядочно и непрерывно меняется во времени. На самом деле, как мы видели, такого вектора не существует, а потому картина его флуктуации не соответствует действительности.

6. Остается определить собственные значения $\mathbf{l}^2$ оператора квадрата углового момента $\widehat{\mathbf{l}}^2$. Это можно сделать с помощью одних только правил коммутации (31.6). Приведем сначала эти правила к другому виду, более удобному для нашей цели. Введем два оператора:

$$\widehat{l}_+ = \widehat{l}_x + i\widehat{l}_y, \quad \widehat{l}_- = \widehat{l}_x - i\widehat{l}_y. \tag{31.14}$$

Тогда из (31.6) нетрудно получить

$$\widehat{l}_+\widehat{l}_- - \widehat{l}_-\widehat{l}_+ = 2\hbar\widehat{l}_z, \quad \widehat{l}_z\widehat{l}_+ - \widehat{l}_+\widehat{l}_z = \hbar\widehat{l}_+, \quad \widehat{l}_z\widehat{l}_- - \widehat{l}_-\widehat{l}_z = -\hbar\widehat{l}_-. \tag{31.15}$$

Далее

$$\widehat{\mathbf{l}}^2 = \left(\frac{\widehat{l}_+ + \widehat{l}_-}{2}\right)^2 + \left(\frac{\widehat{l}_+ - \widehat{l}_-}{2i}\right)^2 + \widehat{l}_z^2$$

или

$$\widehat{\mathbf{l}}^2 = \widehat{l}_+\widehat{l}_- + \widehat{l}_z^2 - \hbar\widehat{l}_z = \widehat{l}_-\widehat{l}_+ + \widehat{l}_z^2 + \hbar\widehat{l}_z. \tag{31.16}$$

Так как $\mathbf{l}^2$ есть величина ограниченная, то из (31.13) следует, что m_z^2, а потому и m_z суть также величины ограниченные. Обозначим через l наибольшее положительное значение проекции m_z при заданном значении квадрата момента $\mathbf{l}^2$. Пусть Ψ — общая волновая функция операторов $\widehat{\mathbf{l}}^2$ и $\widehat{l}_z$, причем собственное значение оператора $\widehat{l}_z$ равно m. В этом предположении

$$\widehat{\mathbf{l}}^2\Psi = \mathbf{l}^2\Psi, \quad \widehat{l}_z\Psi = \hbar l\Psi. \tag{31.17}$$

Из соотношений коммутации (31.15) для такой функции получаем

$$\widehat{l}_z\widehat{l}_\pm\Psi = (\widehat{l}_\pm\widehat{l}_z \pm \hbar\widehat{l}_\pm)\Psi = \hbar(l \pm 1)l_\pm\Psi.$$

Отсюда видно, что функции $\widehat{l}_+\Psi$ и $\widehat{l}_-\Psi$ являются собственными функциями оператора $\widehat{l}_z$, имеющими собственные значения $\hbar(l+1)$ и $\hbar(l-1)$ соответственно. Но величина $\hbar(l+1)$ не может быть собственным значением оператора $\widehat{l}_z$, так как по предположению наибольшее собственное значение этого оператора равно $\hbar l$. Таким образом, равенство

$$\widehat{l}_z\widehat{l}_+\Psi = \hbar(l+1)\widehat{l}_+\Psi$$

невозможно. Но это равенство логически следует из соотношений коммутации (31.15) и уравнения $\widehat{l}_z\Psi = l\Psi$. Избежать противоречия можно только тогда, когда $\widehat{l}_+\Psi = 0$, ибо в этом случае указанное равенство,

конечно, будет удовлетворено. Но из этого следует, что $\widehat{l}_-\widehat{l}_+\Psi = 0$, или в силу соотношения (31.16)

$$(\widehat{\mathbf{l}}^2 - \widehat{l}_z^2 - \hbar\widehat{l}_z)\Psi = 0.$$

Но в силу (31.17) $\widehat{l}_z^2\Psi = \hbar^2 l^2\Psi, \hbar\widehat{l}_z\Psi = \hbar^2 l\Psi$, так что

$$(\widehat{\mathbf{l}}^2 - \hbar^2 l^2 - \hbar^2 l)\Psi = 0,$$

или

$$\widehat{\mathbf{l}}^2\Psi = \hbar^2 l(l+1)\Psi.$$

Значит Ψ есть собственная функция оператора квадрата углового момента с собственным значением

$$\mathbf{l}^2 = \hbar^2 l(l+1). \tag{31.18}$$

7. Пусть квадрат углового момента $\mathbf{l}^2$ имеет определенное значение $l(l+1)$. Во скольких состояниях может реализоваться такая ситуация, если в них проекция m также имеет определенное значение? Очевидно, в таких состояниях m может принимать следующие значения:

$$m = -l, -(l-1), \ldots, -1, 0, +1, \ldots, +(l-1), +l,$$

т. е. всего таких состояний будет $2l+1$.

Полученные результаты, определяющие возможные значения l_z и $\mathbf{l}^2$, называют *пространственным квантованием.* Этот термин заимствован из старой теории Бора, в которой пространственное квантование определяло возможные направления вектора углового момента $\mathbf{l}$ в пространстве. С точки зрения квантовой механики термин «пространственное квантование» вряд ли удачен, так как «вектор» $\mathbf{l}$ принципиально не имеет определенных направлений в пространстве. Для наглядности пространственное квантование обычно представляют графически на *векторных диаграммах.* По оси Z откладывают возможные значения m, рассматривая их как проекции вектора $\mathbf{l}$ длины $\sqrt{l(l+1)}$, имеющего дискретные направления в пространстве. В качестве примера на рис. 58 приведены векторные диаграммы для случаев $l = 1$

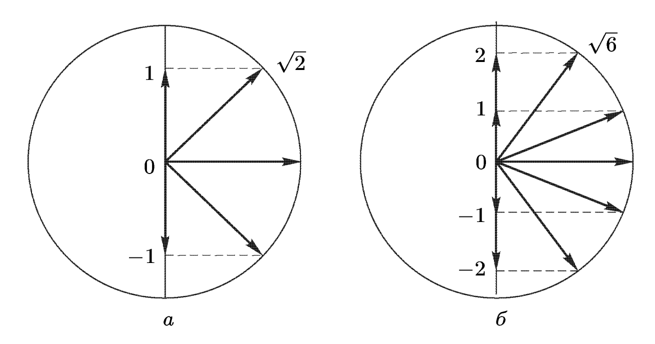


Рис. 58

и $l=2$ (за единицу углового момента принята постоянная Планка $\hbar$). Эти диаграммы нельзя понимать буквально. Они правильно передают только два факта: возможные значения проекции m и возможные значения квадрата углового момента $\mathbf{l}^2$.

Квантовое число l по причинам, которые выяснятся ниже, называют *орбитальным квантовым числом*, а число m — магнитным квантовым числом.

8. В классической механике кинетическая энергия вращающегося твердого тела определяется формулой

$$\mathscr{E}=\frac{\mathbf{l}^2}{2I},$$

где I — момент инерции тела относительно соответствующей оси вращения. Такая же формула справедлива и в квантовой механике. Различие состоит в том, что здесь величина $\mathbf{l}^2$ квантуется, принимая дискретные значения $\mathbf{l}^2=\hbar^2 l(l+1)$. Неизменяемая вращающаяся система в квантовой механике называется *ротатором*. Таким образом, энергетические уровни ротатора дискретны и определяются формулой

$$\mathscr{E}_r=\frac{\hbar^2}{2I}\,l(l+1). \tag{31.19}$$

Такой формулой мы уже пользовались при качественном рассмотрении вращательной теплоемкости молекул (см. т. II, § 69).

Впрочем, необходимо заметить, что идеализированное представление о ротаторе, как и представление об идеально твердом теле, несовместимо с принципом неопределенностей Гейзенберга. В самом деле, в модели идеально твердого тела его размеры в любом направлении (например, в направлении оси X) строго определены и не могут меняться во времени, т. е. неопределенность координаты $\Delta x=0$. Но тогда для импульса в том же направлении из соотношения неопределенностей следует, что $\Delta p_x=\infty$. В теле неизбежно возникнут колебания, меняющие величину момента инерции I. Например, вращающуюся молекулу можно для некоторых целей рассматривать как жесткий ротатор и пользоваться формулой (31.19), если изменения I, связанные с вращением, невелики.

§ 32. Сложение угловых моментов

1. Понятие углового момента можно распространить и на системы частиц. Ради простоты будем предполагать, что система состоит только из двух частиц: 1 и 2. Координаты (радиус-вектор) первой частицы обозначим через $\mathbf{r}_1$, второй — через $\mathbf{r}_2$. Оператором углового момента $\widehat{\mathbf{l}}$ системы называют сумму операторов угловых моментов ее частей $\widehat{\mathbf{l}}_1$ и $\widehat{\mathbf{l}}_2$:

$$\widehat{\mathbf{l}}=\widehat{\mathbf{l}}_1+\widehat{\mathbf{l}}_2. \tag{32.1}$$

Так же определяется и оператор проекции углового момента системы на избранное направление. Например,

$$\widehat{l}_z = \widehat{l}_{1z} + \widehat{l}_{2z}. \tag{32.2}$$

Будем предполагать, что частицы не взаимодействуют между собой. Тогда волновая функция первой частицы $\Psi_1(\mathbf{r}_1)$ будет одна и та же независимо от того, есть вторая частица или нет. Эту функцию можно умножить на произвольную постоянную, которая может зависеть от $\mathbf{r}_2$ как от параметра. В частности, за нее можно принять волновую функцию $\Psi_2(\mathbf{r}_2)$ второй частицы. Тогда волновая функция первой частицы представится произведением $\Psi = \Psi_1(\mathbf{r}_1)\Psi_2(\mathbf{r}_2)$ Но очевидно из тех же соображений, что в таком же виде представится и волновая функция второй частицы. Поэтому $\Psi = \Psi_1\Psi_2$ можно рассматривать как волновую функцию системы невзаимодействующих частиц 1 и 2. При этом для нее будет сохранена нормировка

$$\int |\Psi|^2\, dV_1\, dV_2 = \int |\Psi_1|^2\, dV_1 \int |\Psi_2|^2\, dV_2 = 1. \tag{32.3}$$

2. Если ограничиться действием операторов только на функцию $\Psi = \Psi_1\Psi_2$, то из доказанного следует, что операторы $\widehat{\mathbf{l}}_1$ и $\widehat{\mathbf{l}}_2$ перестановочны. В самом деле, поскольку оператор $\widehat{\mathbf{l}}_1$ действует только на функцию Ψ_1 и не действует на функцию Ψ_2, а оператор $\widehat{\mathbf{l}}_2$, наоборот, действует только на Ψ_2 и не действует на Ψ_1, можно написать

$$\widehat{\mathbf{l}}_1\widehat{\mathbf{l}}_2\Psi = \widehat{\mathbf{l}}_1\widehat{\mathbf{l}}_2(\Psi_1\Psi_2) = \widehat{\mathbf{l}}_1(\Psi_1\widehat{\mathbf{l}}_2\Psi_2) = (\widehat{\mathbf{l}}_2\Psi_2)(\widehat{\mathbf{l}}_1\Psi_1) = (\widehat{\mathbf{l}}_1\Psi_1)(\widehat{\mathbf{l}}_2\Psi_2).$$

К тому же результату приводит и действие оператора $\widehat{\mathbf{l}}_2\widehat{\mathbf{l}}_1$. Значит, для функций вида $\Psi = \Psi_1\Psi_2$ справедливо операторное равенство $\widehat{\mathbf{l}}_1\widehat{\mathbf{l}}_2 = \widehat{\mathbf{l}}_2\widehat{\mathbf{l}}_1$, что и доказывает наше утверждение. Таким же путем докажем для функций того же вида и перестановочность операторов проекций углового момента в случае системы независимых частиц, например $\widehat{l}_{1x}$ и $\widehat{l}_{2x}$. Из доказанного следует, что правила коммутации (31.6) и все следствия из них для отдельной частицы распространяются без всяких изменений и на системы независимых частиц.

Ввиду коммутации операторов $\widehat{\mathbf{l}}_1$ и $\widehat{\mathbf{l}}_2$ оператор квадрата углового момента $\widehat{\mathbf{l}}^2$ будет равен

$$\widehat{\mathbf{l}}^2 = (\widehat{\mathbf{l}}_1 + \widehat{\mathbf{l}}_2)^2 = \widehat{\mathbf{l}}_1^2 + 2(\widehat{\mathbf{l}}_1\widehat{\mathbf{l}}_2) + \widehat{\mathbf{l}}_2^2. \tag{32.4}$$

Теперь выясним, как коммутирует оператор квадрата углового момента $\widehat{\mathbf{l}}^2 = \widehat{l}_x^2 + \widehat{l}_y^2 + \widehat{l}_z^2$ с оператором одной из проекций его, например $\widehat{l}_x = \widehat{l}_{1x} + \widehat{l}_{2x}$. Очевидно, операторы $\widehat{l}_{1x}$ и $\widehat{l}_{2x}$ коммутируют с $\widehat{\mathbf{l}}_1^2$ и с $\widehat{\mathbf{l}}_2^2$. Остается только проверить коммутативность операторов $\widehat{\mathbf{l}}_1\widehat{\mathbf{l}}_2$

и $\widehat{l}_x$. Имеем

$$(\widehat{\mathbf{l}}_1\widehat{\mathbf{l}}_2)\widehat{l}_x = (\widehat{l}_{1x}\widehat{l}_{2x} + \widehat{l}_{1y}\widehat{l}_{2y} + \widehat{l}_{1z}\widehat{l}_{2z})(\widehat{l}_{1x} + \widehat{l}_{2x}) = \\ = (\widehat{l}_{1x}\widehat{l}_{2x} + \widehat{l}_{1y}\widehat{l}_{2y} + \widehat{l}_{1z}\widehat{l}_{2z})\widehat{l}_{1x} + (\widehat{l}_{1x}\widehat{l}_{2x} + \widehat{l}_{1y}\widehat{l}_{2y} + \widehat{l}_{1z}\widehat{l}_{2z})\widehat{l}_{2x}.$$

Аналогично

$$\widehat{l}_x(\widehat{\mathbf{l}}_1\widehat{\mathbf{l}}_2) = \widehat{l}_{1x}(\widehat{l}_{1x}\widehat{l}_{2x} + \widehat{l}_{1y}\widehat{l}_{2y} + \widehat{l}_{1z}\widehat{l}_{2z}) + \widehat{l}_{2x}(\widehat{l}_{1x}\widehat{l}_{2x} + \widehat{l}_{1y}\widehat{l}_{2y} + \widehat{l}_{1z}\widehat{l}_{2z}).$$

Если воспользоваться правилами коммутации (31.6) и тем обстоятельством, что операторы $\widehat{\mathbf{l}}_1$ и $\widehat{\mathbf{l}}_2$ действуют на волновые функции разных частиц, то последнее выражение легко привести к предыдущему. Итак, оператор $\widehat{\mathbf{l}}^2 = (\widehat{\mathbf{l}}_1 + \widehat{\mathbf{l}}_2)^2$ коммутирует с операторами проекций $\mathbf{l}$ на любое направление. Поэтому существует состояние системы, в котором $\mathbf{l}^2$ и одна из проекций на любое направление имеют определенные значения.

3. Состояние первой частицы можно характеризовать значениями l_1 и m_1, второй — значениями l_2 и m_2. Число l_1 определяет квадрат углового момента первой частицы $l_1(l_1+1)$, число l_2 — квадрат такого же момента второй частицы $l_2(l_2+1)$. Числа m_1 и m_2 определяют проекции на ось Z угловых моментов $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ (в единицах $\hbar$). Очевидно, совокупность чисел l_1, l_2, m_1, m_2 характеризует некоторое состояние системы обеих независимых частиц. Волновую функцию такого состояния будем обозначать через $\varphi_{l_1 l_2 m_1 m_2}$. Определим число состояний такого типа, т. е. число линейно независимых функций φ при заданных значениях l_1 и l_2. При заданном l_1 число m_1 может принимать $(2l_1+1)$ значений (см. § 31, п. 7), при заданном l_2 число значений m_2 равно $(2l_2+1)$. Таким образом, при заданных l_1 и l_2 искомое число состояний с волновыми функциями типа φ равно $(2l_1+1)(2l_2+1)$. Из таких $(2l_1+1)(2l_2+1)$ состояний путем их линейных комбинаций можно составить любое состояние системы с заданными l_1 и l_2.

Но линейно независимые состояния, из которых может быть составлено любое состояние системы с заданными l_1 и l_2, можно выбрать и иначе. Должно оставаться постоянным лишь общее число таких линейно независимых состояний, т. е. это число по-прежнему должно быть равно $(2l_1+1)(2l_2+1)$. Ввиду справедливости для всей системы правил коммутации (31.6) существуют при заданных l_1 и l_2 состояния всей системы с определенными значениями квадрата $l(l+1)$ полного углового момента $\mathbf{l}$ и его проекции m на ось Z. Волновые функции таких состояний будем обозначать через $\psi_{l_1 l_2 l m}$. Из них путем линейных комбинаций можно составить волновую функцию любого состояния с заданными l_1 и l_2. Поэтому число линейно независимых функций типа $\psi_{l_1 l_2 l m}$ с заданными l_1 и l_2 должно быть равно $(2l_1+1)(2l_2+1)$.

Убедимся в этом путем прямого вычисления. Из формулы (32.2) непосредственно следует, что если проекции m_1 и m_2 имеют определенные значения, то и проекция m также имеет определенное значение m, причем $m = m_1 + m_2$. Ради определенности будем предполагать, что

$l_1 > l_2$. Тогда при заданных l_1 и l_2 возможные положительные значения m, получаемые таким путем, представятся следующей схемой:

m_1	m_2	m
l_1	l_2	$l_1 + l_2$
l_1 $l_1 - 1$	$l_2 - 1$ l_2	$l_1 + l_1 - 1$
l_1 $l_1 - 1$ $l_1 - 2$	$l_2 - 2$ $l_2 - 1$ l_3	$l_1 + l_2 - 2$
...	...	...
l_1	$-l_2$	$l_1 - l_2$

Отберем теперь всевозможные состояния (при заданных l_1 и l_2, для которых максимальные значения проекции m соответственно равны $(l_1 + l_2)$, $(l_1 + l_2 - 1), \ldots$ Это будут состояния с определенным значением l, равным

$$l = (l_1 + l_2),\ l_1 + (l_2 - 1),\ \ldots,\ l_1 - l_2.$$

Число таких состояний равно $2l_2+1$. В каждом из этих состояний m может принимать $(2l+1)$ значений. Таким образом, число всевозможных состояний (при заданных l_1 и l_2 с линейно независимыми функциями типа $\psi_{l_1 l_2 l m}$ будет

$$2(l_1 + l_2) + 1 + 2(l_1 + l_2 - 1) + 1 + \ldots + 2(l_1 - l_2) + 1.$$

Это — арифметическая прогрессия с разностью -2 и общим числом членов $2l_2 + 1$. Ее сумма равна

$$\frac{2(l_1 + l_2) + 1 + 2(l_1 - l_2) + 1}{2}(2l_2 + 1) = (2l_1 + 1)(2l_2 + 1),$$

что и требовалось доказать.

4. Полученные результаты относятся не только к сложению угловых моментов двух невзаимодействующих частиц. Они распространяются без всяких изменений и на произвольные сложные системы, состоящие из двух невзаимодействующих частей 1 и 2. Квадраты их угловых моментов (если они имеют определенные значения) определяются выражениями $L_1(L_1+1)$ и $L_2(L_2+1)$, где L_1 и L_2 — целые положительные числа. Соответствующие проекции на ось Z (если таковые также имеют определенные значения) могут принимать значения:

$$M_1 = -L_1,\ -(L_1 - 1),\ \ldots,\ +(L_1 - 1),\ +L_1,$$

$$M_2 = -L_2,\ -(L_2 - 1),\ \ldots,\ +(L_2 - 1),\ +L_2.$$

Тогда квадрат результирующего углового момента всей системы может принимать значения $L(L + 1)$, где L меняется в пределах

$$L = L_1 + L_2,\ L_1 + L_2 - 1,\ \ldots,\ L_1 - L_2, \tag{32.5}$$

причем предполагается, что $L_1 > L_2$. Соответствующие проекции на ось Z могут принимать целочисленные значения от $M = -L$ до $M = +L$. Полученный результат называется *правилом сложения угловых моментов.*

В полученном состоянии сложной системы имеют определенные значения также скалярные произведения $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}\mathbf{L}_2$, т.е. собственные значения соответствующих операторов $\widehat{\mathbf{L}}_1\widehat{\mathbf{L}}_2$, $\widehat{\mathbf{L}}\widehat{\mathbf{L}}_1$ и $\widehat{\mathbf{L}}\widehat{\mathbf{L}}_2$. Это следует из формулы (32.4), если написать ее для операторов $\widehat{\mathbf{L}}$, $\widehat{\mathbf{L}}_1$, $\widehat{\mathbf{L}}_2$. Например,

$$\widehat{\mathbf{L}}_1\widehat{\mathbf{L}}_2 = \frac{1}{2}\,[\widehat{\mathbf{L}}^2 - \widehat{\mathbf{L}}_1^2 - \widehat{\mathbf{L}}_2^2], \tag{32.6}$$

или, переходя к собственным значениям,

$$\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2 = \frac{1}{2}\,[L(L+1) - L_1(L_1+1) - L_2(L_2+1)]. \tag{32.7}$$

Аналогично

$$\mathbf{L}\mathbf{L}_1 = \frac{1}{2}\,[L(L+1) + L_1(L_1+1) - L_2(L_2+1)], \tag{32.8}$$

$$\mathbf{L}\mathbf{L}_2 = \frac{1}{2}\,[L(L+1) + L_2(L_2+1) - L_1(L_1+1)]. \tag{32.9}$$

5. Изложенные результаты принято представлять на векторных диаграммах. Складываемые векторы $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ изображаются стрелками с длинами $\sqrt{L_1(L_1+1)}$ и $\sqrt{L_2(L_2+1)}$, а результирующий вектор $\mathbf{L}$ — стрелкой с длиной $\sqrt{L(L+1)}$. В качестве примера на рис. 59 приведена векторная диаграмма для $L_1 = 2$ и $L_2 = 1$ при различных углах

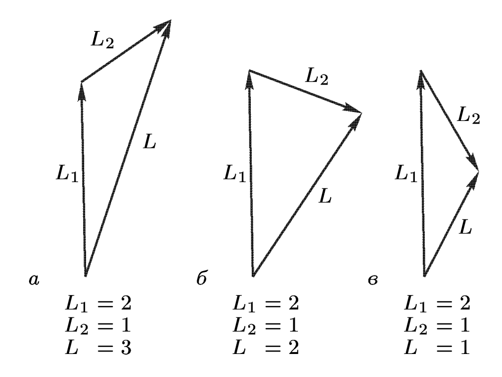


Рис. 59

между векторами $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$. Получается всего три возможных случая, в соответствии с тем, что L может принимать значения $L_1 + L_2 = 3$, $L_1 + L_2 - 1 = 2$, $L_1 + L_2 - 2 = 1$. Такая диаграмма правильно передает длины всех векторов и их скалярные произведения. Но она не отражает

истинную квантовую природу угловых моментов, поскольку последние, имея определенные длины, не имеют определенных направлений в пространстве.

Если системы 1 и 2 не взаимодействуют и нет внешних сил, то сохраняется не только результирующий угловой момент системы $\mathbf{L}$, но и оба момента $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$. При наличии взаимодействия между системами 1 и 2 моменты $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ в отдельности не сохраняются, а сохраняется только общий момент $\mathbf{L}$ (при отсутствии внешних сил). Если взаимодействие слабое, то по аналогии с классической механикой следует ожидать, что длины векторов $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ при этом практически не будут изменяться. На векторной диаграмме векторы $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ будут совершать прецессию, т. е. вращаться вокруг вектора $\mathbf{L}$ с одной и той же угловой скоростью. К такому же выводу приводит и последовательное квантовое рассмотрение.

§ 33. Квантование водородного атома в общем случае

1. В § 27 была рассмотрена задача о квантовании водородного (или водородоподобного) атома в предположении, что волновая функция ψ радиально симметрична, т. е. зависит только от r. В таком случае угловой момент электрона в атоме равен нулю, так как оператор момента действует только на угловые переменные θ и φ, но не действует на r. Уравнение же Шредингера для стационарных состояний записывается в виде

$$\widehat{H}_r\psi = \mathscr{E}\psi, \tag{33.1}$$

где оператор $\widehat{H}_r$ определяется выражением

$$\widehat{H}_r = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + U(r) \tag{33.2}$$

и описывает только радиальное квантовое движение электрона в атоме. Учтем теперь зависимость функции ψ также от угловых координат θ и φ. Для этого к оператору $\widehat{H}_r$ надо добавить оператор $\frac{1}{2mr^2}\widehat{\mathbf{l}}^2$, соответствующий кинетической энергии вращения электрона вокруг ядра:

$$\widehat{H} = \widehat{H}_r + \frac{1}{2mr^2}\widehat{\mathbf{l}}^2. \tag{33.3}$$

Ясно, что оператор $\widehat{H}_r$ коммутирует с операторами $\widehat{\mathbf{l}}^2$ и $\widehat{l}_z$, поскольку последние не действуют на r, а действуют только на угловые переменные θ и φ. То же относится к оператору $[1/(2mr^2)]\widehat{\mathbf{l}}^2$, так как наличие множителя $1/(2mr^2)$ не отражается на такой коммутации. Следовательно, и полный оператор $\widehat{H}$ коммутирует с $\widehat{\mathbf{l}}^2$ и $\widehat{l}_z$, и стационарное состояние электрона в водородном или водородоподобном атоме

можно характеризовать его энергией $\mathscr{E}$, квадратом углового момента $\mathbf{l}^2$ и его проекцией l_z на избранное направление — ось Z.

Уравнение Шредингера для стационарных состояний теперь запишется в виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(\mathscr{E} - U - \frac{\widehat{\mathbf{L}}^2}{2mr^2}\right)\psi = 0. \tag{33.4}$$

Здесь применяется частное дифференцирование по r, поскольку волновая функция ψ может зависеть не только от r, но и от угловых переменных θ и φ. Но какова бы ни была зависимость от θ и φ, для стационарных состояний с определенным значением квадрата углового момента $\widehat{\mathbf{L}}^2\psi = \mathbf{L}^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi$. Поэтому в таких случаях

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(\mathscr{E} - U - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\right)\psi = 0. \tag{33.5}$$

Это уравнение отличается от уравнения (33.1) наличием в скобках дополнительного члена $-\hbar^2 l(l+1)/(2mr^2)$. Формально уравнение (33.5) имеет вид уравнения Шредингера в радиально-симметричном силовом поле с потенциальной силовой функцией

$$U(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}.$$

На второе слагаемое этого выражения можно смотреть как на потенциальную функцию электрона в поле центробежной силы, причем само уравнение (33.5) можно рассматривать как уравнение движения электрона во «вращающейся» системе отсчета.

Поскольку, однако, независимые переменные θ и φ в уравнение (33.5) не входят, волновая функция ψ должна иметь вид $f(\theta,\varphi)\psi(r)$. Во всех вычислениях функция $f(\theta,\varphi)$ будет всюду входить в виде множителя, который не зависит от r, т. е. ведет себя как постоянная. Поэтому ради краткости множитель $f(\theta,\varphi)$ мы будем всюду опускать, т. е. рассуждать так, как если бы функция ψ зависела только от r. Это, очевидно, не нарушает общности рассуждений и их результатов.

2. До сих пор явный вид потенциальной функции $U(r)$ не использовался. Имея теперь в виду водородоподобный атом, положим $U(r) = -Ze^2/r$ и введем такие же обозначения, как в § 27, т. е.

$$\beta^2 = -\frac{2m\mathscr{E}}{\hbar^2}, \quad q = \frac{2mZe^2}{\hbar^2}. \tag{33.6}$$

Тогда уравнение (33.5) запишется в виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \left(\frac{q}{r} - \beta^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\psi = 0. \tag{33.7}$$

Для его исследования применяем такой же метод, что и для исследования уравнения (27.1), т. е. вводим новую функцию $u(r)$ с помощью соотношения

$$\psi = \frac{u(r)}{r}\, e^{-\beta r}. \tag{33.8}$$

Тогда

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - 2\beta \frac{du}{dr} + \left[\frac{q}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] u = 0. \tag{33.9}$$

Ищем решение этого уравнения в виде ряда

$$u = \sum_{k=\gamma}^{\infty} a_k r^k \tag{33.10}$$

и путем сравнения коэффициентов находим

$$\begin{gathered} \gamma(\gamma-1) - l(l+1) = 0, \\ [k(k+1) - l(l+1)]\, a_{k+1} = (2\beta k - q) a_k \text{ при } k \neq \gamma. \end{gathered} \tag{33.11}$$

Из первого уравнения получается либо $\gamma = l+1$, либо $\gamma = -l$. Значение $\gamma = -l$ должно быть отброшено по тем же соображениям, которые применялись при решении аналогичного вопроса в § 27. Таким образом, следует воспользоваться значением $\gamma = l + 1$.

Для исследования сходимости ряда (33.10) из формулы (33.11) находим

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2\beta k - q}{k(k+1) - l(l+1)}.$$

Асимптотически

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2\beta}{k+1}.$$

Это выражение в точности совпадает с соответствующим выражением из § 27. Поэтому, как и раньше, заключаем, что ряд (33.10) должен обрываться. Из условия обрыва получаем прежнюю формулу (27.8) для энергии атома:

$$\mathscr{E} = -\frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2 n^2}. \tag{33.12}$$

3. Из изложенного следует, что значения энергии в стационарных состояниях водородоподобного атома зависят только от главного квантового числа n. Но состояния с заданным n (т. е. с заданной энергией $\mathscr{E}$) могут отличаться одно от другого различными значениями квантовых чисел l и m (не путать с массой). Таким образом, одному и тому же значению $\mathscr{E}$ соответствуют несколько различных квантовых состояний. В этом случае говорят, что состояние с энергией $\mathscr{E}$ *вырождено*. Энергетический уровень $\mathscr{E}$ называют также вырожденным.

Число независимых состояний, суперпозицией которых может быть получено заданное состояние с энергией $\mathscr{E}$, называется *степенью* или

кратностью вырождения. Найдем степень вырождения для водородоподобного атома в состоянии с заданным главным квантовым числом n.

Рассмотрим сначала состояния, в которых (наряду с n) имеет определенное значение и число l. Воспользуемся формулой $\gamma = l + 1$, которая до сих пор еще не принималась во внимание. Имея в виду, что ряд (33.10) должен обрываться на члене n-й степени, запишем его в виде конечной суммы:

$$u = \sum_{k=l+1}^{n} a_k r^k = r^{l+1} \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n-l-1} a_{l+\alpha+1} r^\alpha. \qquad (33.13)$$

Отсюда видно, что главное квантовое число n имеет смысл старшего показателя степени в полиноме (33.13). Число l называется *орбитальным квантовым числом.* Оно определяет квадрат углового момента,

$$\mathbf{l}^2 = l(l+1) \quad (\text{в единицах } \hbar^2).$$

Фиксируя n, подсчитаем число квантовых состояний, отличающихся одно от другого значениями l. Наименьшее значение l есть $l = 0$, наибольшее $l = n - 1$, так как в этом случае сумма (33.13) сводится к одному члену. Следовательно, при заданном n число l может принимать значения

$$l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1), \qquad (33.14)$$

т. е. всего n значений и соответствующих им квантовых состояний с определенными n и l. Функция u, как видно из (33.13), имеет $n_r = n - l - 1$ узлов, если исключить из рассмотрения узел $r = 0$. Но число узлов, как известно (см. § 25, п. 1), определяет номер волновой функции с заданным n. Поэтому главное квантовое число n можно также определить соотношением

$$n = n_r + l + 1. \qquad (33.15)$$

Квантовое число n_r было введено еще Зоммерфельдом в старой квантовой теории и получило название *радиального квантового числа.*

Заметим теперь, что в состоянии с определенным l может иметь различные значения квантовое число m, определяющее проекцию углового момента на ось Z (оно называется *магнитным*). Именно:

$$m = -l,\ -(l-1),\ \ldots,\ -1,\ 0,\ +1,\ \ldots,\ +(l-1),\ +l, \qquad (33.16)$$

т. е. всего $2l+1$ значений. Поэтому полное число квантовых состояний, с помощью которых может реализоваться состояние с заданным n, равно

$$N = \sum_{l=0}^{l=n-1} (2l+1) = n^2. \qquad (33.17)$$

В действительности, как будет показано в § 36, это число следует удвоить из-за наличия спина электрона. Таким образом, кратность вырождения энергетического уровня в водородоподобном атоме равна $2n^2$.

§ 34. Энергетические уровни и спектральные серии щелочных металлов

1. В атомах щелочных металлов (литий, натрий, калий, рубидий, цезий) электронная оболочка содержит один наружный (валентный) электрон, сравнительно слабо связанный с ядром атома. То же относится к ионизованным атомам, если только они содержат по одному наружному (валентному) электрону (однократно ионизованный атом гелия, двукратно ионизованный атом лития, трехкратно ионизованный атом бериллия и т. д.). Переходы между энергетическими уровнями валентного электрона сопровождаются излучением или поглощением квантов сравнительно низких частот — из оптической области спектра. Остальные $Z-1$ электронов (Z — заряд ядра, выраженный в элементарных зарядах) вместе с ядром образуют сравнительно прочный остов, в электрическом поле которого движется валентный электрон. Изменения энергии квантовых уровней остова сравнительно велики и порождают рентгеновские спектры. Этот вопрос здесь рассматриваться не будет. Мы сосредоточим внимание только на излучении и поглощении света, связанных с поведением валентного электрона.

При такой постановке вопроса атом щелочного металла может рассматриваться как *одноэлектронный атом*, в котором роль ядра играет указанный остов. Последний можно характеризовать каким-то эффективным зарядом $Z_a e$. Для нейтрального атома $Z_a = Z - 1$, для однократно ионизованного $Z_a = Z - 2$, для двукратно ионизованного $Z_a = Z - 3$ и т. д. Если удалить валентный электрон, то распределение электрических зарядов в остове и его электрическое поле сделаются сферически симметричными.

2. Стационарные состояния валентного электрона в таком поле определяются теми же тремя квантовыми числами, что и в атоме водорода, а именно *главным квантовым числом* n, *орбитальным квантовым числом* l и *магнитным квантовым числом* m. Квантовое число l определяет квадрат углового момента электрона

$$\mathbf{l}^2 = \hbar^2 l(l+1),$$

магнитное число m определяет проекцию углового момента на избранное направление, обычно принимаемое за ось Z:

$$m_z = l_z m\hbar.$$

При заданном l число m может принимать $2l+1$ значений, а именно

$$m = -l,\ -(l-1),\ \ldots,\ -1,\ 0,\ +1,\ \ldots,\ (l-1),\ l.$$

Главное квантовое число определяется формулой $n = n_r + l + 1$, где n_r — так называемое *радиальное квантовое число*, равное числу узлов волновой функции ψ вдоль радиуса (точка $r = 0$ за узел не считается). При заданном n число l может принимать следующие значения:

$$l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1).$$

Таким образом, получается всего n^2 независимых квантовых состояний, с помощью которых может быть реализовано любое состояние с заданным значением главного квантового числа n. Мы увидим дальше, что три квантовых числа n, l, m должны быть дополнены четвертым — *спиновым* — квантовым числом m_s, которое может принимать два значения $m_s = \pm 1/2$. От этого общее число независимых квантовых состояний удваивается. Но от спина электрона мы в этом параграфе отвлечемся.

Различные состояния электрона в атоме принято обозначать малыми буквами латинского алфавита в зависимости от значения числа l и в соответствии со следующей схемой:

Квантовое число	0	1	2	3	4	5	6	7
Обозначение состояния	*s*	*p*	*d*	*f*	*g*	*h*	*i*	*k*

Говорят, например, об s-состояниях и s-электронах, p-состояниях и p-электронах и т. д. Такая терминология сложилась под влиянием ранних спектроскопических исследований, когда еще не существовало представления не только о квантовых состояниях, но и о строении самого атома.

3. Обращаемся к рассмотрению поведения валентного электрона в электрическом поле ядерно-электронного остова. Внешний электрон, действуя на остов, искажает распределение зарядов и электрическое поле остова. В первом приближении поле остова можно рассматривать как наложение поля точечного заряда $Z_a e$ и поля точечного диполя, расположенных в центре атома. При этом ось диполя направлена к внешнему электрону. Поэтому движение последнего происходит так, как если бы поле остова, хотя и искажалось электроном, но сохранялось сферически симметричным. Соответствующая потенциальная функция может быть представлена в виде

$$U = -\frac{Z_a e^2}{r} - C\frac{Z_a e^2}{r^2}, \tag{34.1}$$

где C — постоянная. На это выражение следует смотреть как на разложение функции U по степеням $1/r$, оборванное на втором члене. В соответствии с этим член $-CZ_a e^2/r^2$ надо рассматривать как поправку к основному члену $-Z_a e^2/r$. Таким образом, в принятом приближении все отличие от водородоподобного атома состоит в том, что к потенциальной функции добавляется член $-C(Z_a e^2/r^2)$. В уравнении (33.5) этот член можно объединить с центробежной энергией и полученную сумму представить в виде

$$\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - C\frac{Z_a e^2}{r^2} = \frac{\hbar^2 l^*(l^*+1)}{2mr^2}, \tag{34.2}$$

где постоянное число l^* определяется квадратным уравнением

$$l^*(l^*+1) = l(l+1) - \frac{2m}{\hbar^2}CZ_a e^2. \tag{34.3}$$

В результате мы снова придем к уравнению (33.7), в котором число l надо заменить числом l^*, т. е. к уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial r} + \left(\frac{q^*}{r} - \beta^2 - \frac{l^*(l^*+1)}{r^2}\right)\psi = 0, \tag{34.4}$$

причем теперь

$$q^* = 2mZ_a e^2/\hbar^2. \tag{34.5}$$

В отличие от l, число l^*, вообще говоря, не целое. Но это не имеет никакого значения для применения метода, изложенного в предыдущем параграфе. По-прежнему функцию $u(r)$ следует искать в виде ряда (33.10). Для l^* из (34.3) получается выражение

$$l^* = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2m}{\hbar^2}\,CZ_a e^2}. \tag{34.6}$$

При этом положительную величину $(2m/\hbar^2)CZ_a e^2$ следует рассматривать как поправку к основному члену $(l + 1/2)^2$. Когда эта поправка обращалась в нуль, мы видели, что перед квадратным корнем следует брать знак плюс. Следовательно, то же надо делать и тогда, когда поправка отлична от нуля. При отсутствии поправки $\gamma = l + 1$, при наличии таковой $\gamma = l^* + 1$. Таким образом, все отличие атома щелочного металла от водородоподобного сводится к замене числа l на число l^*. Поэтому энергетические уровни атомов щелочных металлов и сходных с ними ионов должны определяться формулой

$$\mathscr{E} = -\frac{mZ_a^2e^4}{2\hbar^2(n_r + l^* + 1)^2}.$$

Вводя главное квантовое число (33.15), этой формуле можно придать вид

$$\mathscr{E} = -\frac{mZ_a^2e^4}{2\hbar^2(n + \Delta)^2}, \tag{34.7}$$

где $\Delta = l^* - l$.

4. Величина поправки Δ, как видно из формулы (34.6), зависит от орбитального квантового числа l. Постоянная C также зависит от l. Качественно происхождение последней зависимости особенно ясно с точки зрения модельной теории Бора. Максимальному значению l в этой теории соответствует круговая орбита, минимальному — наиболее вытянутая эллиптическая орбита. В последнем случае орбита валентного электрона глубоко проникает внутрь атомного остова и поэтому сильно возмущает его поле. В случае круговых орбит такого проникновения нет, и возмущение получается меньше. Квантовая механика, отвергая в принципе наглядные классические траектории, по существу дает такое же объяснение. С ее точки зрения дело сводится к тому, что вероятность обнаружения электрона глубоко в атомном остове больше при малых l, чем при больших. В самом деле, при больших l плотность

вероятности обнаружения электрона в атоме ближе к сферически симметричной, чем при малых. При максимальных значениях $l = n - 1$ она становится просто сферически симметричной. При малых l дело обстоит наоборот.

В предыдущем параграфе было показано, что в водородном или водородоподобном атоме при одном и том же n различным значениям l, m соответствует один и тот же уровень энергии. Таким образом, энергия зависит только от n, т. е. имеет место *вырождение по обоим квантовым числам* l и m. Такое вырождение — случайное и связано с тем, что электрическое поле ядра атома водорода, т. е. протона, — кулоновское, поскольку протон можно рассматривать как точечный заряд. В атоме щелочного металла валентный электрон находится в электрическом поле атомного остова. Заряд последнего — не точечный, хотя и распределен в нем сферически симметрично. Электрическое поле остова уже не обратно пропорционально квадрату расстояния до центра остова. Благодаря этому и получается зависимость энергии электрона не только от главного квантового числа n, но и от орбитального числа l. Иными словами, в некулоновском центрально-симметричном поле вырождение по l снимается. Вырождение по m остается, так как энергия не может зависеть от m ввиду изотропии пространства. С этим и связано отличие спектральных термов щелочных металлов от термов атома водорода.

5. Уровням энергии (34.7), согласно формуле (12.3), в атомах щелочных металлов соответствуют спектральные термы

$$T = -\frac{\mathscr{E}}{ch} = -\frac{\mathscr{E}}{2\pi c\hbar} = \frac{Z_a^2 R}{(n+\Delta)^2}, \tag{34.8}$$

где

$$R = \frac{2m\pi^2 e^4}{ch^3} = \frac{me^4}{4c\pi\hbar^3}. \tag{34.9}$$

Такой вид термов для щелочных металлов (т. е. при $Z_a = Z - 1$) был эмпирически установлен Ридбергом в конце XIX века. Эти термы имеют водородоподобный вид. Они отличаются от водородных термов поправкой Δ, которая для водорода равна нулю. Замечательно (и это поразило первых исследователей), что R есть та же постоянная Ридберга, которая входит в выражения для водородных термов.

Спектральные термы щелочных атомов характеризуются двумя квантовыми числами: главным квантовым числом n и орбитальным квантовым числом l. Главное квантовое число ставится впереди и обозначается цифрой, за ним следует значение числа l, обозначаемое буквой, в соответствии со схемой п. 2. Например, $3s$ обозначает терм с $n = 3$, $l = 0$; символ $5d$ обозначает терм с $n = 5$, $l = 2$ и т. д. Таким образом, для щелочных металлов получаются следующие обозначения термов:

$$ns = \frac{R}{(n+s)^2}, \quad np = \frac{R}{(n+p)^2}, \quad nd = \frac{R}{(n+d)^2}, \tag{34.10}$$

и т. д. Числовые значения поправки к числу n в правой части обозначены здесь через s, p, $d, \ldots$ Их не надо смешивать с теми же символами, стоящими слева (здесь они обозначают соответственно $l = 0$, $l = 1$, $l = 2, \ldots$). Такая терминология исторически сложилась еще при чисто эмпирических исследованиях спектральных закономерностей. Число Z_a здесь положено равным единице, так как имеются в виду не ионы, а нейтральные атомы.

6. Самый низкий уровень энергии водородоподобного атома занимает электрон с главным квантовым числом $n = 1$. Это же главное квантовое число может иметь еще один электрон (подробнее см. § 38). С присоединением его в случае $Z = 2$ получается нейтральный атом гелия. Больше двух электронов с главным квантовым числом $n = 1$ быть не может. Такие два электрона образуют замкнутую оболочку гелия — то, что выше было названо атомным остовом. Если присоединить третий электрон, то он начинает занимать следующую оболочку с главным квантовым числом $n = 2$. Тогда при $Z = 3$ получится щелочной элемент литий. Построение этой замкнутой оболочки заканчивается на элементе неоне. Далее идут щелочные элементы, с которых начинается построение следующих замкнутых оболочек: натрий ($n_{\text{мин}} = 3$), калий ($n_{\text{мин}} = 4$), рубидий ($n_{\text{мин}} = 5$), цезий ($n_{\text{мин}} = 6$).

7. Путем комбинаций различных термов возникают спектральные линии в соответствии с комбинационным принципом Ритца. Только не все комбинации, сопровождающиеся излучением (или поглощением) спектральных линий, разрешены. Уже эмпирически давно было замечено, что в щелочных металлах при излучении (и поглощении) света термы s комбинируют только с термами p; термы p комбинируют только с термами s и d, термы d комбинируют только с термами p и f, и т. д. На атомном языке это означает, что при соответствующих квантовых переходах, сопровождающихся излучением света, число l может меняться только на единицу:

$$\Delta l = \pm 1.$$

Этот и аналогичные результаты получили название *правил отбора.* Остальные комбинации *запрещены.* Это не значит, что соответствующие переходы вообще невозможны. Правила отбора относятся только к *дипольному излучению и поглощению света* и не относятся к другим процессам, которые могут происходить в атомах. Например, при ударе возможны переходы с какого-либо уровня s на уровни d, f, g и т. д. Однако при этом не происходит изменения дипольного момента атома, сопровождающееся излучением света. Более того, и «запрещенные переходы» могут сопровождаться испусканием спектральных линий. Но это не будет *дипольное излучение*, при котором меняется дипольный момент атома, а, например, *квадрупольное* или *октупольное* излучения, возникающие из-за изменения квадрупольного и октупольного моментов. К такого рода излучениям правило отбора $\Delta l = \pm 1$ не относится. Заметим еще, что на изменения главного квантового числа n никакие ограничения не накладываются.

Квантовая механика сняла покров таинственности, с которой до нее воспринимались правила отбора. Она поставила и разрешила более общую задачу: найти *вероятность перехода* атомной системы с излучением света из одного квантового состояния в другое. Оказалось, что при несоблюдении правил отбора соответствующая вероятность обращается в нуль. Это и приводит к правилам отбора или, лучше, *правилам запрета* (для дипольного излучения света). Эти правила можно получить, и не прибегая к конкретному вычислению соответствующих вероятностей, а из общих соображений. Надо воспользоваться тем, что законы природы *зеркально симметричны*, т. е. *инвариантны относительно операции инверсии* — замене всех трех направлений координатных осей на противоположные. Но на этом вопросе мы остановимся в главах, посвященных ядерной физике.

8. С учетом правила отбора $\Delta l = \pm 1$ легко понять, что в спектрах щелочных элементов должны получаться (и действительно получались на опыте еще до всякой теории) следующие *спектральные серии*:

главная серия

$$\overline{\nu} = ns - mp; \tag{34.11}$$

первая побочная, или *диффузная*, *серия*

$$\overline{\nu} = np - md; \tag{34.12}$$

вторая побочная, или *резкая*, *серия*

$$\overline{\nu} = np - ms; \tag{34.13}$$

серия Бергмана, или *фундаментальная*, *серия*

$$\overline{\nu} = nd - mf; \tag{34.14}$$

Здесь $\overline{\nu} = 1/\lambda$ — *спектроскопическое волновое число*. Число n в каждой серии сохраняется постоянным, число m в главной серии должно пробегать значения $m = n, n+1, n+2, \ldots$, а в остальных сериях — значения $m = n+1, n+2, \ldots$, чтобы получились все линии серий. Поправки Δ в переменных членах в пределах каждой серии остаются практически постоянными, но меняются от серии к серии.

Схема квантовых переходов и соответствующие им спектральные линии представлены на рис. 60 для лития и на рис. 61 для натрия. Длины волн спектральных линий даны в ангстремах (1 Å = 0,1 нм). В первом столбце (s) на рис. 60 изображены энергетические уровни лития в s-состоянии при различных значениях главного квантового числа, во втором — то же при различных n, но при одних и тех же значениях p, в третьем — при одних и тех же значениях d и т. д. В случае кулоновского поля получились бы энергетические уровни, зависящие только от n, но не зависящие от l. Для щелочных металлов такое вырождение энергетических уровней снимается из-за отличия электрического поля от кулоновского. Детали спектральной диаграммы натрия, а также вопросы, касающиеся спектральной символики, выяснятся в § 40.

Главная серия возникает в результате квантовых переходов валентного электрона из различных p-состояний на наиболее глубокий s-уровень. На этом уровне атом находится в невозбужденном состоянии

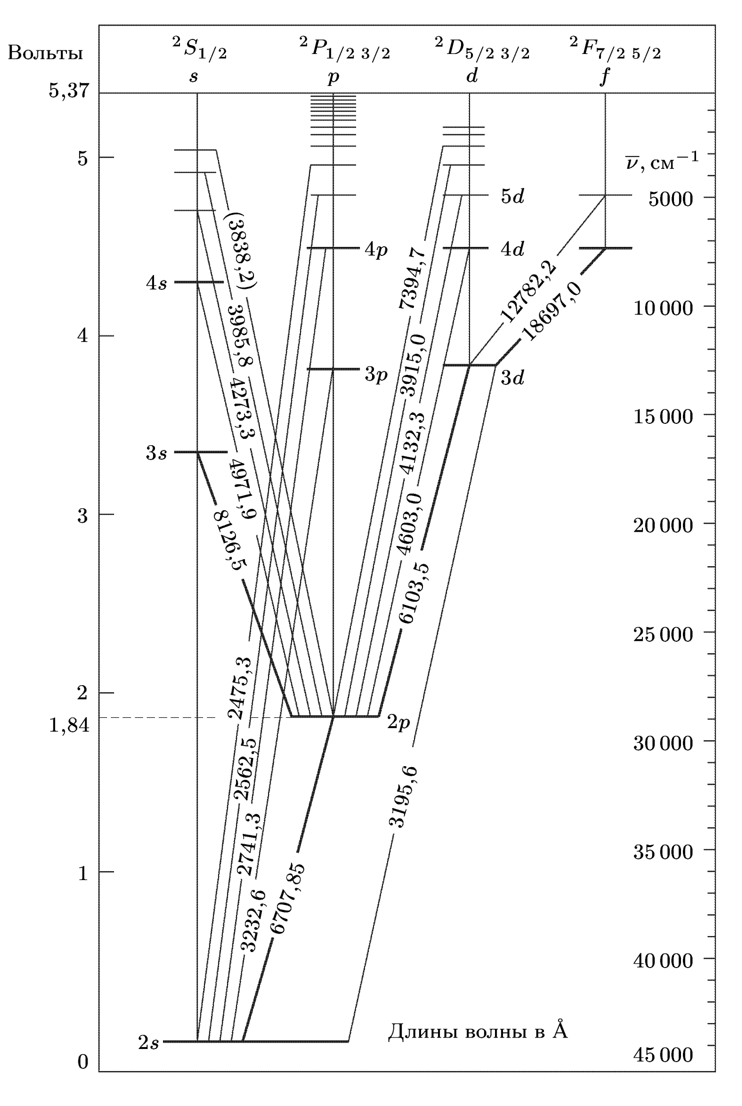


Рис. 60

и может переходить в энергетически более высокие состояния. Поэтому главная серия наблюдается не только в *испускании*, но и в *поглощении*. На рис. 62 показана в спектре поглощения главная серия паров натрия. Приведена только коротковолновая часть серии, начиная с пятого чле-

Вольты
5,12
5,0
4,0
3,0
2,1
2,0
1,0
0
$^2S_{1/2}$ s
$^2P_{3/2}$ p_1
$^2P_{1/2}$ p_2
$^2D_{5/2\;3/2}$ d
$^2F_{7/2\;5/2}$ f
$\overline{\nu}$, см$^{-1}$
9s 8s 7s 6s 5s 4s 3s
8p1 7p1 6p1 5p1 4p1 3p1
8p2 7p2 6p2 5p2 4p2 3p2
7d 6d 5d 4d 3d
5f 4f
3149,09
5153,65
6160,73
22084
11382,4
11404,2
2853,03
3302,94
6154,21
4982,87
4978,61
5688,22
8194,82
5682,67
8183,30
12677,6
18459,5
2852,83
3302,34
D_2 5889,963
D_1 5895,930
3427,1
5000
10 000
15 000
20 000
25 000
30 000
35 000
40 000
45 000
Длины волны в Å

Рис. 61

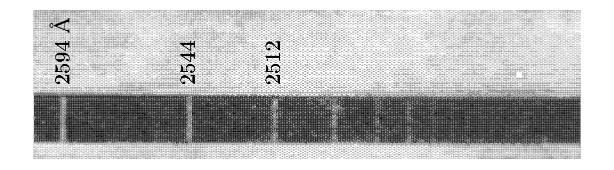

2594 Å
2544
2512

Рис. 62

на ($\lambda = 2594$ Å). Главная серия содержит наиболее характерную для рассматриваемого элемента резонансную линию

$$\overline{\nu}_{\text{рез}} = ns - np. \tag{34.15}$$

Таковы, например, красная линия лития и желтая линия натрия.

Первая побочная (диффузная) серия возникает в результате переходов валентного электрона из различных d-состояний на наиболее глубокий p-уровень, вторая побочная (резкая) — из различных s-состояний на тот же самый глубокий p-уровень. Оправдание названий «диффузная» и «резкая» будет дано в § 40.

ЗАДАЧИ

1. Будут ли в принципе одинаковы спектральные линии атомов, ядра которых имеют одинаковые заряды, но отличаются размерами и формой?

Решение. Спектры будут несколько (хотя и очень мало) отличаться друг от друга, так как по волновой механике поведение электрона определяется волновым уравнением во всем пространстве, где существует силовое поле.

2. Для лития значение терма $2p$, вычисленное из пределов побочных серий, равно $2p = 28\,581{,}4$ см$^{-1}$. Длины волн линий $2p - 3d$ и $3d - 4f$ равны соответственно $\lambda_1 = 6103{,}77$ Å и $\lambda_2 = 18\,697{,}0$ Å. Вычислить длину волны $2p - 4f$.

Решение. Спектроскопические волновые числа линий $2p - 3d$ и $3d - 4f$ равны соответственно

$$1/\lambda_1 = \overline{\nu}_1 = 16\,383{,}3 \text{ см}^{-1}, \quad 1/\lambda_2 = \overline{\nu}_2 = 5348{,}4 \text{ см}^{-1}.$$

Отсюда $3d = 2p - \overline{\nu}_1 = 12\,198{,}1$ см$^{-1}$, $4f = 3d - \overline{\nu}_2 = 6849{,}7$ см$^{-1}$; $2p - 4f = 21\,731{,}7$ см$^{-1}$, $\lambda = 4602{,}8$ Å.

§ 35. Магнетизм атомов

1. Со времени Ампера (1775–1836) магнетизм был сведен к *электрическим токам*, которые, по его представлениям, циркулируют внутри мельчайших частиц вещества (атомов и молекул). Природа этих токов была установлена с появлением электронных представлений о строении вещества и теории Бора. Считалось, что *амперовы молекулярные токи* создаются электронами, вращающимися вокруг ядра атома. Однако классическая физика до введения квантовых представлений была не в состоянии объяснить не только движение электронов вокруг ядра, но и сам факт существования атомов. Методами статистической физики было строго показано, что *с классической точки зрения в установившемся состоянии вещество не может быть намагничено, т. е. не может иметь отличный от нуля магнитный момент* (Бор, Лорентц, Ван-Лёвен; см. т. III, § 75). Это не значит, что его нельзя намагнитить вообще. Электрические заряды можно привести во вращение, т. е. возбудить в веществе круговые токи. А в таком случае появится магнитный момент, т. е. намагничивание вещества. Смысл приведенного утверждения состоит в том, что *если намагниченное вещество предоставить самому себе, поддерживая температуру его постоянной,*

то оно самопроизвольно придет в равновесное состояние, в котором всякая намагниченность исчезнет, даже если вещество помещено в магнитное поле. Это не согласуется с фактами.

Понимание природы магнетизма пришло только после создания квантовой механики. Магнетизм, как и существование атомов и молекул, оказался *квантовым эффектом.* Классические теории намагничивания (Ланжевен) имели известный успех, и притом немалый, только потому, что они молчаливо вводили допущения *существенно квантового характера*, а именно существование у атомов готовых магнитных моментов, или стационарных орбит, по которым вращаются электроны. А это, в сущности, и должна была бы объяснить теория.

2. Поскольку электроны, образующие оболочку атома, заряжены и обладают массами, с их движением в оболочке (оно называется орбитальным) связан не только момент количества движения, но и *магнитный момент атома.* Связь между этими двумя моментами уже рассматривалась в т. III (§ 75) — в той мере, как это можно было сделать до введения квантовых представлений. Та же связь сохраняется и в квантовой механике. Но ее смысл, а потому и обоснование — несколько иные, чем в классической механике, так как понятие момента количества движения (углового момента) не может быть перенесено автоматически из классической теории в квантовую. Это делается посредством введения соответствующего оператора. Так же надо поступить и с понятием магнитного момента. Отправным пунктом при этом должно служить классическое рассмотрение, с которого мы и начнем.

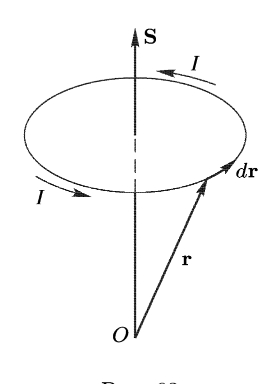


Рис. 63

Согласно электродинамике (см. т. III, § 75) замкнутый виток постоянного тока I (рис. 63) обладает магнитным моментом

$$\mathfrak{m} = \frac{I}{c}\,\mathbf{S}, \tag{35.1}$$

где $\mathbf{S}$ — вектор площади, натянутой на контур тока. Этот вектор выражается формулой

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\oint[\mathbf{r}\,d\mathbf{r}]$$

и не зависит от выбора начала координат O, поскольку контур тока замкнут. Направление обхода контура предполагается совпадающим с направлением тока. Оно находится в правовинтовом соотношении с вектором $\mathbf{S}$. Таким образом, магнитный момент замкнутого постоянного тока можно представить в виде

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\oint I[\mathbf{r}\,d\mathbf{r}]. \tag{35.2}$$

Но ток I образуется движущимися зарядами. Последние и являются непосредственными создателями магнитного момента $\mathfrak{m}$. Каждый заряд, если он движется, создает магнитный момент. Полный магнитный момент тела образуется векторной суперпозицией магнитных моментов отдельных зарядов, движущихся в нем. Преобразуем поэтому контурный интеграл (35.2) в интеграл по всем движущимся зарядам тела. Пусть dq — заряд, проходящий за время dt через поперечное сечение витка с током (в случае постоянного тока эта величина не зависит от того, в каком месте взято сечение витка). Тогда $I = dq/dt$,

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\oint \frac{dq}{dt}\,[\mathbf{r}\,d\mathbf{r}] = \frac{1}{2c}\oint \left[\mathbf{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right] dq.$$

В этой формуле интегрирование производится еще по $d\mathbf{r}$, так что интеграл остается контурным. Выберем, однако, элемент контура $d\mathbf{r}$ так, чтобы за время dt заряд dq перемещался на $d\mathbf{r}$. Тогда $d\mathbf{r} = v\,dt$, и мы получим

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\int [\mathbf{rv}]\,dq = \frac{1}{2\mu c}\int [\mathbf{rp}]\,dq, \tag{35.3}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость, $\mathbf{p}$ — импульс, а μ — масса, связанная с движущимся зарядом dq. (Для массы используется обозначение μ, так как через m обозначается магнитное квантовое число.)

Но при сделанном выборе dq есть как раз заряд, содержащийся в рассматриваемый момент времени на элементе контура $d\mathbf{r}$. При таком истолковании заряда dq время dt выпало из формулы (35.3). Из нее выпало и всякое упоминание о витке с постоянным током (поэтому-то и опущен кружок у знака интеграла). Осталась только система зарядов, каждый из которых, помимо своей величины, характеризуется положением и скоростью движения. Только это и существенно для создания магнитного момента тела. Как создается система зарядов и ее состояние — это не имеет значения.

Формула (35.3) и представляет магнитный момент тела как суперпозицию магнитных моментов движущихся зарядов. Ее можно обобщить и записать в виде

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\sum_i q_1[\mathbf{r}_i\mathbf{v}_i], \tag{35.4}$$

предполагая, что имеется в виду система точечных зарядов q_i, движущихся в рассматриваемый момент со скоростями v_i. Никаких предположений о характере движения при этом не вводится.

3. Классическое выражение (35.4) для магнитного момента системы движущихся зарядов зависит от выбора начала координат. Действительно, если $\mathbf{a}$ — радиус-вектор нового (штрихованного) начала относительно старого (нештрихованного), то для всех зарядов $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{a}$, так что

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' + \frac{1}{2c}\sum_i q_i[\mathbf{a}\mathbf{v}_i].$$

Отсюда видно, что старый $\mathfrak{m}$ и новый $\mathfrak{m}'$ магнитные моменты только тогда будут всегда одинаковы, когда для любого вектора $\mathbf{a}$ векторное произведение $\left[\mathbf{a}\sum q_i\mathbf{v}_i\right]$ обращается в нуль. В частности, это имеет место для всякого замкнутого неподвижного витка постоянного тока, так как тогда $\sum q_i\mathbf{v}_i = 0$.

4. Для одиночного точечного заряда, движущегося со скоростью $\mathbf{v}$,

$$\mathfrak{m} = \frac{q}{2c}\,[\mathbf{rv}] = \frac{q}{2\mu c}\,[\mathbf{rp}], \tag{35.5}$$

где μ — масса, а $\mathbf{p}$ — импульс частицы, несущей этот заряд. Таким образом, классическая физика приводит к соотношению

$$\mathfrak{m} = \Gamma\mathbf{L}, \tag{35.6}$$

где

$$\Gamma = \frac{q}{2\mu c}. \tag{35.7}$$

Эти формулы более примитивным путем уже были получены в т. III (см. § 75). Для электрона $q = -e$,

$$\Gamma = -\frac{e}{2\mu_e c}. \tag{35.8}$$

В этом случае отношение Γ магнитного момента электрона к механическому называется *гиромагнитным отношением* для орбитального движения электрона.

Заметим еще, что при выводе всех полученных соотношений применялась *нерелятивистская механика* (зависимость массы от скорости не учитывалась), а частицы считались точечными. Впрочем, частицы могут быть и протяженными, так как их можно мысленно разбить на малые части и рассматривать последние как точки. Однако чтобы отношение $\mathfrak{m}/L$ не изменилось, необходимо предположить, что заряды и массы распределены в пространстве по одному и тому же закону. Для заряженного шарика, например, вращающегося вокруг диаметра с нерелятивистской скоростью, классическая физика приводит к формулам (35.7) и (35.8) независимо от того, как распределены в нем заряды и массы; важно только, чтобы обе величины были распределены *одинаково*. Но, конечно, результат получится иной, если, например, заряд будет находиться в центре, а масса равномерно распределена по объему шарика.

5. Теперь следует классические представления заменить квантовыми. В квантовой механике формула (35.5) не может служить определением магнитного момента, поскольку не существует никакого состояния частицы, которое характеризовалось бы и ее точным положением $\mathbf{r}$, и ее точным импульсом $\mathbf{p}$. Как и в случае углового момента, от классической формулы (35.5) квантовая механика переходит к *операторному соотношению*

$$\widehat{\mathfrak{m}} = \frac{q}{2c}\left[\widehat{\mathbf{r}}\widehat{\mathbf{v}}\right] = \frac{q}{2\mu c}\left[\widehat{\mathbf{r}}\widehat{\mathbf{p}}\right], \tag{35.9}$$

или

$$\widehat{\mathfrak{m}} = \Gamma\widehat{\mathbf{L}}. \tag{35.10}$$

Изучение магнитного момента частицы тем самым сводится к изучению свойств оператора $\widehat{\mathfrak{m}}$. Поскольку операторы $\widehat{\mathfrak{m}}$ и $\widehat{\mathbf{L}}$ отличаются только постоянным множителем, их свойства совершенно аналогичны. В частности, оператор $\widehat{\mathfrak{m}}$, как и $\widehat{\mathbf{L}}$ совершенно *не зависит от выбора начала координат.* Магнитный и угловой моменты квантуются по одинаковым правилам. Составляющие магнитного момента на любые два различных направления *не могут одновременно иметь определенные значения.* В стационарном состоянии определенные значения могут иметь квадрат магнитного момента и одна из его проекций на координатные оси. За таковую обычно принято принимать ось Z. Из формул (35.8) и (35.10) для орбитального движения электрона непосредственно вытекает

$$\mathfrak{m}_z = -\frac{e}{2\mu_e c}\, L_z = -\mathfrak{m}_\text{Б} m, \tag{35.11}$$

где

$$\mathfrak{m}_\text{Б} = \frac{e\hbar}{2\mu_e c} = 9{,}274 \cdot 10^{-21}\ \text{эрг/Гс}. \tag{35.12}$$

Постоянная $\mathfrak{m}_\text{Б}$ носит название *магнетона Бора.* Магнетон Бора можно рассматривать как *квант магнитного момента* (точнее, его проекции на избранное направление).

Возможен другой способ вывода формулы (35.11). Из временного уравнения Шредингера получают уравнение непрерывности $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, где ρ и $\mathbf{j}$ — плотность вероятности и плотность тока вероятности. По значению последней и по волновой функции находят плотность вероятности электрического тока в стационарном состоянии атома, а затем непосредственным интегрированием находят и средний магнитный момент, создаваемый этим током. Этот прямой способ рассуждения обладает тем принципиальным недостатком, что плотность тока вероятности $\mathbf{j}$ определяется нерелятивистским уравнением Шредингера *неоднозначно*: к полученному выражению можно добавить любое слагаемое вида $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ (поскольку $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$), не меняя значения полного потока вероятности через любую замкнутую поверхность, который только и доступен наблюдению. Плотность самого электрического тока в атоме, в отличие от потока вероятности, конечно, — *величина наблюдаемая*, но для ее однозначного определения *одного нерелятивистского уравнения Шредингера недостаточно.* Неоднозначность можно устранить, но для этого надо перейти к *релятивистской теории.* В самом деле, величина ρ по своему смыслу есть величина *однозначная.* А в релятивистской теории скаляр ρ и три компоненты вектора $\mathbf{j}$ объединяются в один *релятивистски инвариантный четырехмерный вектор*, временной компонентой которого является ρ.

§ 36. Опыты Штерна и Герлаха. Спин электрона

1. Наличие у атомов магнитных моментов и их квантование было доказано прямыми опытами Штерна и Герлаха (1889–1979) в 1921 г. В сосуде с высоким вакуумом создавался с помощью диафрагм B и B' (рис. 64) резко ограниченный атомный пучок исследуемого элемента,

испаряющегося в печи K. Пучок проходил через сильное магнитное поле $\mathbf{H}$ между полюсными наконечниками N и S электромагнита. Один из наконечников (N) имел вид призмы с острым ребром, а вдоль другого (S) была выточена канавка. Благодаря такой конструкции полюсных наконечников магнитное поле получалось *сильно неоднородным.* После прохождения через магнитное поле пучок попадал на фотопластинку P и оставлял на ней след.

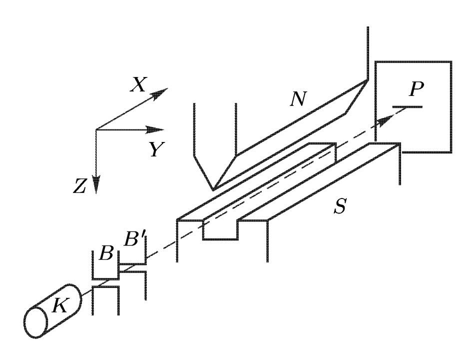


Рис. 64

Рассчитаем поведение атомного пучка сначала с классической точки зрения, предполагая, что никакого квантования магнитных моментов нет. Если $\mathfrak{m}$ — магнитный момент атома, то на атом в неоднородном магнитном поле действует сила

$$\mathbf{f} = (\mathfrak{m}\nabla)\mathbf{H}.$$

Направим ось Z вдоль магнитного поля (т. е. от N к S перпендикулярно к полюсным наконечникам). Тогда проекция силы в этом направлении будет

$$f_z = \mathfrak{m}_x \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathfrak{m}_y \frac{\partial H_z}{\partial y} + \mathfrak{m}_z \frac{\partial H_z}{\partial z}.$$

Первые два слагаемых в этом выражении не играют роли. В самом деле, по классическим представлениям атом в магнитном поле совершает прецессию вокруг оси Z, вращаясь с ларморовской частотой

$$\Omega = -\frac{eH}{2\mu c}$$

(заряд электрона обозначен через $-e$). Поэтому проекции $\mathfrak{m}_x$ и $\mathfrak{m}_y$ совершают колебания с той же частотой, становясь попеременно то положительными, то отрицательными. Если угловая скорость прецессии достаточно велика, то силу f_z можно усреднить по времени. При этом первые два члена в выражении для f_z обратятся в нуль, и можно написать

$$\overline{f}_z = \mathfrak{m}_z \frac{\partial H_z}{\partial z}. \tag{36.1}$$

Чтобы составить представление о степени допустимости такого усреднения, произведем численную оценку. Период ларморовской прецессии равен

$$\tau = \frac{2\pi}{|\Omega|} = \frac{4\pi\mu c}{eH} \approx \frac{7 \cdot 10^{-7}}{H} \text{ с},$$

где поле H измеряется в гауссах. Например, при $H = 1000$ Гс получаем $\tau \approx 7 \cdot 10^{-10}$ с. Если скорость атомов в пучке равна $v = 100$ м/с $= 10^4$ см/с, то за это время атом пролетает расстояние $x \approx 7 \cdot 10^{-6} \approx 10^{-5}$ см, пренебрежимо малое по сравнению со всеми характерными размерами установки. Это и доказывает применимость проведенного усреднения.

Но формула (36.1) может быть оправдана и с квантовой точки зрения. В самом деле, включение сильного магнитного поля вдоль оси Z приводит к состоянию атома только с одной определенной составляющей магнитного момента, а именно $\mathfrak{m}_z$. Остальные две составляющие $\mathfrak{m}_x$ и $\mathfrak{m}_y$ в этом состоянии не могут иметь определенных значений. При измерениях в этом состоянии $\mathfrak{m}_x$ и $\mathfrak{m}_y$ получили бы различные значения и притом их средние были бы равны нулю. Поэтому и при квантовом рассмотрении усреднение (36.1) оправдано.

2. Тем не менее следует ожидать различных результатов опыта с классической и с квантовой точек зрения. В опытах Штерна и Герлаха сначала получался след атомного пучка при выключенном магнитном поле, а затем при включенном. Если бы проекция $\mathfrak{m}_z$ могла принимать всевозможные непрерывные значения, как требует классическая теория, то сила $\overline{f}_z$ также принимала бы всевозможные непрерывные значения. Включение магнитного поля приводило бы только к *уширению пучка.* Не то следует ожидать по квантовой теории. В этом случае проекция $\mathfrak{m}_z$, а с ней и средняя сила $\overline{f}_z$ *квантованы*, т. е. могут принимать только ряд дискретных избранных значений. Если орбитальное квантовое число атома равно l, то по теории при расщеплении получится $2l + 1$ пучков (т. е. оно равно числу возможных значений, которые может принимать квантовое число m). Таким образом, в зависимости от значения числа l следовало бы ожидать, что *пучок расщепится на* $1, 3, 5, \ldots$ *составляющих.* Ожидаемое число составляющих должно было бы быть *всегда нечетным.*

Опыты Штерна и Герлаха доказали квантование проекции $\mathfrak{m}_z$. Однако их результаты не всегда соответствовали теории, изложенной выше. В первоначальных опытах применялись пучки атомов серебра. В магнитном поле пучок расщеплялся на две составляющие. То же получалось для атомов водорода. Для атомов других химических элементов получалась и более сложная картина расщепления, однако число расщепленных пучков получалось *не только нечетным*, что требовалось теорией, *но и четным*, что противоречило ей. В теорию необходимо было внести коррективы.

3. К этому следует добавить результаты опытов Эйнштейна и де Гааза (1878–1966), а также опытов Барнета (1873–1956) по определению гиромагнитного отношения, которые были изложены в т. III (§ 78). Для

железа, например, оказалось, что гиромагнитное отношение равно

$$\frac{\mathfrak{m}}{L} = \left| \frac{e}{\mu_e c} \right|, \tag{36.2}$$

т. е. вдвое больше, чем требуется по теории.

Наконец, оказалось, что спектральные термы щелочных металлов имеют так называемую *дублетную структуру*, т. е. состоят из двух близко расположенных уровней. Для описания этой структуры трех квантовых чисел n, l, m оказалось недостаточно — потребовалось *четвертое квантовое число*. Это явилось главным мотивом, послужившим Уленбеку (р. 1900) и Гаудсмиту (1902–1979) в 1925 г. для введения гипотезы о *спине электрона* [1]. Сущность этой гипотезы состоит в том, что у электрона есть не только момент количества движения и магнитный момент, связанные с перемещением этой частицы как целого. Электрон имеет также *собственный* или *внутренний механический момент количества движения*, напоминая в этом отношении классический волчок. Этот собственный момент количества движения и называется *спином* (от английского слова to spin — вертеться). Соответствующий ему магнитный момент называется *спиновым магнитным моментом*. Эти моменты обозначаются соответственно через $\mathbf{L}_s$ и $\mathfrak{m}_s$ в отличие от орбитальных моментов $\mathbf{L}_l$ и $\mathfrak{m}_l$. Спин чаще обозначают просто через $\mathbf{s}$.

В опытах Штерна и Герлаха атомы водорода находились в s-состоянии, т. е. не обладали орбитальными моментами. Магнитный момент ядра пренебрежимо мал. Поэтому Уленбек и Гаудсмит предположили, что расщепление пучка обусловлено не орбитальным, а *спиновым магнитным моментом*. То же самое относится к опытам с атомами серебра. Атом серебра имеет единственный наружный электрон. Атомный остов ввиду его симметрии спиновым и магнитным моментами не обладает. Весь магнитный момент атома серебра создается только одним наружным электроном. Когда атом находится в нормальном, т. е. s-состоянии, то орбитальный момент валентного электрона равен нулю — весь момент является спиновым.

4. Сами Уленбек и Гаудсмит предполагали, что спин возникает из-за вращения электрона вокруг собственной оси. Существовавшая в то время модель атома получила еще большее сходство с Солнечной системой. Электроны (планеты) не только вращаются вокруг ядра (Солнца), но и вокруг собственных осей. Однако сразу же выяснилась несостоятельность такого классического представления о спине (см. задачу 1 к этому параграфу). Паули систематически ввел спин в квантовую механику, но исключил всякую возможность классического истолкования этой величины. В 1928 г. Дирак показал, что спин электрона автоматически содержится в его теории электрона, основанной на релятивистском волновом уравнении. В теории Дирака содержится также и спиновый магнитный момент электрона, причем для гиромагнитного

[1] Гипотеза о спине электрона ранее вводилась Кронигом (р. 1904), но его работа не была опубликована.

отношения получается значение, согласующееся с опытом. При этом о внутренней структуре электрона ничего не говорилось — последний рассматривался как точечная частица, обладающая лишь зарядом и массой. Таким образом, *спин электрона оказался квантово-релятивистским эффектом, не имеющим классического истолкования.* Затем концепция спина, как внутреннего момента количества движения, была распространена на другие элементарные и сложные частицы и нашла подтверждение и широкие применения в современной физике.

5. Разумеется, в общем курсе физики нет возможности вдаваться в подробную и строгую теорию спина. Мы примем в качестве исходного положения, что спину $\mathbf{s}$ соответствует векторный оператор $\widehat{\mathbf{s}}$, проекции которого $\widehat{s}_x$, $\widehat{s}_y$, $\widehat{s}_z$ удовлетворяют таким же перестановочным соотношениям (31.2), что и проекции оператора орбитального момента, т. е.

$$\begin{aligned} \widehat{s}_y\widehat{s}_z - \widehat{s}_z\widehat{s}_y &= i\hbar\widehat{s}_x, \\ \widehat{s}_z\widehat{s}_x - \widehat{s}_x\widehat{s}_z &= i\hbar\widehat{s}_y, \\ \widehat{s}_x\widehat{s}_y - \widehat{s}_y\widehat{s}_x &= i\hbar\widehat{s}_z. \end{aligned} \tag{36.3}$$

Из них следует, что определенные значения в одном и том же состоянии могут иметь квадрат полного спина $\mathbf{s}^2$ и одна из его проекций на определенную ось (принимаемую обычно за ось Z). Если максимальное значение проекции s_z (в единицах $\hbar$) равно s, то число всех возможных проекций, соответствующих данному s, будет равно $2s + 1$. Опыты Штерна и Герлаха показали, что для электрона это число равно 2, т. е. $2s + 1 = 2$, откуда $s = 1/2$. Максимальное значение, которое может принимать проекция спина на избранное направление (в единицах $\hbar$), т. е. число s, и принимается за значение спина частицы.

Спин частицы может быть либо целым, либо полуцелым. Для электрона, таким образом, спин равен $1/2$. Из перестановочных соотношений (36.3) следует, что квадрат спина частицы равен $\mathbf{s}^2 = s(s+1)$, а для электрона $\mathbf{s}^2 = (1/2)(1/2+1) = 3/4$ (в единицах $\hbar^2$).

Измерения проекции магнитного момента $\mathfrak{m}_z$ по методу Штерна и Герлаха показали, что для атомов водорода и серебра величина $\mathfrak{m}_z$ равна магнетону Бора $\mathfrak{m}_\text{Б}$, т. е. (35.12). Таким образом, гиромагнитное отношение для электрона

$$\left|\frac{\mathfrak{m}_z}{L_z}\right| = \frac{\mathfrak{m}_\text{Б}}{\hbar/2} = \frac{e}{\mu_\text{e} c}$$

в согласии с (36.2).

ЗАДАЧИ

1. С классической точки зрения спин электрона пытались истолковать как момент количества движения, возникающий из-за вращения электрона вокруг своего диаметра. Электрон считался шариком, его масса определялась по релятивистской формуле $\mathscr{E} = \mu c^2$, причем принималось, что собственная энергия электрона имеет чисто электростатическое происхождение. Проанализировать трудности, возникающие при таком классическом истолковании спина.

Решение. Момент количества движения электрона при его вращении $L = \hbar/2 = I\omega$, где I — момент инерции электрона относительно диаметра, а ω — угловая скорость. Очевидно, $I < \mu r^2$, так как максимальное значение I получилось бы, если бы вся масса электрона была распределена по окружности, а именно по экватору вращающегося электрона. Таким образом,

$$\frac{\hbar}{2} < \mu r^2 \omega, \text{ откуда } v > \frac{\hbar}{2\mu r},$$

где $v = \omega r$ — максимальная линейная скорость на поверхности электрона. Масса электрона $\mu = \mathscr{E}/c^2$. При определении собственной энергии электрона $\mathscr{E}$ возникает трудность. Величина $\mathscr{E}$ зависит от распределения полного заряда e электрона по его объему. Минимальное значение $\mathscr{E} = e^2/2r$ получится при распределении заряда e по поверхности электрона. При равномерном распределении заряда по объему электрона получилось бы $\mathscr{E} = (3/5)e^2/r$. Примем, что $\mathscr{E} = e^2/r$. Тогда

$$v = \frac{\hbar}{2\mathscr{E}r/c^2} > \frac{\hbar c^2}{2e^2} = \frac{c}{2\alpha},$$

где $\alpha = e^2/\hbar c$ — безразмерная величина, называемая *постоянной тонкой структуры* ($\alpha \approx 1/137$). Таким образом, при сделанных предположениях $v > 68{,}5\,c$, т. е. v больше скорости света c, что невозможно.

2. Показать, что методом Штерна и Герлаха измерить магнитный момент электрона невозможно, если опыт производится со *свободным электроном*, а не с электроном, связанным с атомом.

Решение. Поперечные размеры пучка частиц Δx во всех направлениях должны удовлетворять условию $\Delta x \gg \lambda$, где λ — длина волны де Бройля для этих частиц. В противном случае пучок быстро размоется из-за дифракции. В опыте Штерна и Герлаха производится отклонение (расщепление) пучка атомов (точнее, ионов с зарядом e) в направлении оси Z (см. рис. 64). Средняя сила, вызывающая это отклонение, определяется выражением (36.1). Если учесть уравнение

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

(в направлении оси X магнитное поле можно считать равным нулю), то эту силу можно представить в виде

$$\overline{f}_z = -\mathfrak{m}_z \frac{\partial H_y}{\partial y}. \tag{36.4}$$

Если атом движется в плоскости ZX со скоростью $\mathbf{v}$, то ввиду симметрии вектор $\mathbf{H}$ лежит в той же плоскости. Поэтому сила Лорентца $(e/c)[\mathbf{v}\,\mathbf{H}]$ будет направлена вдоль оси Y. Она вызовет смещение пучка вправо или влево вдоль той же оси. В рассматриваемом вопросе это не имеет значения, существенно лишь смещение пучка вдоль оси Z. Но если частица смещена в сторону на Δy от плоскости ZX, то появится слагающая силы Лорентца и вдоль оси Z, а именно

$$(f_{\text{Лор}})_z = -\frac{e}{c}\, v H_y.$$

В первом приближении $H_y = (\partial H_y/\partial y)\Delta y$, так что

$$(f_{\text{Лор}})_z = -\frac{ev}{c}\,\frac{\partial H_y}{\partial y}\,\Delta y. \tag{36.5}$$

Смещения частицы $\Delta_1 z$ и $\Delta_2 z$, вызываемые силами (36.4) и (36.5), относятся как

$$\frac{\Delta_1 z}{\Delta_2 z} = \frac{\overline{f}_z}{(f_{\text{Лор}})_z} = \frac{\mathfrak{m}_z}{(ev/c)\Delta y}.$$

Считая, что атом — однозарядный ион, в качестве $\mathfrak{m}_z$ следует взять магнетон Бора (35.12). Тогда

$$\frac{\Delta_1 z}{\Delta_2 z} = \frac{\hbar}{2\mu_e v \Delta y}.$$

Если μ_a — масса атома, то

$$\frac{\Delta_1 z}{\Delta_2 z} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\mu_a}{\mu_e}\,\frac{\lambda}{\Delta y}, \tag{36.6}$$

где λ — длина волны де Бройля для атома: $\lambda = h/\mu_a v$.

В отсутствие магнитного поля щель, образуемая диафрагмами B и B', изобразится на пластинке P горизонтальной полоской. При включении неоднородного магнитного поля центр полоски сместится силой $\overline{f}_z$. Нецентральные точки полоски испытают дополнительные смещения под действием силы Лорентца. Максимальные дополнительные смещения, и притом в противоположные стороны, получат края полоски. В результате полоска на пластинке P перекосится. Для применимости метода Штерна и Герлаха необходимо, чтобы перекос был мал. Это значит, что должно выполняться условие $|\Delta_1 z| \gg |\Delta_2 z|_{\text{макс}}$, где $|\Delta_2 z|_{\text{макс}}$ — смещение края полоски, вызываемое силой Лорентца, т. е. ее значением при $|\Delta y| = |\Delta y|_{\text{макс}}$. Для свободного электрона $\mu_a = \mu_e$, и (36.6) дает $\Delta_1 z/\Delta_2 z = \lambda/(4\pi\Delta y)$. В этом случае условию $|\Delta_1 z| \gg |\Delta_2 z|_{\text{макс}}$ удовлетворить невозможно, поскольку должно быть $|\Delta y|_{\text{макс}} \gg \lambda$. Но удовлетворить ему оказывается возможным в случае атомов из-за того, что отношение μ_a/μ_e очень велико. Это и используется в методе Штерна и Герлаха.

§ 37. Эффект Садовского и спин фотона

1. В 1889 г. русский физик А.И. Садовский (1859–1921) теоретически предсказал, что свет, поляризованный по кругу или эллиптически, должен обладать моментом количества движения. Этот результат проще всего понять, исходя из закона сохранения момента количества движения. Согласно этому закону полный момент количества движения замкнутой системы должен оставаться постоянным. Рассмотрим эффект Садовского сначала *с классической точки зрения.*

Допустим, что электрический заряд e вращается по окружности радиуса r вокруг другого неподвижного заряда той же величины, но противоположного знака. Как известно, при вращении по окружности полная энергия, складывающаяся из кинетической и потенциальной, равна $\mathscr{E} = -e^2/2r$, т. е. половине потенциальной энергии заряда. Вращение по окружности есть движение ускоренное, а потому по законам классической электродинамики заряд e должен излучать электромагнитные волны. При наличии излучения заряд уже не может двигаться точно по окружности. Он будет непрерывно приближаться к ее центру. Предположим, что за время одного оборота уменьшение растояния r заряда до центра окружности очень мало по сравнению с r. Тогда

движение заряда e все еще можно охарактеризовать как вращение по окружности, радиус которой непрерывно уменьшается. Изменения энергии $\mathscr{E}$ и радиуса r при этом связаны соотношением

$$d\mathscr{E} = \frac{e^2}{2r^2}\,dr.$$

Вращающийся заряд обладает моментом количества движения $L = \mu r^2\omega$, где μ — масса, а ω — круговая частота. При движении по окружности $\mu\omega^2 r = e^2/r^2$, откуда

$$\omega = \frac{e}{\sqrt{\mu r^3}},$$

и следовательно,

$$L = e\sqrt{\mu r}.$$

Значит,

$$dL = \frac{e\sqrt{\mu}}{2\sqrt{r}}\,dr, \qquad \frac{d\mathscr{E}}{dL} = \frac{e}{\sqrt{\mu r^3}} = \omega.$$

Итак, при движении заряда по окружности его энергия и момент количества движения уменьшаются, причем их изменения связаны соотношением

$$\frac{d\mathscr{E}}{dL} = \omega. \tag{37.1}$$

Полная энергия и момент количества движения замкнутой системы должны оставаться постоянными. Система состоит из вещества и его излучения, которые могут обмениваться друг с другом и энергией, и моментом количества движения. Поэтому из постоянства этих величин для всей системы следует, что при изменении r на dr излучение уносит энергию $-d\mathscr{E}$ и момент количества движения $-dL$.

Структура излучения, конечно, определяется процессами, происходившими в излучателе. Но если излучение уже отделилось от излучателя, то теряется связь его с излучателем. Излучение продолжает существовать уже как самостоятельная система. Соотношение между его энергией и моментом количества движения поэтому есть *внутреннее свойство только самого отделившегося излучения.* Отсюда следует, что при рассмотренном нами способе возбуждения излучения его энергия $\mathscr{E}_{\text{изл}}$ и момент количества движения $L_{\text{изл}}$ должны быть связаны соотношением

$$\frac{\mathscr{E}_{\text{изл}}}{L_{\text{изл}}} = \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}. \tag{37.2}$$

2. Излучение, отделившееся от излучателя, в нашем случае имеет довольно сложную структуру. Его интенсивность и поляризация по разным направлениям не одинаковы. В направлении, перпендикулярном к плоскости окружности, по которой вращается заряд e, излучение *поляризовано по кругу*, в плоскости окружности оно *поляризовано линейно*, а во всех остальных направлениях — *эллиптически.* Можно,

конечно, преобразовать все излучение в плоскую бегущую волну, поляризованную по кругу. Для этого можно, например, поместить центр окружности, по которой вращается излучающий заряд, в фокусе бесконечного идеально отражающего параболического зеркала, чтобы плоскость окружности была перпендикулярна к оси зеркала. Получится отраженная плоская волна, бегущая параллельно оси параболического зеркала. Она возникает в результате интерференции отраженных волн различной поляризации. Но ввиду цилиндрической симметрии результирующая волна будет поляризована по кругу. Однако нельзя заранее утверждать, что при отражении от зеркала общий момент количества движения излучения не изменится.

Чтобы преодолеть эту трудность, воспользуемся идеализированной моделью излучателя, аналогичной той, которая применялась в т. III, § 83, для получения плоских электромагнитных волн. Там было показано, что бесконечная заряженная плоскость, приведенная в ускоренное движение, является источником двух плоских электромагнитных волн, распространяющихся от нее в разные стороны с одной и той же энергией. Чтобы исключить статическое электрическое поле зарядов, мы помещали ранее рядом с рассматриваемой плоскостью вторую неподвижную бесконечную плоскость, заряженную электричеством противоположного знака. Теперь изменим слегка эту модель и возьмем снова бесконечную плоскость, но уже неподвижную и находящуюся в вакууме. Разместим на ней равномерно и достаточно густо электрические диполи с электрическими моментами, параллельными этой плоскости. Пусть каждый диполь вращается в этой плоскости вокруг своего центра с одной и той же угловой скоростью ω и одинаковой начальной фазой. Такая плоскость, покрытая вращающимися диполями, возбудит опять две плоские волны, распространяющиеся в разные стороны, но уже поляризованные по кругу. В силу симметрии энергия и момент количества движения распределятся поровну между обеими волнами. Поэтому для каждой из этих двух волн в отдельности соотношение (37.2) сохранится.

3. Направление вращения векторов **E** и **H**, понятно, должно совпадать с направлением вращения диполя **p**, т. е. в обеих волнах будет одно и то же. На рис. 65 направление вращения диполей **p** в плоскости указано стрелкой. В соответствии с указанным направлением моменты количества движения $\mathbf{L}_{\text{изл}}$ обеих волн направлены слева направо. Обе волны будут бегущими и уходящими, так что в обеих из них вектор Пойнтинга **S** направлен наружу. Значит, в волне, уходящей направо, вектор **S** направлен тоже направо, т. е. одинаково с вектором $\mathbf{L}_{\text{изл}}$. В волне же, уходящей налево, вектор **S** направлен налево, т. е. противоположно вектору $\mathbf{L}_{\text{изл}}$. Но волна, идущая вправо, поляризована по левому кругу (вращение векторов

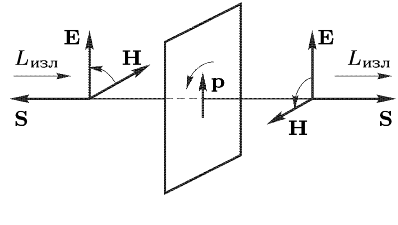


Рис. 65

E и **H** совершается против часовой стрелки, если волна идет к глазу наблюдателя); волна же, идущая влево, поляризована по правому кругу (вращение векторов **E** и **H** совершается по часовой стрелке, если волна идет также к глазу наблюдателя). Таким образом, в левополяризованной волне вектор $\mathbf{L}_{\text{изл}}$ направлен в сторону распространения волны, а в правополяризованной — в сторону, противоположную направлению распространения волны. То же заключение, разумеется, справедливо и для волн, поляризованных эллиптически.

Нелишне особо подчеркнуть, что взаимное расположение векторов **E** и **H** в бегущей волне однозначно определяет направление вектора Пойнтинга **S**, а с ним и направление распространения волны. Но этим расположением еще не определяется вид поляризации волны, поляризованной по кругу или эллиптически: поляризация может быть и левой, и правой. Например, на рисунках 66 *а* и 66 *б* векторы **E**, **H** и **S** имеют одну и ту же ориентацию и обе волны распространяются в одну и ту же сторону, хотя направления вращения векторов **E** и **H**, отмеченные круговыми стрелками, в них противоположны: рис. 66 *а* соответствует левой, а рис. 66 *б* — правой круговой поляризации.

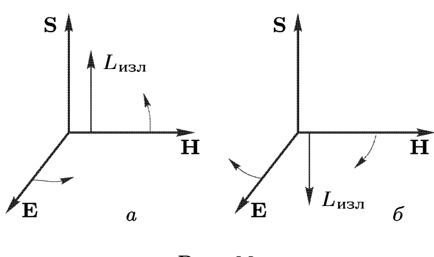


Рис. 66

Укажем теперь, насколько густо надо расположить диполи в излучающей плоскости, чтобы получились только плоские волны, распространяющиеся перпендикулярно к этой плоскости. Для этого надо учесть, что волны, излучаемые отдельными диполями, конечно, интерферируют между собой. Требуется, чтобы при интерференции они взаимно гасили друг друга во всех направлениях, за исключением направлений, перпендикулярных к излучающей плоскости. Для этого достаточно, чтобы *расстояние между диполями было меньше длины волны* λ. Тогда вдали от плоскости возникнут только плоские уходящие волны. Лишь вблизи самой плоскости на них наложатся *неоднородные волны*, не играющие роли в рассматриваемом нами вопросе, так как эти волны быстро затухают в тонком приграничном слое, толщина которого порядка расстояния между диполями.

В итоге получается, что *всякая плоская электромагнитная волна частоты* ω, *поляризованная по кругу*, *несет момент количества движения*, *связанный с энергией волны соотношением* (37.2). *Если поляризация левая*, *то вектор* $\mathbf{L}_{изл}$ *направлен в сторону распространения волны*, *если правая*, *то эти направления противоположны*. Это и есть основной результат, полученный А.И. Садовским.

Случай эллиптической поляризации сводится к случаю круговой поляризации. Действительно, волну, поляризованную по эллипсу, можно разложить на две волны, поляризованные по кругу: одну — по правому, другую — по левому.

4. Момент количества движения излучения можно найти и более непосредственно, исходя из свойств *только самого излучения.* Последнее, как известно, обладает количеством движения, объемная плотность которого дается выражением $\mathbf{g}_{эл} = \mathbf{S}/\omega$, где $\mathbf{S}$ — вектор Пойнтинга (см. т. III, § 81). Если взять момент вектора $\mathbf{g}_{эл}$ и проинтегрировать по всему пространству, занятому излучением, то и получится момент количества движения излучения. Это делается в задаче в конце этого параграфа, где указанная процедура проводится применительно к излучению электрического диполя Герца, дипольный момент которого, не меняясь по величине, равномерно вращается в одной плоскости. При этом, конечно, речь идет о моменте количества движения всего излучения, испускаемого источником в различных направлениях. Но в качестве источника излучения можно снова взять бесконечную плоскость с распределенными на ней достаточно густо диполями Герца, как это делалось в п. 2. Таким путем можно получить уже плоскую волну с круговой поляризацией. Для нее можно ввести и понятие вектора плотности потока момента количества движения излучения $\mathbf{M}$. На основании формулы (37.2) этот вектор определяется формулой

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{S}}{\omega}. \tag{37.3}$$

5. При поглощении световой волны, поляризованной по кругу, на единицу площади тела будет действовать вращающий момент $\mathbf{M} = \mathbf{S}/\omega$, если только волна падает на поверхность тела нормально. Чтобы составить представление о величине эффекта, предположим, что плотность потока энергии в поляризованной по кругу плоской световой волне равна $S = 1$ Вт/см^2 $= 10^7$ эрг/(см$^2 \cdot$ с). (Это примерно в 7 раз больше плотности потока солнечного излучения вблизи Земли за пределами ее атмосферы.) Тогда для видимого излучения $\lambda = 500$ нм формула (37.3) дает

$$M = \frac{S}{\omega} = \frac{\lambda S}{2\pi c} = 2{,}7 \cdot 10^{-9}\ \text{дин/см},$$

а для волны $\lambda = 1$ см той же интенсивности

$$M = 5{,}3 \cdot 10^{-5}\ \text{дин/см}.$$

Если волна проходит через кристаллическую пластинку в полволны, вырезанную параллельно оптической оси, то она превращается из право- в левополяризованную и наоборот. В соответствии с этим величина M удваивается. При заданной мощности излучения эффект возрастает с увеличением длины волны. Но он все же очень мал и экспериментально был обнаружен только в 1935 г. американским физиком Бетом, и притом не только для радиоволн, но и для видимого света.

6. Перейдем теперь к рассмотрению эффекта Садовского с *квантовой точки зрения.* Одна из особенностей здесь состоит в том, что

испускание и последующее распространение света происходят не непрерывными порциями, а *неделимыми квантами — фотонами.* В соответствии с этим отпадает необходимость в искусственной концентрации излучения в определенном направлении, какая применялась при классическом рассмотрении. Многофотонные процессы, когда в одном акте излучения испускается не один, а несколько фотонов, как процессы маловероятные, рассматриваться не будут. Другая особенность заключается в том, что *у квантового вектора момента количества движения не могут одновременно иметь определенные значения все три проекции его на координатные оси.*

При переходе атома из одного стационарного состояния в другое испускается *один фотон* с энергией $\mathscr{E} = \hbar\omega$. Проекция момента количества движения атома на избранное направление (ось Z) при орбитальном движении электрона может принимать значения $m\hbar$. Пусть при излучении фотона эта проекция изменилась на $\hbar$. В таком случае в акте излучения атом потерял энергию $\hbar\omega$ и проекцию момента количества движения $\hbar$. В соответствии с законами сохранения энергия и момент количества движения, потерянные атомом, *перейдут к излучению.* Поэтому следует заключить, что проекция момента количества движения излученного фотона равна $\hbar$. Внутренний момент количества движения фотона, т. е. момент, не связанный с его орбитальным движением, называется *спином фотона.* Говорят, что спин фотона целочисленный и равен единице (т. е. на самом деле $\hbar$), хотя значение $\hbar$ относится *не к полному моменту*, а только *к его проекции на избранное направление.* Если проекция (в единицах $\hbar$) равна s, то, как для всякого квантового момента количества движения, квадрат вектора спина фотона определяется выражением $s(s+1)\hbar^2 = 2\hbar^2$. Отношение величин $\mathscr{E} = \hbar\omega$ и $L_z = \hbar$ дается формулой

$$\frac{\mathscr{E}}{L_z} = \frac{\hbar\omega}{\hbar} = \omega. \qquad (37.4)$$

Это соотношение по форме совпадает с классическим (37.2), хотя между ними и есть существенное различие. В классической формуле (37.2) L означает *полный момент* количества движения излучения, тогда как в квантовой формуле (37.4) $L_z = \hbar$ дает только *проекцию момента* на избранное направление.

7. Масса покоя фотона равна нулю. Поэтому не существует системы отсчета, относительно которой фотон находился бы в покое. Его внутренний момент количества движения, или спин, поэтому нельзя определять как момент частицы, находящейся в состоянии покоя. *Фотон может существовать только в движении и притом со скоростью света c в любой системе отсчета.*

Строгое решение вопроса о моменте количества движения фотона может быть дано только в *релятивистской квантовой теории.* Нерелятивистская теория фотона принципиально невозможна, поскольку скорость фотона всегда равна скорости света c. В нашем курсе излагать релятивистскую теорию не представляется возможным. Ограничимся

только замечанием, что, как и всякая квантовомеханическая величина, момент количества движения фотона определяется через соответствующий *оператор.* Оказывается, что оператор момента количества движения фотона состоит из двух слагаемых. Одно слагаемое имеет вид $[\widehat{\mathbf{r}}\widehat{\mathbf{p}}]$, где $\widehat{\mathbf{p}}$ — *оператор импульса фотона.* Оно называется *орбитальным.* Дополнительное слагаемое называется *спиновым* или *оператором спина фотона.* Собственное значение проекции оператора $[\widehat{\mathbf{r}}\widehat{\mathbf{p}}]$ на избранное направление называется *орбитальным моментом количества движения фотона.* Собственное значение проекции оператора спина на то же направление есть *спиновый момент количества движения или просто спин фотона.*

Будем предполагать, что орбитального момента у фотона нет, так что весь его момент является спиновым. Наглядным оправданием этого может служить замечание, что обычно длина волны, излучаемой атомом, очень велика по сравнению с размерами последнего. Фотон же не может быть локализован в области пространства, линейные размеры которой меньше длины световой волны λ. С другой стороны, размеры излучающего атома очень малы по сравнению с λ. Поэтому фотон излучается атомом практически всегда «центрально». Фотон при этом не получает никакого орбитального момента количества движения, он уносит *только спиновый момент.* Чтобы у фотона появился дополнительный орбитальный момент, излучение должно произойти с далекой периферии атома — с расстояний порядка λ. Волновая функция атома на таких расстояниях, а с ней и вероятность излучения фотона ничтожны.

8. То обстоятельство, что фотон существует только в состоянии движения со скоростью c, проявляется еще в том, что в любой системе отсчета для него есть *только одно избранное направление — направление движения.* На это направление и проецируется вектор спина фотона. А так как спин фотона $s = 1$, то казалось бы, что относительно этого направления спин может ориентироваться $2s + 1 = 3$ способами: в первом проекция спина направлена по движению, во втором против движения, в третьем равна нулю. В действительности третья возможность не осуществляется.

Не вдаваясь в подробности, заметим, что к этому заключению приводит опыт. Из поперечности электромагнитных волн следует, что для получения любой поляризации волны достаточно наложения только двух, а не трех волн с различными поляризациями. В согласии с принципом соответствия следует ожидать, что в квантовой теории для получения любого состояния фотона достаточно суперпозиции только двух независимых состояний его. Какие же состояния фотона могут быть приняты в качестве независимых? Для этого рассмотрим связь между поляризацией и спином фотона.

9. Понятие *поляризации* (как и всякое другое понятие) в фотонной теории лишено того ясного наглядного смысла, которым оно отличается в классической теории. Поскольку, однако, поляризация света существует и проявляется на опыте, необходимо установить, что

соответствует ей в фотонной теории. *Единственной направленной величиной, характеризующей внутренние свойства фотона, является спин.* С другой стороны, в классической теории момент количества движения **L** волны, поляризованной по кругу, направлен по или против распространения волны. *Поэтому естественно считать фотон поляризованным по кругу, если он находится в состоянии с определенным значением проекции спина на направление распространения.* Если спин направлен в сторону распространения света, то поляризация фотона называется *левой*; в противном случае ее называют *правой* [1]).

В классической оптике любая поляризация (линейная или эллиптическая) бегущей плоской волны может быть получена путем суперпозиции двух (когерентных) поляризованных по кругу плоских волн, распространяющихся в том же направлении, поляризация одной из которых правая, а другой левая. Так и состояние фотона с круговой поляризацией, распространяющегося в определенном направлении, следует рассматривать как его собственное состояние, которому соответствуют собственные значения проекции спина $s_z = +1, 0, -1$. Путем линейной суперпозиции таких состояний может быть получен фотон любой поляризации. Но состояние с $s_z = 0$ не осуществляется. Поэтому *состояние фотона с любой поляризацией, распространяющегося в определенном направлении, может быть получено линейной суперпозицией только двух состояний*: состояния с $s_z = +1$ и состояния с $s_z = -1$.

Суперпозиция таких состояний, конечно, *не будет классической.* Она понимается в том же смысле, как и суперпозиция квантовомеханических состояний частицы, характеризуемых волновыми функциями. А так как состояния фотона с $s_z = +1$ и с $s_z = -1$ являются собственными, то квадраты модулей коэффициентов при этих состояниях в суперпозиции определяют относительные вероятности самих состояний. Это проявляется, например, в том, что при измерении проекции s_z (скажем, по величине вращающего момента, сообщаемого телу при поглощении фотона) может с соответствующей вероятностью получиться либо $s_z = +1$, либо $s_z = -1$. Никакой промежуточный результат получиться не может.

ЗАДАЧА

Твердый диполь с электрическим моментом **p** равномерно вращается вокруг своего центра с постоянной угловой скоростью **ω**, причем вектор **p** все время расположен в одной плоскости. Согласно классической электродинамике он излучает, как диполь Герца. Излучение обладает количеством движения, объемная плотность которого определяется выражением

$$\mathbf{g}_{\text{эл}} = \frac{1}{4\pi c}\,[\mathbf{EH}] \qquad (37.5)$$

---

[1]) Такое определение правой и левой поляризаций соответствует тому, что принято в классической оптике. В квантовой электродинамике применяется противоположное соглашение: правой поляризации соответствует спин, направленный в сторону распространения фотона, левой — спин, направленный противоположно.

(см. т. III, § 84). Излучение уносит и момент количества движения. Для вычисления полного момента, уносимого излучением, достаточно знать $\mathbf{g}_{эл}$ на бесконечно удаленной сфере с центром в месте нахождения диполя. Откуда может взяться такой момент, если вдали от диполя (в волновой зоне) поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ связаны между собой, как в плоской волне, и оба перпендикулярны к радиусу-вектору $\mathbf{r}$, проведенному от диполя к точке наблюдения, так что вектор $\mathbf{g}_{эл}$ направлен вдоль $\mathbf{r}$, а потому момент $[\mathbf{r}\mathbf{g}_{эл}]$ равен нулю?

Решение. Утверждение, что в волновой зоне поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ убывают с расстоянием как $1/r$ — приближенное и выполняется только асимптотически при $r \to \infty$. Такое приближение достаточно для вычисления полной энергии или полного импульса, уносимых излучением, так как тогда вектор $[\mathbf{EH}]$ будет меняться как $1/r^2$. Высшие степени величины $1/r$ учитывать не надо, поскольку при интегрировании по сфере они ничего не внесут, если выполнить предельный переход $r \to \infty$. Но плотность момента количества движения $\mathbf{l}_{эл} = [\mathbf{r}\mathbf{g}_{эл}]$ получается из $\mathbf{g}_{эл}$ векторным умножением на $\mathbf{r}$. Величину $\mathbf{g}_{эл}$ на удаленной сфере, понятно, достаточно вычислить также с точностью до членов $1/r^2$ включительно, а для этого надо учесть в выражении для $\mathbf{g}_{эл}$ и члены третьей степени по $(1/r)$. Чтобы это сделать, достаточно пользоваться следующими формулами для поля излучения диполя Герца в волновой зоне в вакууме:

$$\begin{gathered}\mathbf{E} = \left[\frac{3(\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r})}{cr^4}\,\mathbf{r} - \frac{\dot{\mathbf{p}}}{cr^2}\right]_{t-r/c} - \left[\frac{(\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r})}{c^2r^3}\,\mathbf{r} - \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{c^2r}\right]_{t-r/c}, \\ \mathbf{H} = \frac{1}{cr^3}\,[\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r}]_{t-r/c} + \frac{1}{c^2r^2}\,[\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r}]_{t-r/c}\,.\end{gathered} \tag{37.6}$$

Они получаются из формул (141.10) тома III, если их написать для вакуума и в соответствии с этим положить $\mathbf{D} = \mathbf{E}$, $v = c$. При этом в первой формуле (141.10) отброшен первый член, пропорциональный $1/r^3$, так как на $\mathbf{g}_{эл}$ он может повлиять только в члене порядка $1/r^4$. Из формул (37.6) надо найти $[\mathbf{EH}]$ в нужном нам приближении, опуская при этом члены, коллинеарные с $\mathbf{r}$, поскольку они не играют роли при вычислении $[\mathbf{r}\mathbf{g}_{эл}]$. Таким путем, опуская значок $t - r/c$, получаем

$$\mathbf{g}_{эл} = \frac{1}{2\pi c^4r^4}\,(\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r})\ddot{\mathbf{p}} + (\ldots)\mathbf{r}, \tag{37.7}$$

$$\mathbf{l}_{эл} = \frac{1}{2\pi c^4r^4}\,(\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r})[\mathbf{r}\ddot{\mathbf{p}}]. \tag{37.8}$$

Преобразуем эту формулу, воспользовавшись тем, что вектор $\mathbf{p}$ не меняет своей длины, а изменяется только из-за вращения. В таком случае $\dot{\mathbf{p}} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{p}]$. То же относится и к $\dot{\mathbf{p}}$, т. е. $\ddot{\mathbf{p}} = [\boldsymbol{\omega}\dot{\mathbf{p}}]$. В результате формула (37.8) преобразуется:

$$\mathbf{l}_{эл} = \frac{1}{2\pi c^4r^4}\,(\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r})[\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\dot{\mathbf{p}}]] = \frac{1}{2\pi c^4r^4}\,(\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r})\{(\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\dot{\mathbf{p}}\}. \tag{37.9}$$

Чтобы найти полный момент излучения, испускаемого диполем в единицу времени, надо это выражение умножить на c и результат проинтегрировать по всей поверхности бесконечно удаленной сферы. Ясно, что из-за симметрии вращения вокруг $\boldsymbol{\omega}$ при таком интегрировании получится вектор, направленный вдоль $\boldsymbol{\omega}$. А так как вектор $\dot{\mathbf{p}} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{p}]$ перпендикулярен к $\boldsymbol{\omega}$, то последний

член в (37.9) можно опустить. Тогда

$$\mathbf{l}_{\text{эл}} = \frac{1}{2\pi c^4 r^4}(\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r})^2\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2\pi c^4 r^4}\dot{\mathbf{p}}^2\cos^2\varphi\cdot\boldsymbol{\omega}. \tag{37.10}$$

При интегрировании можно поступать так, как если бы вектор $\dot{\mathbf{p}}$ оставался неподвижным, и выбрать сферическую систему координат, указанную на рис. 67. В этом случае элемент поверхности сферы будет $dS = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$. В результате для момента импульса излучения получим

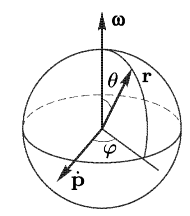


Рис. 67

$$\mathbf{L}_{\text{изл}} = \frac{\omega\dot{\mathbf{p}}^2}{2\pi c^3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\cos^2\varphi\,d\theta\,d\varphi = \frac{2}{3c^3}\dot{\mathbf{p}}^2\omega. \tag{37.11}$$

Энергия, излучаемая диполем в единицу времени, равна $\mathscr{E}_{\text{изл}} = (2/3c^3)\ddot{\mathbf{p}}^2$ (см. т. III, § 141). А так как $\ddot{\mathbf{p}}^2 = \omega^2\dot{\mathbf{p}}^2$, то получается

$$L_{\text{изл}} = \mathscr{E}_{\text{изл}}/\omega. \tag{37.12}$$

§ 38. Четыре квантовых числа электрона и тонкая структура спектральных термов

1. Наличие у электрона внутреннего момента количества движения (спина) означает, что для электрона (в отличие от точечной классической частицы) трех степеней свободы недостаточно для характеристики его состояния. Электрон в атоме обладает дополнительной — четвертой — степенью свободы, называемой *спиновой.* Заметим, что пока что мы имеем в виду водородоподобный атом, а также вообще многоэлектронный атом или ион с *одним* наружным (валентным или оптическим) электроном. Такой электрон сейчас и предполагается в нашем рассмотрении. В квантовой механике его состояние описывается четырьмя квантовыми числами: 1) *главным квантовым числом* n; 2) *орбитальным квантовым числом* l; 3) *орбитальным магнитным квантовым числом*, которое мы теперь будем обозначать через m_l, и 4) *спиновым квантовым числом* m_s.

Смысл первых трех квантовых чисел n, l, m_l уже был выяснен в § 33. Спиновое же число m_s определяет проекции вектора спина $\mathbf{s}$ на выделенное направление. Если атом уже находится в состоянии с определенным значением орбитального момента $\mathbf{l}$ (т. е. с определенными $\mathbf{l}^2$ и l_z), то выделенное направление (ось Z) при $\mathbf{l}^2 \neq 0$ определяется вектором $\mathbf{l}$. Спин $\mathbf{s}$ может быть ориентирован либо по $\mathbf{l}$, либо против $\mathbf{l}$. Это означает, что проекция вектора $\mathbf{s}$ на это выделенное направление может принимать только два значения: $+\hbar/2$ и $-\hbar/2$, или $m_s\hbar$, где $m_s = \pm 1/2$. При $\mathbf{l} = 0$ (т. е. когда атом находится в s-состоянии) весь момент количества движения атома чисто спиновый: $\mathbf{s}$. Если состояние атома таково, что одна из проекций s_x, s_y, s_z имеет определенное значение (равное $\pm\hbar/2$), то соответствующая ось и определяет выделенное направление в атоме.

2. Орбитальный момент количества движения $\mathbf{l}$ и спиновый момент $\mathbf{s}$ складываются в полный момент количества движения $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$ по правилам векторного сложения (см. § 32). Проекция полного момента на избранное направление может принимать значения $m_j\hbar$, где $m_j = m_l + m_s = m_l \pm 1/2$ называется *квантовым числом проекции полного момента*. Ясно, что операторы проекций полного момента на координатные оси удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям (31.6), что и операторы проекций орбитального момента. Отсюда следует, что определенные значения в одном и том же состоянии могут иметь квадрат полного момента $\mathbf{j}^2$ и одна из его проекций на координатные оси. Отсюда же следует, что

$$\mathbf{j}^2 = \hbar^2 j(j+1),$$

где j — максимальное значение, которое может принимать квантовое число m_j. Иногда j называют *внутренним квантовым числом.*

Поскольку j есть максимальное значение числа m_j, а l — максимальное значение числа m_l, то из соотношения $m_j = m_l \pm 1/2$ следует

$$j = l \pm 1/2. \tag{38.1}$$

Знак «плюс» соответствует случаю, когда спин электрона ориентирован в направлении орбитального момента, а «минус» — когда он ориентирован противоположно. В обоих случаях число j полуцелое, поскольку l всегда целое.

При заданном j возможно $2j + 1$ квантовых состояний, отличающихся одно от другого значениями квантового числа m_j:

$$m_j = -j,\ -(j-1),\ \ldots,\ +(j-1),\ +j. \tag{38.2}$$

Число этих состояний у атомов с одним валентным электроном всегда четное, поскольку j полуцелое.

3. Вместо квантовых чисел n, l, m_l, m_s для характеристики состояния одноэлектронного атома можно применять и другие четверки квантовых чисел, например n, l, j, m_s. В спектроскопии принято пользоваться числами $n, l, j, 2s+1$ и заменять число l соответствующей буквой латинского алфавита в соответствии с таблицей, приведенной ранее в § 34 (п. 2). Сначала пишут числовое значение главного квантового числа n, за ним букву, заменяющую число l, число j пишут справа от этой буквы в виде нижнего индекса, а в качестве верхнего индекса слева от той же буквы пишут число $2s + 1$, называемое *мультиплетностью уровня.* Оно показывает, сколькими способами спин может ориентироваться относительно направления орбитального момента $\mathbf{l}$. В случае атома с одним валентным электроном значок $2s+1$ по существу излишен, так как для электрона $s = 1/2$, а потому всегда $2s+1 = 2$. Но если бы спин частицы имел другое значение, то указание мультиплетности $2s + 1$ приобрело бы существенное значение. То же самое можно сказать относительно аналогичного числа в случае атома с несколькими валентными электронами (см. п. 10).

Рассмотрим, например, состояние

$$3^2 s_{1/2}$$

(называемое «три, дублет $s_{1/2}$». Смысл этого названия раскрывается в п. 4). В этом состоянии $n = 3$, $l = 0$, $j = 1/2$. Полный момент количества движения — чисто спиновый. В формуле $j = l \pm 1/2$ знак минус надо исключить, поскольку $j > 0$, так что в рассматриваемом случае $j = l + 1/2$. Состояние чисто формально называется дублетом, так как при $l = 0$ все направления для ориентации спина равноправны. По существу это есть синглет. Это, разумеется, относится ко всем s-состояниям (т. е. состояниям с $l = 0$).

В качестве второго примера возьмем состояние «четыре, дублет $d_{3/2}$», т. е.

$$4^2 d_{3/2}.$$

В этом состоянии $n = 4, l = 2, j = 3/2$, причем $j = l-1/2$, т. е. спиновый момент ориентирован против направления орбитального момента. Но в состоянии $4^2 d_{5/2}$ $j = l+1/2$, т. е. ориентации спина и орбитального момента одинаковы. Таким образом, состояние d действительно является дублетом. То же справедливо для всех остальных состояний: $p, f, g, \ldots$ (за исключением только состояния s).

4. Основное взаимодействие между электроном атома и ядром есть *электростатическое взаимодействие* их зарядов. Но так как электрон движется относительно атомного ядра, то возникает дополнительное взаимодействие, обусловленное спином электрона и зарядом ядра. Его называют *спин-орбитальным взаимодействием.* В существовании спин-орбитального взаимодействия можно убедиться наглядно, воспользовавшись представлениями полуклассической теории Бора. Простейшей является модель атома водорода, в которой электрон вращается по круговой орбите. Перейдем в ней к системе отсчета, в которой электрон покоится, т. е. сама система движется вместе с электроном. В такой системе отсчета ядро движется и создает магнитное поле $\mathbf{H}$, воздействующее на спиновый магнитный момент $\mathfrak{m}_s$ покоящегося в этой системе электрона. Поскольку заряды протона и электрона численно равны и противоположны по знаку, движущееся ядро в движущейся системе отсчета создает в месте нахождения электрона такое же магнитное поле, как и вращающийся электрон в покоящейся системе отсчета в месте нахождения ядра. Поэтому спин-орбитальное взаимодействие можно формально рассматривать как взаимодействие между спиновым и орбитальным магнитными моментами электрона.

Спиновый магнитный момент электрона $\mathfrak{m}_s$ может ориентироваться либо вдоль орбитального магнитного поля, либо противоположно. В первом случае потенциальная энергия взаимодействия электрона и ядра атома уменьшается, во втором увеличивается. Поэтому из-за спин-орбитального взаимодействия каждый энергетический уровень

атома расщепляется на два подуровня. Исключением является случай, когда атом находится в s-состоянии, поскольку в этом состоянии у атома нет орбитального магнитного момента, так что спин-орбитальное взаимодействие пропадает. Расщепление энергетического уровня в результате спин-орбитального взаимодействия называется *тонкой структурой уровня.* Совокупность подуровней, на которые расщепился рассматриваемый уровень, называется *мультиплетом.* В зависимости от числа подуровней, из которых состоит мультиплет, различают *дублеты*, *триплеты*, *квартеты*, *квинтеты*,... Простые уровни, не расщепляющиеся на подуровни, называются *синглетами.* Такие же термины употребляются и для совокупностей спектральных линий, получающихся путем расщепления из одной линии (см. § 40).

Таким образом, в случае атомов или ионов с одним валентным электроном спин-орбитальное взаимодействие приводит к тому, что все энергетические уровни, за исключением s-уровней, становятся дублетами, s-уровень остается синглетным. Теперь понятен смысл названий, которые употреблялись выше в п. 3. Например, уровень $4^2d_{3/2}$ был назван «четыре, дублет $d_{3/2}$». Употребление термина «дублет» для синглетных уровней s, как уже подчеркивалось, чисто условное. Оно применяется для того, чтобы не выделять эти уровни среди действительно дублетных уровней p, d, f, ... Впрочем, синглетные уровни s формально можно рассматривать как дублеты, состоящие из двух слившихся подуровней. Понятен также физический смысл мультиплетности $2s+1$: она определяет число подуровней в мультиплете, возникающем из-за спин-орбитального взаимодействия.

5. Легко оценить по порядку величины дополнительную потенциальную энергию, возникающую из-за спин-орбитального взаимодействия. Возьмем для этого атом водорода в основном состоянии и воспользуемся тем механизмом возникновения спин-орбитального взаимодействия, который был описан в п. 4. Перейдем снова к системе отсчета, движущейся вместе с электроном. Магнитное поле в месте нахождения электрона, создаваемое в этой системе протоном, движущимся со скоростью $\mathbf{v}$, определяется формулой $\mathbf{H} = e[\mathbf{vr}]/cr^3$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор электрона относительно протона. По абсолютной величине $H = \alpha e/r^2$, где $\alpha = v/c$. Согласно (13.19) последняя величина есть *постоянная тонкой структуры*, определяемая формулой (13.18), т. е. $\alpha = e^2/\hbar c$. В магнитном поле $\mathbf{H}$ электрон обладает потенциальной энергией $-(\mathfrak{m}_s\mathbf{H})$, причем вектор $\mathfrak{m}_s$ может быть направлен либо по $\mathbf{H}$, либо против. По абсолютной величине эта энергия равна $\mathfrak{m}_s H = \mathfrak{m}_{\text{Б}} H$, где $\mathfrak{m}_{\text{Б}} = e\hbar/(2\mu_e c)$ — магнетон Бора. Сравним ее с полной энергией атома водорода в основном состоянии. Согласно формуле (13.20) она дается выражением $\mathscr{E}_1 = -\alpha^2\mu_e c^2/2$. В качестве r следует взять боровский радиус, определяемый формулой (13.16), т. е. $r_{\text{Б}} = \hbar^2/\mu_e e^2$. В результате получим

$$\frac{\mathfrak{m}_{\text{Б}} H}{\mathscr{E}_1} = \alpha^2 = 5{,}325 \cdot 10^{-5}. \qquad (38.3)$$

6. Поскольку $\alpha = v/c$ (где v — скорость электрона на первой боровской орбите), *спин-орбитальное взаимодействие есть эффект, квадратичный относительно параметра* α. Поэтому его теория должна быть *релятивистской.* Этого и следовало ожидать, так как сам *спин есть квантово-релятивистский эффект, исчезающий в нерелятивистском приближении. Зависимость массы от скорости также приводит к тонкому расщеплению энергетических уровней* уже в рамках полуклассической теории Бора, как это впервые показал Зоммерфельд. Дело в том, что в боровской нерелятивистской теории всем эллиптическим орбитам электрона (включая и круговую) с одной и той же большой осью соответствует *одна и та же энергия.* Учет зависимости массы от скорости *снимает такое вырождение* — величина энергии начинает зависеть и от эксцентриситета эллипса. Это и приводит к тонкому расщеплению энергетического уровня. Таким образом, уточняя приведенное выше определение тонкой структуры, следует сказать, что *она вызывается не только спин-орбитальным взаимодействием, но и зависимостью массы электрона от скорости.* Оба расщепления — второго порядка по параметру α, а потому должны рассматриваться одновременно.

Наиболее последовательно тонкая структура может быть рассчитана и исследована на основе *релятивистской квантовой теории Дирака,* в которой автоматически учитывается и спин электрона, и зависимость массы от скорости.

В случае водородоподобного атома решение волнового релятивистского уравнения Дирака приводит к следующей формуле для энергии в стационарном состоянии:

$$\mathscr{E} = -\frac{(Ze^2)^2\mu_e}{2\hbar^2 n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n}\left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n}\right)\right]. \tag{38.4}$$

В квадратных скобках опущены члены четвертой и высших степеней по α. Благодаря малости постоянной α^2 поправка к нерелятивистской формуле (13.8) получается очень малой, так что рассматриваемое расщепление уровней оправдывает название «тонкой структуры».

Заметим, что энергии уровней в водородоподобных атомах по теории Дирака вырождены по l, т. е. они зависят (и притом в любом приближении) только от главного квантового числа n и квантового числа полного момента j, но не зависят от орбитального числа l (об отступлениях от этого результата говорится в § 44). Иначе говоря, в водороде и водородоподобных атомах уровни с одинаковыми квантовыми числами n и j, но различными l совпадают. Такое совпадение имеет место только у водорода и водородоподобных атомов. Для остальных одноэлектронных атомов, например атомов щелочных металлов, совпадения нет.

7. Величина тонкого расщепления энергетических уровней для легких атомов не превышает 10^{-5} эВ и сильно возрастает с увеличением заряда ядра. Для тяжелых атомов она может достигать десятых долей

эВ, так что в этих случаях нет смысла называть расщепление «тонким». (Напомним, что энергия ионизации атома водорода из основного состояния составляет 13,6 эВ.)

Для полноты заметим, что, помимо тонкой структуры, в спектре водорода и многих других атомов наблюдается еще так называемая *сверхтонкая структура.* Она возникает из-за взаимодействия магнитных моментов электронов со слабыми магнитными полями атомных ядер. Формула, аналогичная (38.4), к сверхтонкому расщеплению неприменима. Сверхтонкая структура будет рассмотрена ниже.

8. Чтобы не возвращаться к вопросу о квантовых числах и не излагать дважды правил отбора при излучении света, рассматриваемых в следующем параграфе, остановимся кратко на *сложных*, т. е. *многоэлектронных*, *атомах.* Подробный разбор затрагиваемых здесь вопросов относится к специальным курсам спектроскопии. В общем курсе физики об этих вопросах можно дать лишь общее предварительное представление, совсем не претендуя при этом на полноту и достаточную убедительность изложения.

В случае многоэлектронных атомов каждый (i-й) электрон электронной оболочки атома можно было бы характеризовать орбитальным $\mathbf{l}_i$ и спиновым $\mathbf{s}_i$ векторами момента количества движения. Однако опыт показывает, что при рассмотрении наиболее важных вопросов можно обойтись значительно менее подробной характеристикой, объединяя (связывая) определенным образом по правилу векторного сложения орбитальные и спиновые моменты отдельных электронов. Если бы нас интересовал только полный момент количества движения атома $\mathbf{J}$, то порядок сложения векторов $\mathbf{l}_i$ и $\mathbf{s}_i$ не имел бы значения, так как окончательный результат не зависит от порядка расположения слагаемых. В действительности наряду с $\mathbf{J}$ существенны также другие моменты и соответствующие им квантовые числа. Такие моменты получаются из $\mathbf{l}_i$ и $\mathbf{s}_i$ путем выделения соответствующих групп слагаемых. Какие группы надо выделить и произвести в них сложение $\mathbf{l}_i$ и $\mathbf{s}_i$ — это зависит от относительной величины различных взаимодействий между электронами атома. Наиболее важной и распространенной является так называемая *нормальная связь*, или *связь Рассела–Саундерса*, предложенная этими американскими астрофизиками в 1925 г. Она осуществляется, когда электростатическое взаимодействие электронов — их отталкивание по закону Кулона — велико по сравнению со спин-орбитальным взаимодействием, т. е. взаимодействием между орбитальными и спиновыми магнитными моментами электронов. Это, как правило, имеет место в легких и не слишком тяжелых атомах.

9. Нормальная связь заключается в том, что орбитальные и спиновые моменты электронов электронной оболочки в отдельности складываются по правилам векторного сложения в *общие орбитальный и спиновый моменты атома*, обозначаемые соответствующими прописными (большими) буквами $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3 + \ldots, \\ \mathbf{S} &= \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 + \ldots \end{aligned} \tag{38.5}$$

Состояние электронной оболочки атома и характеризуется суммарными моментами **L** и **S**, а также полным моментом количества движения атома, который, конечно, зависит от угла между векторами **L** и **S**. Его можно получить по формуле

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}. \tag{38.6}$$

Векторам **J**, **L**, **S** соответствуют квантовые числа J, L, S, определяющие квадраты длин этих векторов по формулам (в единицах $\hbar$)

$$\mathbf{J}^2 = J(J+1), \quad \mathbf{L}^2 = L(L+1), \quad \mathbf{S}^2 = S(S+1). \tag{38.7}$$

Ясно, что при четном числе электронов в атоме квантовые числа S и J целые, а при нечетном — полуцелые. Квантовое число L всегда целое. Как всегда, квантовые числа J, L, S имеют смысл наибольших значений, которые могут принимать проекции векторов **J**, **L**, **S** на избранное направление. Соответствующие проекции, следовательно, могут принимать значения (в единицах $\hbar$):

$$\begin{aligned} m_J &= -J,\ -(J-1),\ \ldots,\ +(J-1),\ +J, \\ m_L &= -L,\ -(L-1),\ \ldots,\ +(L-1),\ +L, \\ m_S &= -S,\ -(S-1),\ \ldots,\ +(S-1),\ +S. \end{aligned} \tag{38.8}$$

В частности, при заданных L и S квантовое число J может принимать следующие значения:

$$J = |L+S|,\ |L+S-1|,\ \ldots,\ |L-S|. \tag{38.9}$$

Конечно, при определении векторов **L**, **S**, **J** достаточно ограничиться только наружными, валентными электронами, если внутренние оболочки атома *полностью заполнены электронами*, так как в этом случае моменты количества движения внутренних электронов, как орбитальные, так и спиновые, полностью *скомпенсированы*, т. е. полные моменты внутренних оболочек равны нулю.

Электроны в атоме подвергаются действию электрического поля ядра, обладающего центральной симметрией. Благодаря этому вектор полного момента **J** точно сохраняется. Но векторы **L** и **S** в отдельности не сохраняются, а изменяются из-за спин-орбитального взаимодействия. При этом, однако, длины векторов **L** и **S**, а значит, и квантовые числа L и S остаются практически неизменными. Практически сохраняются также проекции векторов **L** и **S** на направление вектора **J**. Благодаря этому картину временного изменения **L** и **S** можно наглядно представить как прецессию (вращение) этих векторов вокруг неизменного направления вектора **J**, и притом с общей угловой скоростью. Аналогом этого может служить свободная прецессия оси фигуры и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ симметричного гироскопа вокруг неизменного направления вектора момента количества движения (см. т. I, § 49). Различие состоит в том, что в случае гироскопа направления оси фигуры и вектора $\boldsymbol{\omega}$ могут меняться непрерывно, тогда как в случае атома они квантуются. Это происходит из-за того, что проекции векторов **L** и **S** на направление

вектора **J** могут принимать только квантованные значения $m_L\hbar$ и $m_S\hbar$, где m_L и m_S — соответствующие квантовые числа, которые могут принимать значения в соответствии с формулами (38.8).

10. В спектроскопии состояние наружных (валентных) электронов атома суммарно характеризуют квантовым числом L, причем вместо числового значения L применяют соответствующую букву латинского алфавита. Именно, поступают так же, как в случае одного электрона (см. § 34, п. 2). Только вместо строчных букв применяют такие же, но *прописные* (большие) буквы латинского алфавита. Иначе говоря, пользуются следующей схемой:

Квантовое число L	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Обозначение состояния	S	P	D	F	G	H	I	K	L

и далее по алфавиту с пропусками букв P и S.

В качестве нижнего индекса справа от соответствующей буквы ставят квантовое число полного момента J, а в качестве верхнего индекса слева — число $2S + 1$, называемое *мультиплетностью уровня.* По этому числу можно вычислить не только спин S, но и число уровней, на которые расщепляется рассматриваемый уровень из-за спин-орбитального взаимодействия. Впрочем, число $2S+1$ дает число компонент в расщепившемся уровне только в случае, когда $S \leqslant L$. В противоположном случае, когда $S \geqslant L$, число компонент в расщепившемся уровне определяется числом возможных проекций вектора **L** на более длинный вектор **S**, т. е. оно равно $2L + 1$. Правда, и в этом случае, хотя и чисто формально, число $2S + 1$ называют мультиплетностью уровня.

Например, когда наружная оболочка атома состоит из двух электронов, то возможны два случая: 1) спины электронов направлены противоположно, а потому $S = 0$; 2) спины электронов параллельны, тогда $S = 1$.

В первом случае $J = L, 2S + 1 = 1$, т. е. все уровни *синглетны.* Соответственно различным значениям L получаются следующие уровни:

$L = J$	0	1	2	3	4	5	6
Уровни	${}^1S_0$	${}^1P_1$	${}^1D_2$	${}^1F_3$	${}^1G_4$	${}^1H_5$	${}^1I_6$

Во втором случае $2S + 1 = 3$, т. е. все уровни *триплетны*, за исключением, конечно, уровней s, которые всегда *синглетны.* Здесь возможны три случая: $J = L - 1$, $J = L$, $J = L + 1$. В соответствии с этим получается следующая схема:

L	0		1			2			3			4		
J	0	1	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5
Уровни	${}^3S_0$	${}^3S_1$	${}^3P_0$	${}^3P_1$	${}^3P_2$	${}^3D_1$	${}^3D_2$	${}^3D_3$	${}^3F_2$	${}^3F_3$	${}^3F_4$	${}^3G_3$	${}^3G_4$	${}^3G_5$

Читателю рекомендуется разобрать аналогичный вопрос, когда наружная оболочка атома содержит три электрона.

Конечно, квантовыми числами J, L, S состояние электронной оболочки атома характеризуется еще не полностью. Для большей полноты в спектроскопии часто указываются *электронные конфигурации* наружной оболочки атома, т. е. числа электронов в ней, находящихся в состояниях s, p, d, ...

11. В заключение еще раз подчеркнем, что *нормальная связь не является единственно возможной.* Это — *только один из крайних случаев связи.* Другим крайним случаем является так называемая (j, j)-связь, осуществляющаяся, когда магнитное спин-орбитальное взаимодействие велико по сравнению с электростатическим взаимодействием различных электронов между собой. В (j, j)-связи орбитальный и спиновый моменты каждого электрона складываются в один полный момент $\mathbf{j}_i = \mathbf{l}_i + \mathbf{s}_i$. Этими моментами и соответствующими им квантовыми числами и характеризуется состояние электронной оболочки атома. Понятно, что полный момент всего атома $\mathbf{J}$ не зависит от расположения слагаемых $\mathbf{l}_i$ и $\mathbf{s}_i$ и может быть получен векторным сложением по формуле

$$\mathbf{J} = \sum \mathbf{j}_i. \tag{38.10}$$

Резко выраженная связь (j, j) встречается в тяжелых атомах, но достаточно редко. Осуществляются различные более сложные промежуточные виды связи. В настоящем курсе применяется исключительно наиболее важная и часто встречающаяся нормальная связь.

§ 39. Правила отбора при излучении и поглощении света

1. Если атом находится в возбужденном стационарном состоянии, то он может перейти в энергетически более низкое состояние с излучением фотона. Наоборот, атом может поглотить фотон и в результате этого перейти на более высокий энергетический уровень. Однако не все переходы такого рода могут осуществляться в действительности. *Разрешенные переходы*, сопровождающиеся излучением или поглощением фотона, подчиняются так называемым *правилам отбора*, *неразрешенные* или *запрещенные* — *правилам запрета.* Такие правила были установлены в спектроскопии чисто эмпирически и производили впечатление какой-то таинственности. Правда, некоторые из них нашли истолкование уже в боровской теории атома на основе принципа соответствия. С развитием квантовой механики покров таинственности с правил отбора был снят. Выяснилось, что каждое из правил отбора выражает какой-то *закон сохранения* — точный или приближенный.

2. Наиболее важные правила отбора при излучении или поглощении света являются следствиями *закона сохранения момента количества движения.* Будем рассматривать только *однофотонные процессы* и исключим из рассмотрения крайне маловероятные случаи, когда при излучении испускаются два фотона или больше. Закон сохранения момента количества движения при излучении атомом одного фотона

можно записать в виде

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}' + \mathbf{s}_{\text{ф}}, \tag{39.1}$$

где $\mathbf{J}$ — момент количества движения атома до излучения фотона (в единицах $\hbar$), $\mathbf{J}'$ — после излучения, а $\mathbf{s}_{\text{ф}}$ — вектор спина фотона. В дальнейшем индекс «ф» для краткости будем опускать. Закон (39.1) записан в символической форме, поскольку в одном и том же состоянии все три компоненты квантовомеханического вектора $\mathbf{J}$ не могут иметь определенные значения. Однако это не вносит никаких неопределенностей в дальнейшие рассуждения, поскольку в них речь идет не о самих векторах $\mathbf{J}$, $\mathbf{J}'$, $\mathbf{s}$, а о соответствующих им квантовых числах J, J', s. Разумеется, квантовые числа в обеих частях равенства (39.1) должны быть одинаковы. Это и используется в дальнейшем, причем квантовые числа правой части (39.1) получаются по правилу векторного сложения (см. § 32).

Впрочем, есть частный случай, когда и в квантовой механике вектор $\mathbf{J}$ определен однозначно. Это — случай, когда квантовое число полного момента $J = 0$. Тогда $\mathbf{J}^2 = J(J+1) = 0$, т. е. сам вектор $\mathbf{J}$, а с ним и все его проекции имеют определенные значения. В этом отношении вектор $\mathbf{J}$ ведет себя так же, как и в классическом случае. Поэтому переходы из квантового состояния с $J = 0$ в другое состояние также с $J = 0$ (так называемые 0–0-переходы) *абсолютно запрещены*. В противном случае из-за наличия спина у фотона момент количества движения атома, по крайней мере в одном из этих состояний, был бы отличен от нуля, а этого по предположению не должно быть.

3. Строгий квантовомеханический вывод правил отбора потребовал бы введения понятий и математических методов, выходящих за пределы нашего курса. Поэтому мы поступим не вполне последовательно и применим модельный *метод векторных диаграмм*, условный смысл которых уже отмечался ранее в § 32 (п. 5). Такой прием не является настоящим выводом — его скорее следует рассматривать как способ запоминания и осмысливания правил отбора. Оправданием метода может служить только то, что он приводит к правильным результатам. В рассматриваемом методе символы $\mathbf{J}$ и $\mathbf{s}$ рассматриваются как обычные *классические векторы*. Только длины этих векторов считаются равными не J и s, а $\sqrt{J(J+1)}$ и $\sqrt{s(s+1)}$. (Впрочем, если принять $|\mathbf{J}| = J$ и $|\mathbf{s}| = s$, то получатся те же правила отбора.) Рисунок 68 *а* выражает закон сохранения момента импульса при излучении фотона в рассматриваемой векторной модели: $\mathbf{J} = \mathbf{J}' + s$.

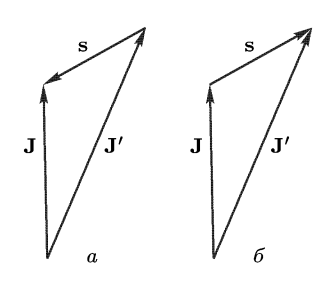


Рис. 68

Рассмотрим сначала случай излучения фотона, когда ни один из векторов $\mathbf{J}$ и $\mathbf{J}'$ не обращается в нуль, причем $|\mathbf{J}'| \geqslant |\mathbf{J}|$. Всякая сторона треугольника короче суммы длин остальных двух сторон. Возьмем из двух сторон $\mathbf{J}$ и $\mathbf{J}'$ более длинную, т. е. воспользуемся неравенством

$|\mathbf{J}'| \leqslant |\mathbf{J}| + |\mathbf{s}|$ или

$$\sqrt{J'(J'+1)} \leqslant \sqrt{J(J+1)} + \sqrt{s(s+1)}. \tag{39.2}$$

Так как для фотона $s = 1$, то последнее слагаемое равно $\sqrt{2}$. Квантовые числа J и J' целые, когда число электронов в атоме четное, и полуцелые, когда оно нечетное. Приращение $\Delta J \equiv J' - J$ может поэтому равняться только положительному целому числу или нулю, так как при излучении фотона число электронов в атоме не меняется. Заменяя в неравенстве (39.2) J' на $J + \Delta J$ и возводя его в квадрат, получим

$$\Delta J^2 + (2J+1)\Delta J - 2 \leqslant 2\sqrt{2J(J+1)}. \tag{39.3}$$

При фиксированном J и при $\Delta J \geqslant 0$ левая часть этого неравенства возрастает с возрастанием ΔJ, так как ее производная по ΔJ существенно положительна. При $\Delta J = 0$ неравенство (39.3) выполняется. Неравенство (39.3) выполняется и при $\Delta J = 1$, так как в этом случае оно переходит в очевидное неравенство $J \leqslant \sqrt{2J(J+1)}$. Но уже при $\Delta J = 2$ неравенство (39.3) не выполняется. В этом случае оно переходит в $2(J+1) \leqslant \sqrt{2J(J+1)}$, а такое неравенство неверно, в чем легко убедиться, возводя его в квадрат. Неравенство (39.3) тем более не выполняется при больших значениях ΔJ.

Случай $J' \leqslant J$ сводится к предыдущему заменой J на J' и наоборот.

Таким образом, когда ни одно из квантовых чисел J и J' не равно нулю, получается правило отбора при излучении фотона

$$\Delta J \equiv J' - J = \pm 1 \quad \text{или} \quad 0. \tag{39.4}$$

Когда одно из квантовых чисел J или J' обращается в нуль, треугольник на рис. 68 вырождается в два равных отрезка прямых, направленных одинаково или противоположно. Тогда в (39.4) случай $\Delta J = 0$ исключается. Возможны только переходы с $\Delta J = \pm 1$.

Случай, когда оба числа J и J' равны нулю, невозможен, на что было указано уже выше.

Правила отбора при *поглощении* фотона получаются так же, как и при излучении. В этом случае $\mathbf{J} + \mathbf{s} = \mathbf{J}'$, а вместо рис. 68 *а* надо пользоваться рис. 68 *б*.

Сформулируем теперь правила отбора, которым должны удовлетворять квантовые числа m_J и m'_J проекций полного момента импульса атома до и после излучения или поглощения фотона. При этом нет необходимости переходить к векторной модели, а можно написать сразу

$$\Delta m_J \equiv m'_J - m_J = \pm 1 \quad \text{или} \quad 0. \tag{39.5}$$

Эти правила, конечно, должны выполняться при одновременном выполнении предыдущих правил отбора. В частном случае, когда проекции m_J и m'_J максимальны, они совпадают с J и J', а правила (39.5) переходят в (39.4). Однако возможны и такие случаи, когда по крайней мере одна из этих проекций меньше соответствующего квантового числа J.

4. В связи с изложенным отметим следующее. В § 37 указывалось, что спин фотона может ориентироваться вдоль направления его распространения только двумя способами. Это означает, что любое состояние поляризации фотона может быть осуществлено путем линейной комбинации двух состояний, в одном из которых поляризация правая, а в другом левая. Между тем при спине s число состояний с различными проекциями вектора $\mathbf{s}$ на избранное направление должно было бы равняться $2s + 1$. Поэтому казалось бы, что спин фотона должен быть $1/2$. Но в таком случае при излучении и поглощении фотона квантовое число J полного момента количества движения атомной оболочки должно было бы меняться на $\pm 1/2$, т. е. из целого переходить в полуцелое и наоборот. Это находится в противоречии с уже отмеченным фактом, что при излучении и поглощении фотона число электронов в атоме не меняется, а *квантовое число J всегда целое при четном числе электронов и полуцелое — при нечетном.* В п. 8 § 37 уже указывалось, что из трех возможных проекций спина при $s = 1$ в случае фотона одна не осуществляется из-за поперечности электромагнитных волн.

5. Выведенные правила отбора для однофотонных процессов основаны на строгом законе сохранения момента количества движения. Посмотрим теперь, какие правила отбора связаны с поведением векторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$. Излучение электромагнитных волн обусловлено *электромагнитными свойствами электрона*, т. е. его зарядом и магнитным моментом. Излучение фотона возникает либо в результате изменения движения заряда (изменение вектора $\mathbf{L}$), либо в результате поворота спинового магнитного момента, либо в результате обоих этих процессов сразу. Излучение, вызванное поворотом спина, конечно, — существенно релятивистский эффект. Теория показывает, что при излучении света в оптическом диапазоне взаимодействие фотона с зарядом электрона на несколько порядков сильнее взаимодействия его с магнитным моментом. Это позволяет считать, что излучение фотона в рассматриваемом диапазоне не связано с изменением $\mathbf{S}$, т. е.

$$\Delta \mathbf{S} = 0. \tag{39.6}$$

Иными словами, излучение и поглощение света не слишком коротких волн происходит так, как если бы спина вообще не было, а весь магнитный момент атома был только орбитальным. Поэтому можно воспользоваться полученными выше результатами, заменив полный момент $\mathbf{J}$ на орбитальный момент $\mathbf{L}$. Таким образом, при однофотонных процессах излучения и поглощения не слишком коротких волн должны приближенно выполняться следующие правила отбора:

$$\Delta L \equiv L' - L = \pm 1 \quad \text{или} \quad 0, \tag{39.7}$$

причем когда одно из чисел L и L' обращается в нуль, значение $\Delta L = 0$ исключается. Значение $\Delta L = 0$ невозможно также для атомов с *одним валентным электроном*, например для атомов водорода и щелочных металлов. Однако этот запрет связан не с законом сохранения момента количества движения, а с *законом сохранения четности волновой*

функции. На этом вопросе мы остановимся ниже. Здесь же отметим только, что правило отбора $\Delta L = \pm 1$ уже было использовано нами в § 34 для объяснения спектральных серий щелочных металлов.

6. Когда $\Delta J = \pm 1$, то излучается фотон с *круговой поляризацией.* Когда же $\Delta J = 0$, то поляризация получается *линейной.* Казалось бы, что это не согласуется с тем фактом, что спин фотона равен 1. Квантовая механика находит оригинальный выход из этого затруднения. Она утверждает, что в рассматриваемом случае излучается фотон в состоянии с *неопределенным спином.* Однако это состояние является суперпозицией двух состояний с круговой поляризацией — правой и левой, представленных с равной вероятностью. При измерении момента импульса, который передает фотон телу при поглощении, с одинаковой вероятностью может получиться только либо $+1$, либо -1.

Наконец, особо подчеркнем, что все полученные здесь правила отбора связаны со свойствами фотона и относятся к квантовым переходам с излучением или поглощением только одного фотона. На многофотонные процессы излучения и поглощения они не распространяются. Они не распространяются и на такие квантовые переходы, которые осуществляются не с помощью электромагнитного излучения, а, например, вызываются электронными ударами в газовых разрядах, возникают при тепловом возбуждении атомов и пр.

Возможны и излучательные переходы с нарушением правил отбора, приведенных выше. Они называются *запрещенными переходами.* Их вероятность много меньше вероятности разрешенных переходов. Интенсивность *запрещенных спектральных линий*, как правило, много меньше интенсивности разрешенных.

§ 40. Тонкая структура спектральных линий водорода и щелочных металлов

1. В § 38 было показано, что из-за спин-орбитального взаимодействия и зависимости массы электрона от скорости спектральные термы расщепляются. Это расщепление называется *тонкой структурой* спектральных термов или энергетических уровней. В настоящем параграфе рассматриваются только атомы с *одним* валентным электроном. В соответствии с этим термы обозначаются строчными (малыми) буквами латинского алфавита. Энергия уровня зависит от квантовых чисел n, l, j, но в отсутствие магнитного и электрического полей не может зависеть от магнитного квантового числа m_j, так как в этом случае все направления в пространстве совершенно эквивалентны. Только в случае водорода и водородоподобных атомов имеет место *случайное вырождение* по l из-за того, что электрическое поле ядра, в котором движется единственный электрон атома, — *кулоновское.* В этом случае энергия уровня зависит только от квантовых чисел n и j, но не зависит от l. Она определяется формулой (38.4).

От *тонкой структуры термов* следует отличать *тонкую структуру спектральных линий*, т. е. расщепление спектральной линии на

несколько близко расположенных компонент. Это расщепление определяется разрешенными переходами между различными подуровнями расщепившихся энергетических уровней, т. е. правилами отбора (39.4) и (39.7). Для одноэлектронных атомов в отсутствие внешних полей они сводятся к следующим двум:

$$\Delta l = \pm 1, \tag{40.1}$$

$$\Delta j = \pm 1 \text{ или } 0. \tag{40.2}$$

2. В качестве примера рассмотрим тонкую структуру линии L_α серии Лаймана водорода:

$$\overline{\nu} = 1s - 2p,$$

где $\overline{\nu} = 1/\lambda$ обозначает спектроскопическое волновое число (см. § 11). Терм $1s$ синглетный, терм $2p$ — дублет и состоит из двух подтермов $2p_{1/2}$ и $2p_{3/2}$ (рис. 69). Правила отбора (40.1) и (40.2) допускают переход с обоих уровней $2p_{1/2}$ и $2p_{3/2}$ на уровень $1s_{1/2}$. Поэтому линия L_α должна быть дублетом, т. е. состоять из двух спектральных линий. Линия $1s_{1/2}$–$2p_{3/2}$ более интенсивна, чем линия $1s_{1/2}$–$2p_{1/2}$, и изображена на рис. 69 вместе с соответствующим переходом $2p_{3/2} \to 1s_{1/2}$ более жирно. Расстояние между обеими линиями, как нетрудно подсчитать с помощью формулы (38.4), составляет $\Delta\overline{\nu} = 0{,}365$ см$^{-1}$, или в длинах волн $\Delta\lambda = 5{,}3 \cdot 10^{-4}$ нм. Длина волны самой линии L_α составляет $\lambda = 121{,}6$ нм. Для разрешения тонкой структуры линии L_α спектральный прибор должен иметь разрешающую способность не менее

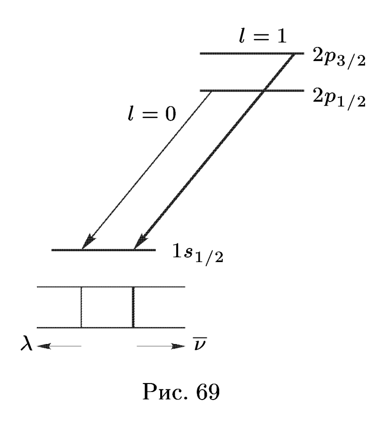


Рис. 69

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 121{,}6 \cdot (5{,}3 \cdot 10^{-4}) \approx 2{,}23 \cdot 10^5.$$

Аналогичную дублетную структуру имеют и остальные линии серии Лаймана водорода: L_β, L_γ, L_δ.

В качестве второго примера рассмотрим тонкую структуру линии H_α серии Бальмера водорода (рис. 70). Главному квантовому числу $n = 2$ соответствуют состояния $2s_{1/2}, 2p_{1/2}$ и $2p_{3/2}$. Поскольку энергия не зависит от орбитального числа l, первым двум состояниям соответствует одна и та же энергия, т. е. энергетический уровень, состоящий из двух слившихся уровней. Таким образом, при квантовом числе $n = 2$ получаются два уровня, из которых один слившийся. При $n = 3$ число различных уровней равно трем, причем один уровень, $3d_{5/2}$, простой, а два уровня, $(3p_{3/2}, 3d_{3/2})$ и $(3s_{1/2}, 3p_{1/2})$, слившиеся. Линия H_α возникает при квантовых переходах с верхних уровней ($n = 3$) на нижние ($n = 2$). Переходы, удовлетворяющие правилам отбора (40.1) и (40.2),

а также соответствующие им спектральные линии с указанием их примерной относительной интенсивности изображены на рис. 70. Таким образом, линия H_α, а также все остальные линии серии Бальмера H_β, H_γ, H_δ, ... состоят из пяти компонент.

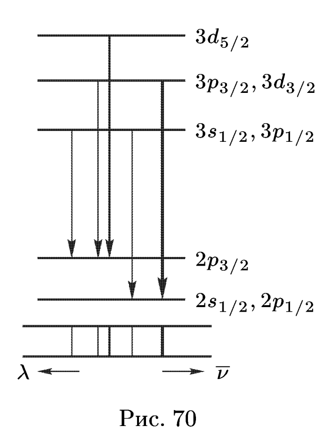


Рис. 70

3. Тонкая структура уровней и спектральных линий щелочных металлов и сходных с ними ионов в основном обусловлена *спин-орбитальным взаимодействием*, а не зависимостью массы электрона от скорости. Это связано с тем, что расщепление вследствие спин-орбитального взаимодействия быстро возрастает с увеличением Z. При больших Z расщепление уровней из-за зависимости массы электрона от скорости ничтожно по сравнению с расщеплением из-за спин-орбитального взаимодействия. Картина тонкого расщепления у щелочных металлов выглядит проще, чем у водорода. У водорода эта картина осложнена вырождением по l. У щелочных металлов это вырождение снимается, и закономерности тонкого расщепления предстают в чистом виде.

Происхождение тонкой структуры в спектральных сериях натрия пояснено на схематическом рис. 71. Главная серия возникает в результате переходов на наиболее глубокий уровень $3s_{1/2}$ с вышележащих

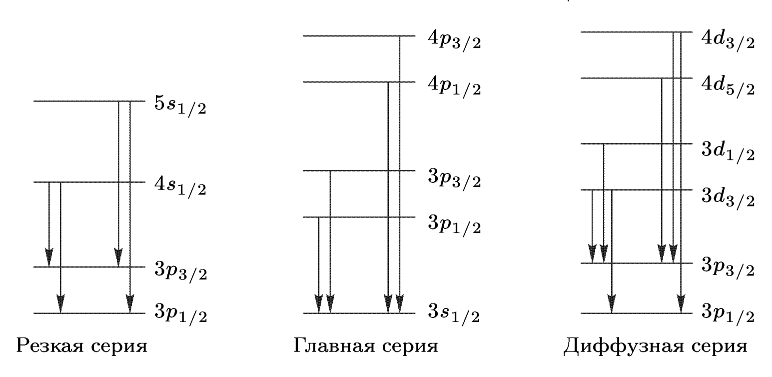


Рис. 71

p-уровней. Уровень $3s_{1/2}$ простой, а все p-уровни двойные, причем расстояние между компонентами этих уровней убывает с возрастанием главного квантового числа n. Поэтому и сами спектральные линии главной серии получаются двойными — *дублетами*. Расстояние между компонентами дублета уменьшается с возрастанием его номера (т. е. с увеличением частоты). Главная серия возникает и в спектре поглощения, так как в нормальном состоянии атомы натрия находятся на

наиболее низком уровне, т. е. на $3s_{1/2}$. Наиболее интенсивной является желтая резонансная линия натрия, возникающая при переходах $3p_{1/2} \to 3s_{1/2}$ и $3p_{3/2} \to 3s_{1/2}$. Этим переходам соответствуют длины волн $\lambda_1 = 589{,}6$ и $\lambda_2 = 589{,}0$ нм с разностью между ними $\Delta\lambda = 0{,}6$ нм.

Заметим, что с возрастанием Z расщепление спектральных линий щелочных металлов сильно увеличивается. Так, резонансная линия рубидия состоит из двух компонент $\lambda_1 = 794{,}8$ и $\lambda_2 = 780{,}0$ нм с расстоянием между ними $\Delta\lambda = 14{,}8$ нм. Для цезия соответствующие значения равны $\lambda_1 = 894{,}4$ и $\lambda_2 = 852{,}1$ нм, т. е. $\Delta\lambda = 42{,}3$ нм. Для таких расщеплений термин «тонкая структура» вряд ли является подходящим.

Линии резкой серии также являются *дублетами*, они возникают в результате переходов с простых s-уровней на лежащий ниже двойной $3p$-уровень, состоящий из подуровней $3p_{1/2}$ и $3p_{3/2}$. Поэтому расстояния между компонентами дублетов одни и те же для всей серии, причем сами компоненты являются *резкими* линиями. По этой причине и сама серия получила название *резкой*.

Диффузная серия возникает при переходах на двойной уровень $(3p_{1/2},\ 3p_{3/2})$ с вышележащих также двойных уровней $(3d_{3/2},\ 3d_{1/2})$, $(4d_{5/2},\ 4d_{3/2})$ и т. д. Ее спектральные линии являются *триплетами*, так как переходы типа $3d_{5/2} \to 3p_{1/2}$, в которых число j меняется на 2, запрещены правилами отбора (40.2). Расстояния между подуровнями различных d-уровней значительно меньше соответствующих расстояний для p-уровней. По этой причине при недостаточной разрешающей силе спектрального аппарата компоненты триплета не разрешаются, а сами линии получаются размытыми. Понятно поэтому, почему рассматриваемая серия получила название *диффузной*.

ЗАДАЧА

Рассчитать тонкую структуру спектральной линии H_α серии Бальмера водорода.

Решение. Энергетические уровни атома водорода определяются формулой (38.4), в которой следует положить $Z = 1$, т. е.

$$\mathscr{E}_{n,j} = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n}\left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n}\right)\right]. \tag{40.3}$$

Заменяя здесь массу электрона μ на приведенную массу, перепишем эту формулу так:

$$\mathscr{E}_{n,j} = -\frac{R_\text{H}}{n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n}\left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n}\right)\right], \tag{40.4}$$

где R_H — постоянная Ридберга для водорода, определяемая выражениями (13.10) и (13.9):

$$R_\text{H} = 109\,677{,}576\ \text{см}^{-1}.$$

Энергетические уровни здесь измеряются в обратных сантиметрах. Квадрат постоянной тонкой структуры равен $\alpha^2 = 5{,}3251 \cdot 10^{-5}$. Происхождение линии

H_α представлено на рис. 70. В соответствии с этим получаем

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_{2,1/2} &= -27\,419{,}395 \cdot 1{,}00001664 = -27\,419{,}850\ \text{см}^{-1},\\
\mathscr{E}_{2,3/2} &= -27\,419{,}395 \cdot 1{,}00000333 = -27\,419{,}485\ \text{см}^{-1},\\
\mathscr{E}_{3,1/2} &= -12\,186{,}397 \cdot 1{,}0000197 = -12\,186{,}639\ \text{см}^{-1},\\
\mathscr{E}_{3,3/2} &= -12\,186{,}397 \cdot 1{,}0000067 = -12\,186{,}478\ \text{см}^{-1},\\
\mathscr{E}_{3,5/2} &= -12\,186{,}397 \cdot 1{,}0000022 = -12\,186{,}423\ \text{см}^{-1}.
\end{aligned}$$

Взяв разности этих чисел в соответствии с рис. 70, находим спектроскопические волновые числа (в см$^{-1}$) и длины волн (в нм) для пяти компонент, на которые расщепляется линия H_α водорода:

$\overline{\nu}$, см$^{-1}$	λ, нм
15 233,372	656,4534
15 233,211	656,4604
15 233,067	656,4660
15 233,007	656,4692
15 232,846	656,4761

Заметим, что длины волн и спектроскопические волновые числа здесь отнесены к вакууму (а не к воздуху, как это обычно делается в спектроскопии).

§ 41. Простой и сложный эффект Зеемана

1. В кулоновском поле (в нерелятивистском приближении) все энергетические уровни электрона *вырождены* — энергия зависит только от главного квантового числа n, но не зависит от орбитального числа l. По этой причине все спектральные линии атома водорода *одиночные* (синглеты). Атомы щелочных металлов можно рассматривать как одноэлектронные атомы, в которых электрон движется в центрально-симметричном, но уже *не кулоновском* поле. Вырождение по l снимается — энергия уровня зависит не только от n, но и от l. С этим связано происхождение спектральных серий щелочных металлов. Наличие спин-орбитального взаимодействия приводит к *тонкой структуре* спектральных линий. Но в отсутствие внешних полей все направления в пространстве эквивалентны, а потому энергии уровней *не зависят от магнитного квантового числа* m, хотя при заданном J число m_J может принимать $2J+1$ значений. Кратность соответствующего вырождения равна, таким образом, $2J+1$. *Магнитное поле снимает и это вырождение*: каждый энергетический уровень расщепляется на $2J+1$ подуровней. Этим объясняется *эффект Зеемана*, подробно рассмотренный в т. IV (§ 92) с классической точки зрения. Однако до открытия спина электрона из-за наличия правил отбора квантовая теория, как и классическая, объясняла только *простой эффект Зеемана.*

В самом деле, если атом обладает магнитным моментом $\mathfrak{m}$, то его энергия в магнитном поле $\mathbf{B}$ равна $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 - (\mathfrak{m}\mathbf{B})$, где $\mathscr{E}_0$ — энергия

в отсутствие магнитного поля. Если нет спина, то магнитный момент обусловлен только орбитальным движением электронов. Его проекция на направление магнитного поля составляет целое число магнетонов Бора, т. е. $m_L \mathfrak{m}_Б = m_L(e\hbar/(2\mu_e c))$. Следовательно,

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 - m_L \frac{e\hbar B}{2\mu_e c} = \mathscr{E}_0 - \hbar\Omega m_L, \qquad (41.1)$$

где

$$\Omega = \frac{eB}{2\mu_e c} \qquad (41.2)$$

— *ларморовская частота.* Каждый уровень расщепляется в магнитном поле на $2L + 1$ подуровней. В результате квантовых переходов между различными уровнями излучаются спектральные линии с частотами

$$\omega = \omega_0 - \Omega\Delta m_L,$$

где $\omega_0 \equiv \Delta\mathscr{E}_0/\hbar$ — частота линии, излучаемой в отсутствие магнитного поля. В силу правил отбора $\Delta m_L = 0$ или ± 1. Таким образом, частота излучаемой линии будет

$$\omega = \omega_0 \quad \text{или} \quad \omega_0 \pm \Omega, \qquad (41.3)$$

т. е. получается *лорентцевский триплет.* В соответствии с классической теорией переходам $\Delta m_L = 0$ соответствуют колебания вдоль (π-компоненты), а переходам $\Delta m_L = \pm 1$ — поперек магнитного поля (σ-компоненты).

2. Учет *спина электрона* позволил объяснить и *сложный эффект Зеемана.* Будем исходить из векторной модели, предполагая, что осуществляется *нормальная связь* (связь Рассела–Саундерса, см. § 38, п. 3). В ней атом характеризуется орбитальным моментом количества движения $\mathbf{L}$, спиновым моментом $\mathbf{S}$ и общим моментом количества движения $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. В операторной форме $\widehat{\mathbf{J}} = \widehat{\mathbf{L}} + \widehat{\mathbf{S}}$, $\widehat{\mathbf{J}}^2 = \widehat{\mathbf{L}}^2 + \widehat{\mathbf{S}}^2 + 2(\widehat{\mathbf{L}}\widehat{\mathbf{S}})$. Будем рассматривать состояние, в котором квадраты моментов имеют определенные значения, т. е. равны соответственно $J(J+1)$, $L(L+1)$, $S(S+1)$. В том же состоянии имеет определенное значение и скалярное произведение $(\mathbf{LS})$, а именно

$$(\mathbf{LS}) = \frac{1}{2}[\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2] = \frac{1}{2}[J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)]. \qquad (41.4)$$

Моментам количества движения $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$ соответствуют орбитальный и спиновый магнитные моменты $\mathfrak{m}_L = -g_l\mathbf{L}$, $\mathfrak{m}_s = -g_s\mathbf{S}$. (Знак минус поставлен потому, что заряд электрона отрицателен, а потому векторы $\mathfrak{m}_L$ и $\mathbf{L}$, а также $\mathfrak{m}_s$ и $\mathbf{S}$ направлены противоположно.) Примем за единицу момента количества движения величину $\hbar$, а за единицу магнитного момента — магнетон Бора $\mathfrak{m}_Б$. В этих единицах для электрона $g_l = 1$, $g_s = 2$. То обстоятельство, что $g_l \neq g_s$, и обеспечивает сложный характер эффекта Зеемана. Однако мы временно не будем фиксировать числовые значения g_l и g_s, имея в виду, что величины g_s для протона и нейтрона не равны соответствующей величине для электрона.

В отсутствие внешнего поля общий момент количества движения **J** сохраняется как по величине, так и по направлению (применяется векторная модель). Моменты же **L** и **S** из-за спин-орбитального взаимодействия не сохраняются. Однако в рассматриваемом состоянии сохраняются их длины. В результате они совершают *регулярную прецессию* вокруг неизменного направления вектора **J** и притом с одной и той же угловой скоростью, так как векторы **L**, **S**, **J** должны все время лежать в одной плоскости. С той же угловой скоростью будут прецессировать и соответствующие им магнитные моменты $\mathfrak{m}_L = -g_l\mathbf{L}$ и $\mathfrak{m}_S = -g_s\mathbf{S}$, а также общий магнитный момент $\mathfrak{m} = -g_l\mathbf{L} - g_s\mathbf{S}$. Действительно, ввиду неравенства g_l и g_s вектор $\mathfrak{m}$ не коллинеарен вектору **J**, а потому также должен менять направление (рис. 72, где принято во внимание, что ввиду отрицательного заряда электрона направления векторов **L** и $\mathfrak{m}_L$, а также векторов **S** и $\mathfrak{m}_S$ противоположны).

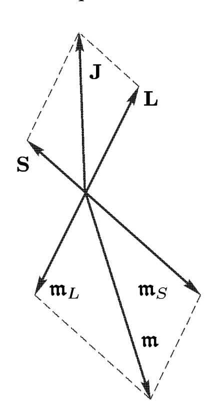


Рис. 72

Найдем теперь проекцию $\mathfrak{m}_{\parallel}$ вектора $\mathfrak{m}$ на направление вектора **J**. Для этого прежде всего находим скалярное произведение

$$(\mathfrak{m}\mathbf{J}) = (-g_l\mathbf{L} - g_s\mathbf{S})(\mathbf{L}+\mathbf{S}) = -g_l\mathbf{L}^2 - g_s\mathbf{S}^2 - (g_l + g_s)(\mathbf{L}\mathbf{S}),$$

или ввиду соотношения (41.4)

$$(\mathfrak{m}\mathbf{J}) = -g\mathbf{J}^2. \tag{41.5}$$

где через g обозначена величина

$$g = \frac{g_l + g_s}{2} + \frac{g_l - g_s}{2}\,\frac{\mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2}{\mathbf{J}^2},$$

или в более подробной записи

$$g = \frac{g_l + g_s}{2} + \frac{g_s - g_l}{2}\,\frac{S(S+1) - L(L+1)}{J(J+1)}. \tag{41.6}$$

В частности, для электрона $g_l = 1$, $g_s = 2$, и выражение (41.6) переходит в

$$g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}. \tag{41.7}$$

В этом случае g является *рациональной дробью*. Величина g называется *множителем Ланде* (1888–1975).

Таким образом, на основании (41.5) можно написать $\mathfrak{m}_{\parallel}|\mathbf{J}| = -g|\mathbf{J}|^2$, откуда видно, что проекция вектора $\mathfrak{m}$ на направление вектора **J** имеет определенное значение, а именно $\mathfrak{m}_{\parallel} = -g|\mathbf{J}|$. Перпендикулярная проекция $m_{\perp}$, как и должно быть, определенного значения не имеет. В векторной модели она совершает прецессию вокруг вектора **J**. При рассмотрении процессов, происходящих медленно по сравнению с этой

прецессией, от наличия перпендикулярной составляющей можно отвлечься, считая, что полный магнитный момент атома сводится к одной только его проекции $\mathfrak{m}_{\|}$. В этом приближении

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\|} = -g\mathbf{J}. \tag{41.8}$$

Именно такой магнитный момент атома проявляется, например, в опытах Штерна и Герлаха.

Формулы (41.6) и (41.7) могут быть получены и последовательно, квантовомеханически. Для этого надо только ввести *оператор проекции магнитного момента* $\widehat{\mathfrak{m}}_{\|}$ и определить его собственные значения. Но мы не будем этого делать, предпочитая наглядный, хотя и непоследовательный вывод, приведенный в тексте. Заметим только, что не представляет затруднений распространить этот наглядный метод на случай $(j - j)$-связи, а также на промежуточные виды связи. В этих случаях для g получаются формулы, отличающиеся от (41.6) и (41.7). Из-за этого характер расщепления спектральных линий в сложном эффекте Зеемана получается несколько иным, чем в случае нормальной связи. Интересующихся этим вопросом мы отсылаем к специальным курсам спектроскопии, например к книге М.А. Ельяшевича (р. 1908) «Атомная и молекулярная спектроскопия». — М.: Физматгиз, 1962.

3. До сих пор предполагалось, что магнитного поля нет. Допустим теперь, что атом помещен в однородное магнитное поле $\mathbf{B}$. Тогда не будет сохраняться и полный момент атома $\mathbf{J}$. Он под действием поля $\mathbf{B}$ начнет совершать *вынужденную прецессию*. Рассмотрим сначала случай слабого поля, когда эта прецессия совершается медленно по сравнению с прецессией, связанной со спин-орбитальным взаимодействием. Иными словами, магнитное поле $\mathbf{B}$ должно быть настолько слабым, чтобы вызываемое им зеемановское расщепление спектральных линий было мало по сравнению с расстояниями между компонентами тонкой структуры спектральных линий. В этом случае эффект Зеемана получается *сложным*. Для одиночных линий (синглетов) указанное условие никогда не может выполняться. Для таких линий всякое магнитное поле является *сильным*, и наблюдаемый на них эффект Зеемана всегда простой.

В случае слабого поля дополнительная энергия, приобретаемая атомом в магнитном поле, может быть вычислена в предположении, что полный магнитный момент атома дается выражением (41.8), или в обычных единицах

$$\mathfrak{m} = -g\frac{e\hbar}{2\mu c}\,\mathbf{J}. \tag{41.9}$$

Таким образом,

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 - (\mathfrak{m}\mathbf{B}) = \mathscr{E}_0 + g m_J \Omega\hbar, \tag{41.10}$$

где $\mathscr{E}_0$ — энергия атома в отсутствие магнитного поля. Эта формула показывает, на какие энергетические уровни расщепляется каждый уровень атома при внесении его в слабое магнитное поле. Она же

с учетом правил отбора определяет возможные радиационные переходы между уровнями, а следовательно, и длины волн соответствующих им спектральных линий. Очевидно, из правил отбора надо принять во внимание только следующее:

$$\Delta m_J = \pm 1 \text{ или } 0, \tag{41.11}$$

так как само собой разумеется, что спектральная линия, о зеемановском расщеплении которой идет речь, не запрещена, т. е. всем остальным правилам отбора удовлетворяет. Одним словом, формулы (41.10) и (41.11) составляют основу для понимания явления Зеемана, как сложного, так и простого.

4. Происхождение сложного эффекта Зеемана проследим на примере спектральной линии щелочного металла, соответствующей переходу с дублетного уровня $({}^2p_{1/2}, {}^2p_{3/2})$ на синглетный уровень ${}^2s_{1/2}$. В частности, при $n = 3$ получается всем известный желтый дублет натрия. Но мы не будем фиксировать главное квантовое число, чтобы подчеркнуть, что характер зеемановского расщепления от него не зависит. Рассчитаем сначала множитель Ланде по формуле (41.7). Для уровня $p_{3/2}$ $l = 1$, $j = 3/2$, $s = 1/2$ получаем $g = 4/3$. Аналогично для уровня $p_{1/2}$ $g = 2/3$, а для уровня $s_{1/2}$ $g = 2$. Согласно (41.10) смещения подтермов, на которые расщепляются соответствующие термы, равны gm_J, если за единицу принять лорентцевское расщепление, т. е. за единицу частоты принять ларморовскую частоту Ω. Соответствующие значения приведены в следующей схеме:

$p_{3/2}$	m_j	$-3/2$	$-1/2$	$+1/2$	$+3/2$
	gm_j	-2	$-2/3$	$+2/3$	$+2$
$p_{1/2}$	m_j		$-1/2$	$+1/2$	
	gm_j		$-1/3$	$+1/3$	
$s_{1/2}$	m_j		$-1/2$	$+1/2$	
	gm_j		-1	$+1$	

Расчет расщепления дублета $p_{1/2} \to s_{1/2}$; $p_{3/2} \to s_{1/2}$ в слабом магнитном поле приведен в табл. 3. Номера соответствующих линий приведены в порядке возрастания частоты. Таблице соответствует схема спектральных переходов, представленная на рис. 73. На этой схеме в левом столбце изображены энергетические уровни $s_{1/2}$, $p_{1/2}$, $p_{3/2}$ в отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B} = 0$). Правее показаны те же уровни, расщепившиеся в слабом магнитном поле $\mathbf{B}$, и все разрешенные переходы между ними, создающие картину зеемановского эффекта в рассматриваемом случае. Мы видим, что линия $p_{1/2} \to s_{1/2}$ расщепилась на четыре компоненты, из которых крайние являются σ-компонентами, средние — π-компонентами. Вторая линия $p_{3/2} \to s_{1/2}$ расщепилась на шесть компонент: средние две являются π-компонентами, остальные четыре σ-компонентами. Расстояния между компонентами приведены в единицах лорентцевского расщепления, т. е. за единицу частоты принята ларморовская частота $eB/2\mu c$.

Таблица 3

Переходы $m_j^{(1)} \to m_j^{(2)}$	Поляризация	$(gm_j)^1 - (gm_j)^2$	Номер линии
Расщепление линии $p_{1/2} \to s_{1/2}$			
$-1/2 \to +1/2$	σ	$-1/3 - 1 = -4/3$	1
$-1/2 \to -1/2$	π	$-1/3 - (-1) = 2/3$	3
$+1/2 \to +1/2$	π	$1/3 - 1 = -2/3$	2
$+1/2 \to -1/2$	σ	$1/3 - (-1) = 4/3$	4
Расщепление линии $p_{3/2} \to s_{1/2}$			
$-3/2 \to +1/2$ — переход запрещен			
$-3/2 \to -1/2$	σ	$-2 - (-1) = -1$	6
$-1/2 \to +1/2$	σ	$-2/3 - 1 = -5/3$	5
$-1/2 \to -1/2$	π	$-2/3 + 1 = 1/3$	8
$+1/2 \to +1/2$	π	$2/3 - 1 = -1/3$	7
$+1/2 \to -1/2$	σ	$2/3 + 1 = 5/3$	10
$+3/2 \to +1/2$	σ	$2 - 1 = 1$	9
$+3/2 \to -1/2$ — переход запрещен			

5. Величины gm_J в формуле (41.10) являются небольшими рациональными числами. Поэтому из приведенной схемы происхождения сложного эффекта Зеемана непосредственно следует правило, эмпирически установленное Рунге (1856–1927) еще в то время, когда физическая природа сложного эффекта была не ясна. *Правило Рунге* утверждает, что расстояния между компонентами, получившимися в сложном эффекте Зеемана в результате расщепления в магнитном поле, являются *небольшими рациональными числами*, если за единицу расстояния принять нормальное лорентцевское расщепление Ω, получающееся в том же магнитном поле.

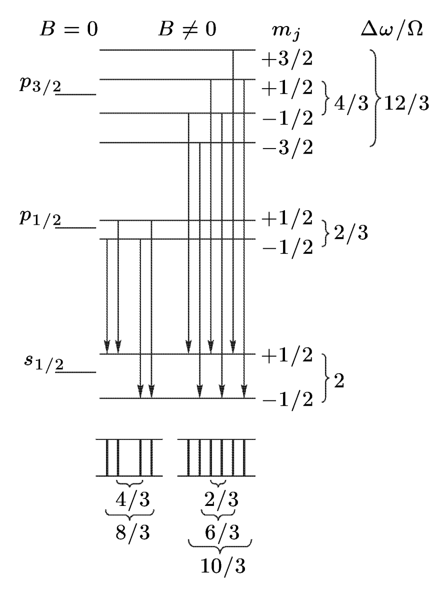


Рис. 73

Второе правило было установлено также эмпирически до создания теории сложного эффекта Зеемана. Это — *правило Престона*, состоящее в том, что спектральные линии, имеющие *один и тот же сериальный символ*, дают *одинаковый тип магнитного расщепления* независимо от значений главных квантовых чисел. Под се-

риальным символом понимают выражение вида ${}^2P_{3/2}{}^2D_{5/2}$, в котором ${}^2D_{5/2}$ относится к состоянию, из которого, а ${}^2P_{3/2}$ — на которое совершается радиационный переход. При этом значения главных квантовых чисел как в исходном, так и конечном состояниях атома могут быть какими угодно. По правилу Престона, например, компоненты ${}^2S_{1/2}{}^2P_{1/2}$ дублетов главной серии щелочных металлов расщепляются в слабом магнитном поле одинаково независимо от значений главных квантовых чисел и от химических элементов, к которым они принадлежат. То же относится ко вторым компонентам тех же дублетов, а также к мультиплетам резкой и диффузной серий щелочных металлов. Отступления от правила Престона связаны либо с узостью мультиплетной структуры, когда расстояния между компонентами мультиплета порядка или меньше величины расщепления, вызываемого магнитным полем, либо с нарушением нормальной связи между L и S.

6. С возрастанием напряженности магнитного поля, когда воздействие магнитного поля на атом становится сравнимым или больше спин-орбитального взаимодействия, должна меняться и картина расщепления в явлении Зеемана. В этом случае уже нельзя рассматривать поведение каждой компоненты мультиплета тонкой структуры в отдельности, а следует рассматривать *мультиплет в целом.* По мере усиления магнитного поля меняется и сам мультиплет. Особенно простых результатов следует ожидать, когда магнитное поле становится настолько сильным, что магнитное расщепление становится заметно больше ширины первоначального мультиплета. В этом случае можно пренебречь спин-орбитальным взаимодействием и рассматривать вынужденную прецессию векторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$ в магнитном поле *независимо друг от друга.* Тогда

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_L + \mathfrak{m}_S = -\frac{e\hbar}{2\mu c}(\mathbf{L} + 2\mathbf{S}),$$

и, следовательно,

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 + \frac{e\hbar}{2\mu c}(\mathbf{L} + 2\mathbf{S})\mathbf{B} = \mathscr{E}_0 + \Omega\hbar(m_L + 2m_S).$$

Так как, согласно правилам отбора, $\Delta m_L = \pm 1$ или 0, а $\Delta m_S = 0$, то отсюда получаем

$$\Delta\omega = \frac{\Delta\mathscr{E}}{\hbar} = \pm\Omega \quad \text{или} \quad 0.$$

И, действительно, в 1912 г. Пашен и Бак (1881–1959) обнаружили, что с возрастанием магнитного поля происходят магнитооптические превращения, *конечным результатом которых в сильных полях является простой триплет Зеемана–Лорентца*, хотя в его трех компонентах все еще остаются малые по сравнению с расстояниями между ними и не зависящие от напряженности магнитного поля расщепления того же порядка, что и тонкая структура мультиплетов в отсутствие поля. Это явление получило название *явления Пашена–Бака.*

7. Рисунок 74 иллюстрирует, что́ получается на опыте при фотографировании поперек магнитного поля. В левом верхнем углу первого

ряда показана одиночная спектральная линия (синглет) в отсутствие магнитного поля, а под ней — ее расщепление в лорентцевский триплет

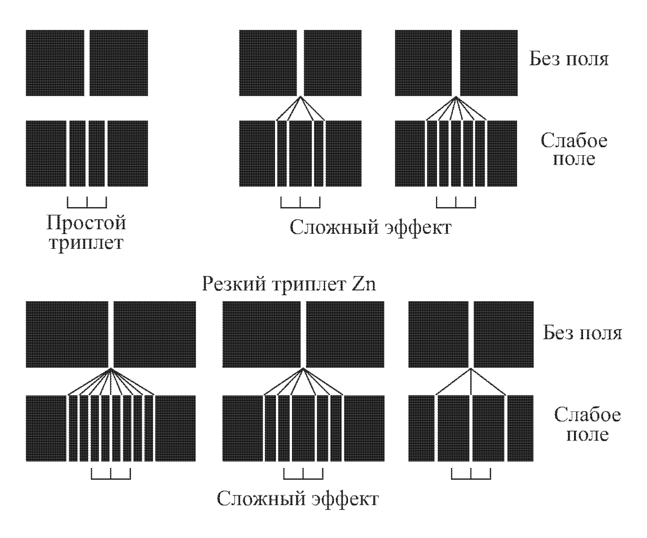


Рис. 74

в магнитном поле. Справа сверху сфотографирован желтый дублет натрия, под ним — расщепление в слабом магнитном поле. Этот случай был рассчитан выше в п. 4. Наконец, в нижней части рисунка приведен триплет цинка, а под линиями этого триплета — их расщепление в слабом магнитном поле.

8. Сформулируем теперь *количественно*, какие поля должны считаться *слабыми*, а какие *сильными*. Пусть $\Delta\omega$ означает ширину рассматриваемого мультиплета. Тогда поле будет слабым, если $\Omega \ll \Delta\omega$, и сильным в противоположном случае. Если перейти к длинам волн, то $\Delta\omega = |2\pi c\Delta(1/\lambda)| = 2\pi c\Delta\lambda/\lambda^2$. Подставляя значение $\Omega = eB/(2\mu c)$, найдем, что в случае слабых полей

$$B \ll \frac{4\pi\mu c^2\Delta\lambda}{e\lambda^2}. \tag{41.12}$$

Например, в случае резонансной желтой линии натрия $\lambda = 590$ нм, $\Delta\lambda = 0{,}6$ нм, и формула (41.12) дает для слабых полей $B \ll 3{,}7\cdot 10^5$ Гс. Понятно поэтому, почему рассматриваемая линия в полях порядка 10^4 Гс дает сложный эффект. Для линии L_α лаймановской серии водорода $\lambda = 121{,}6$ нм, $\Delta\lambda = 5{,}3\cdot 10^{-4}$ нм слабыми являются поля $B \ll 8000$ Гс. В случае линии H_α серии Бальмера $\lambda = 656$ нм, $\Delta\lambda = 0{,}0227$ нм (см. задачу к предыдущему параграфу), $B \ll 1{,}1\cdot 10^4$ Гс.

Из этих данных видно, насколько неудачны были названия «нормальный» и «аномальный», которыми долго пользовались для обозначения соответственно простого и сложного эффектов Зеемана.

Подавляюще часто встречается сложный эффект, а потому именно его следовало бы считать нормальным, а не аномальным.

ЗАДАЧИ

1. На сколько компонент расщепится в слабом магнитном поле линия щелочного металла с сериальным символом $^2D^2_{5/2}F_{7/2}$? Сколько из них будет π- и сколько σ-компонент?

Ответ. На 18. Из них шесть π-компонент и двенадцать σ-компонент.

2. С помощью интерферометра Фабри–Перо наблюдается зеемановское расщепление коротковолновой компоненты D-линии натрия в магнитном поле $B = 5000$ Гс. Каково должно быть расстояние d между зеркальными плоскостями интерферометра, чтобы он был пригоден для исследования расщепления рассматриваемой линии?

Решение. Как показано в тексте (см. рис. 73), рассматриваемая линия расщепляется в магнитном поле на шесть равноотстоящих компонент, расстояние между которыми составляет $\Delta_1\omega = (2/3)\,\Omega$, а между крайними $\Delta_2\omega = (10/3)\,\Omega$. Спектральный прибор для исследования расщепления должен не только разрешать расщепленные линии, но и не должен давать перекрытия порядков. Значит, область дисперсии прибора должна быть не меньше $\Delta_2\omega$. Но область дисперсии $\Delta\omega$ в частотах дается соотношением $\Delta\omega = \omega/m$, где $m = 2d/\lambda = \omega d/\pi c$ — порядок спектра. Таким образом, должно быть

$$\frac{\omega}{m} \geqslant \Delta_2\omega,$$

т. е.

$$m \leqslant \frac{\omega}{\Delta_2\omega}. \tag{41.13}$$

В результате находим

$$d \leqslant \frac{3}{5}\,\frac{\pi\mu c^2}{eB} = 0{,}64 \text{ см}.$$

Разрешающая способность прибора дается выражением $N_{\text{эф}}m$, где $N_{\text{эф}}$ — эффективное число интерферирующих пучков. Для разрешения необходимо

$$N_{\text{эф}}m \geqslant \frac{\omega}{\Delta_1\omega}, \text{ т. е. } N_{\text{эф}}m \geqslant \frac{5\omega}{\Delta_2\omega}.$$

В сочетании с (41.13) это дает $N \geqslant 5$.

§ 42. Магнитный резонанс

1. В магнитном поле каждый уровень энергии атома расщепляется на $2J + 1$ подуровней. Подуровни одного и того же уровня отличаются квантовыми числами m_J, определяющими проекции вектора $\mathbf{J}$ на направление магнитного поля. Расщепление спектральных линий, наблюдаемое в эффекте Зеемана, возникает в результате квантовых переходов между подуровнями различных расщепившихся уровней. Спонтанные переходы между подуровнями одного и того же исходного уровня маловероятны: их вероятность пропорциональна кубу расстояния между подуровнями. Кроме того, в случае одного валентного электрона такие переходы запрещены правилом отбора $\Delta L \neq 0$.

Но правила отбора относятся к радиационным переходам *изолированных атомов*. Вынужденные переходы, т. е. переходы под действием внешних силовых полей, могут происходить и тогда, когда эти правила не выполняются. Точно так же могут существенно увеличиться и вероятности соответствующих квантовых переходов, если атом поместить в надлежащее внешнее силовое поле. Именно это происходит с квантовыми переходами между подуровнями одного и того же уровня, расщепившегося в постоянном магнитном поле $\mathbf{B}$. Они начинают осуществляться с заметными скоростями, если на поле $\mathbf{B}$ наложить поперечное слабое переменное магнитное поле. Цикл явлений и методов исследования, связанный с вынужденными переходами такого рода (по причинам, которые выяснятся в ходе изложения), называется *магнитным резонансом.*

2. Строго последовательное квантовомеханическое рассмотрение магнитного резонанса в общем курсе физики провести невозможно. Оно требует исследования вопроса о вероятностях вынужденных переходов атомных систем из одного состояния в другое. Однако для понимания сущности явления целесообразно воспользоваться простыми классическими соображениями. Это тем более оправдано, что явление магнитного резонанса было предсказано и понято именно на таком классическом пути. Результаты этого предсказания оказались в согласии с опытом, и классическими моделями пользуются и поныне, чтобы составить наглядную картину явления. Последовательное квантовомеханическое истолкование появилось несколько позже.

Итак, допустим, что частица с моментом количества движения $\mathbf{J}$ и магнитным моментом $\mathfrak{m}$ помещена в однородное постоянное магнитное поле $\mathbf{B}$. Пусть эти моменты связаны соотношением $\mathfrak{m} = g\mathbf{J}$, где g — *гиромагнитное отношение.* При этом предполагается, что за единицу $\mathbf{J}$ принимается постоянная Планка $\hbar$, а за единицу магнитного момента — магнетон Бора $e\hbar/(2\mu_\text{e}c) = 9{,}274 \cdot 10^{-21}$ эрг/Гс или ядерный магнетон $e\hbar/(2\mu_\text{p}c) = 5{,}050 \cdot 10^{-24}$ эрг/Гс, в зависимости от того, обусловлен ли магнитный момент частицы электронами или атомными ядрами. Здесь μ_e и μ_p — массы электрона и протона соответственно. Поэтому ядерный магнетон в 1836 раз меньше электронного магнетона Бора. Если же гиромагнитное отношение выражать в абсолютных единицах, то его мы будем обозначать через $g_\text{абс}$ и писать $\mathfrak{m} = g_\text{абс}\mathbf{J}$. Таким образом, величина g безразмерная, тогда как $g_\text{абс}$ имеет размерность величины $e/\mu c$. Например, для спина электрона $g_\text{абс} = e/\mu_\text{e}c$, тогда как $g = 2$. Спины ядер по порядку величины такие же, как и у атомов, и выражаются целыми или полуцелыми числами, тогда как ядерные магнитные моменты в тысячи раз меньше электронных. Для частиц разного рода величина g может быть различной, но это обстоятельство сейчас не имеет значения.

На частицу в магнитном поле действует вращающий момент $[\mathfrak{m}\mathbf{B}]$, так что

$$\dot{\mathbf{J}} = [\mathfrak{m}\mathbf{B}] = g_\text{абс}[\mathbf{J}\mathbf{B}].$$

Это — *уравнение волчка*. В установившемся состоянии момент $\mathbf{J}$, а с ним и момент $\mathfrak{m}$ будут совершать вынужденную регулярную прецессию (рис. 75) с угловой скоростью

$$\mathbf{\Omega} = -g_{\text{абс}}\mathbf{B}. \tag{42.1}$$

Наложим теперь на поле $\mathbf{B}$ перпендикулярное к нему слабое магнитное поле $\mathbf{B}'$, вращающееся вокруг $\mathbf{B}$. Тогда прецессирующая частица подвергнется действию дополнительного переменного момента сил $[\mathfrak{m}\mathbf{B}']$. Этот момент, в зависимости от его направления, будет менять угол между векторами $\mathbf{J}$ и $\mathbf{B}$. Если скорость прецессии $\mathbf{\Omega}$ и угловая скорость вращения $\mathbf{\Omega}'$ поля $\mathbf{B}'$ значительно отличаются друг от друга, то фазы этих двух вращений будут непрерывно расходиться, а вращающий момент $[\mathfrak{m}\mathbf{B}']$ будет испытывать малые периодические изменения, быстро меняющиеся по величине и направлению. Такие изменения вызовут только малые изменения угла наклона между $\mathbf{J}$ и $\mathbf{B}$, периодически и быстро меняющиеся во времени. Они будут либо немного приближать по направлению вектор $\mathbf{J}$ к вектору $\mathbf{B}$, либо немного удалять, так что в среднем направление вектора $\mathbf{J}$ останется неизменным.

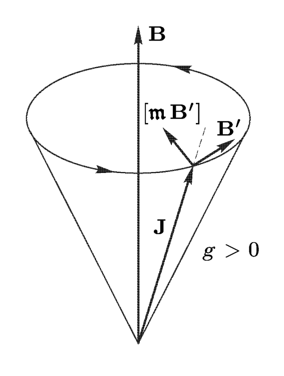


Рис. 75

Совсем иная картина будет наблюдаться, когда Ω' совпадает с Ω. В этом случае и возникает магнитный резонанс. Он состоит в том, что дополнительный момент сил действует все время в одну и ту же сторону, устанавливая вектор $\mathbf{J}$ либо параллельно, либо антипараллельно постоянному магнитному полю $\mathbf{B}$. При этом длина вектора $\mathbf{J}$ меняться не будет, но будет меняться его проекция J_z на направление поля $\mathbf{B}$.

3. Результат квантового рассмотрения отличается от классического только в том отношении, что в квантовом случае проекция J_z квантуется, и по этой причине ее изменения во времени происходят скачкообразно, тогда как в классическом случае они совершаются непрерывно. Классическое рассмотрение приводит к заключению, что резонанс должен наблюдаться только на одной частоте Ω. Если воспользоваться принципом соответствия, то это приводит к правилу отбора $\Delta m_J = \pm 1$, которое должно соблюдаться при квантовых переходах между подуровнями расщепившегося зеемановского уровня. Это означает, что разрешенными являются только переходы между соседними подуровнями. Действительно, расстояние между подуровнями составляет $\Delta\mathscr{E} = gB\Delta m_J\hbar$, так что частота перехода будет $\omega = \Delta\mathscr{E}/\hbar = gB\Delta m_J$, что совпадает с $\pm\Omega$ при условии $\Delta m_J = \pm 1$. Разумеется, это правило является также следствием сохранения момента импульса, так как вынужденный переход между подуровнями можно рассматривать как взаимодействие атомной системы с фотоном частоты Ω (см. § 39).

4. Для наблюдения магнитного резонанса удобнее пользоваться не вращающимся полем $\mathbf{B}'$, а полем, синусоидально колеблющимся в одном и том же направлении перпендикулярно к основному полю $\mathbf{B}$.

Принципиально это ничего не меняет, так как такое поле $\mathbf{B}'$ можно представить в виде суммы двух полей одинаковой напряженности, вращающихся с одной и той же угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, но в противоположных направлениях. Из них поле, вращающееся против прецессии частицы, как выяснено выше, оказывает на нее быстро осциллирующее воздействие, не играющее роли в рассматриваемом явлении. Существенно только поле, меняющее угол между $\mathbf{J}$ и $\mathbf{B}$ все время в одну и ту же сторону, т. е. поле, вращающееся в том же направлении, что и прецессирующий вектор $\mathbf{J}$. Круговая частота Ω, необходимая для получения магнитного резонанса, определяется формулой (42.1). При переходе к длинам волн из нее получаем

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\Omega} = \frac{2\pi c}{|g_{\text{абс}}|B}. \tag{42.2}$$

Если магнитный и механический моменты частицы обусловлены электронами электронной оболочки атома, то магнитный резонанс называют *электронным парамагнитным резонансом* (ЭПР); если же атомными ядрами, то его называют *ядерным магнитным резонансом* (ЯМР). Различают также *ферромагнитный*, *антиферромагнитный*, *ферримагнитный* и *диамагнитный* (*циклотронный*) резонансы, о которых будет сказано в п. 10. Магнитный резонанс широко применяется для определения магнитных моментов атомов и атомных ядер, для изучения строения молекул и кристаллов и т. д.

Для электронов спин равен $1/2$, так что $g_{\text{абс}} = e/\mu c$. При напряженности магнитного поля $B \approx 3 \cdot 10^3$ Гс формула (42.2) в этом случае дает

$$\lambda = \frac{2\pi \mu c^2}{eB} \approx 3{,}5 \text{ см}.$$

Соответствующая частота

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \approx 10^4 \text{ МГц}.$$

Это — частоты микроволнового диапазона ($\nu > 300$ МГц, $\lambda < 1$ м), называемые также СВЧ. Ядерный магнитный резонанс при тех же магнитных полях должен наблюдаться на волнах в тысячи раз более длинных, частоты которых порядка нескольких мегагерц.

5. Исторически сначала наблюдался ядерный магнитный резонанс с нейтральными атомными молекулярными пучками по методу, разработанному Раби (р. 1898) в 1938 г. Механический и магнитный моменты электронных оболочек атомов или молекул, из которых состоит пучок, должны быть скомпенсированы, так что оба момента являются чисто ядерными. В методе Раби атомы или молекулы пучка, пройдя через щель (рис. 76), сначала попадают в неоднородное поле магнита A с градиентом, направленным перпендикулярно к щели, например вниз. За магнитом A расположен магнит C, создающий сильное однородное постоянное поле $\mathbf{B}$, в котором расположена щель S. Затем идет магнит B, вполне аналогичный магниту A, но создающий неоднородное поле с градиентом, направленным противоположно градиенту поля

магнита A, т. е. в нашем случае вверх. Магниты A и B, создающие неоднородные поля, конструируются аналогично тому, как это делается в опытах Штерна и Герлаха (см. § 36).

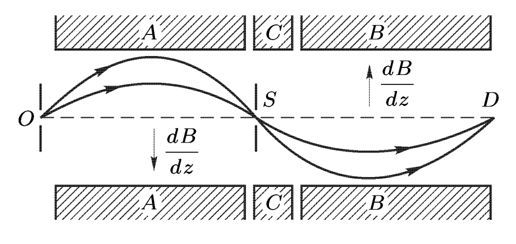


Рис. 76

Если бы магнитов A и B не было, то пучок частиц, направленный вдоль оси прибора, прошел бы через щель S и попал на детектор D. Но в неоднородных полях, благодаря наличию у частиц пучка магнитных моментов, на них действуют поперечные силы $F = \mathfrak{m}_z(dB/dz)$, направленные либо по, либо противоположно градиенту магнитного поля в зависимости от знака проекции $\mathfrak{m}_z$ на направление поля. Такие силы искривляют траектории частиц. Источник создает частицы различных скоростей и направлений. Из них представляют интерес только частицы, проходящие через щель S. Сила F действующая на частицу при ее движении по траектории, не меняется, так как при этом проекция $\mathfrak{m}_z$ остается постоянной. Поэтому в первом приближении траектории интересующих нас частиц в поле магнита A можно считать окружностями, радиус R которых определяется уравнением $v^2/R = f$, где f — нормальная сила, действующая на единицу массы частицы в неоднородном поле магнита A. Все частицы таких направлений, не задержанные краями диафрагм, пройдут через щель S.

В поле магнита B, поскольку проекции $\mathfrak{m}_z$ остаются прежними, траектории частиц будут такими же окружностями, но изогнутыми в противоположную сторону. При надлежащем поле магнита B отклонения частиц, вызванные магнитом A, компенсируются магнитом B, и частицы попадут на детектор D. Две траектории такого типа изображены на рис. 76. В этом случае детектор D зарегистрирует максимум тока частиц.

До сих пор предполагалось, что все магнитные поля постоянны. Наложим теперь на сильное постоянное поле $\mathbf{B}$ магнита C поперечное к нему слабое радиочастотное магнитное поле $\mathbf{B}'$, гармонически меняющееся во времени с частотой ω. Такое поле будет вызывать вынужденные квантовые переходы частиц, в результате которых проекции $\mathfrak{m}_z$ некоторых частиц будут изменяться, а с ними изменятся и силы, действующие на частицы в неоднородном поле магнита B. В пространстве, занятом полем магнита B, частицы будут сходить со своих прежних траекторий и перестанут попадать в детектор D.

Допустим сначала, что $\omega < \Omega$. Тогда с возрастанием ω интенсивность N пучка частиц, попадающих в детектор D, будет убывать. При

$\omega = \Omega$ наступает резонанс между колебаниями поля $\mathbf{B}'$ и ларморовской прецессией частицы вокруг сильного постоянного поля $\mathbf{B}$. Тогда интенсивность N пучка попадающих на детектор частиц обращается в минимум. При переходе через резонансную частоту Ω с возрастанием ω будет возрастать и указанная интенсивность. Из формулы (42.1) следует, что резонанс наступает при

$$\omega = |g_{\text{абс}}|B = g\frac{eB}{2\mu c}, \tag{42.3}$$

или

$$\nu = g\frac{eB}{4\pi\mu c}, \tag{42.4}$$

где под μ следует понимать массу протона (в случае ЯМР) или массу электрона (в случае ЭПР). Определив в минимуме частоту ν и напряженность поля $\mathbf{B}$, можно по формуле (42.4) вычислить и гиромагнитное отношение g для атомных ядер. Относительная точность таких измерений достигает 0,001 %. Зная спин ядра, можно найти и его магнитный момент $\mathfrak{m}$. (К этому вопросу мы вернемся ниже.)

На опыте частоту радиочастотного магнитного поля $\mathbf{B}'$ удобнее поддерживать постоянной, а напряженность сильного поля $\mathbf{B}$ плавно изменять в ту и другую сторону около некоторого среднего значения. С этой целью поле магнита C модулируют с низкой частотой (50 Гц) с помощью модулирующих катушек, питаемых от сети городского тока. Об остроте получающегося резонансного минимума можно судить по экспериментальной кривой рис. 77, полученной для ядер ^{7}Li (пучок состоял из молекул с компенсированными электронными спинами). По горизонтальной оси отложена напряженность «постоянного» поля B в гауссах, по оси ординат — относительная интенсивность N пучка частиц, регистрируемых детектором D. Частота радиочастотного поля, на которой получался резонансный минимум, равна $\nu = 5{,}585$ МГц.

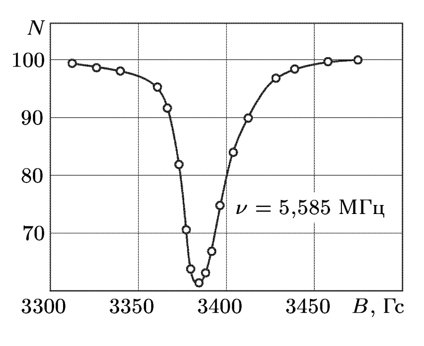


Рис. 77

6. Одним из важнейших применений магнитного резонанса с использованием атомных пучков является измерение магнитного момента электрона $\mathfrak{m}_{\text{эл}}$. Оказалось, что эта величина не совсем совпадает с магнетоном Бора. Если магнитный момент электрона представить в виде $\mathfrak{m}_{\text{эл}} = g\mathfrak{m}_{\text{Б}}/2$, то фактор $g/2$ не точно равен 1, как этого требует теория Дирака. Измерения с пучками атомов водорода в основном состоянии привели к результату

$$\frac{1}{2}\,g_{\text{эксп}} = 1{,}0011596524 \pm 20\cdot 10^{-11}.$$

Этот результат находится в хорошем согласии с теоретическим значением

$$\frac{1}{2}\,g_{\text{теор}} = 1{,}0011596522091 \pm 31 \cdot 10^{-11}.$$

Таким образом, по квантовой электродинамике магнитный момент электрона

$$\mathfrak{m}_{\text{эл}} = (1{,}0011596522091 \pm 31 \cdot 10^{-11})\mathfrak{m}_{\text{Б}}.$$

Эта величина называется *аномальным магнитным моментом* электрона.

Метод молекулярных пучков применим только к *нейтральным* частицам, что сужает область его применимости. Действительно, на частицу с зарядом e, движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$, действовала бы сила Лорентца $(e/c)[\mathbf{vB}]$, которая вызвала бы сильное боковое смещение ее, и притом различное для частиц различных скоростей.

Метод магнитного резонанса с использованием нейтральных молекулярных пучков отличается большой точностью. Важное достоинство этого метода состоит в том, что в нем воздействию радиочастотного поля подвергаются *свободные* частицы. Однако в экспериментальном отношении метод очень труден и требует, в частности, специальной вакуумной техники. Поэтому молекулярные пучки применяются сравнительно редко.

7. Широкое распространение получил не менее точный, но более простой в экспериментальном отношении метод магнитного резонанса, в котором используются *макроскопические количества* вещества в твердом, жидком или газообразном состоянии. Атомы, молекулы или ионы такого вещества должны обладать магнитными моментами — электронными или ядерными. При помещении исследуемого образца в сильное постоянное магнитное поле $\mathbf{B}$ в результате междуатомных столкновений спустя короткое время устанавливается состояние равновесия, в котором образец оказывается намагниченным. Это — *электронный* или *ядерный парамагнетизм*, а потому метод и получил название ЭПР или ЯМР.

Частица, магнитный момент которой ориентирован по полю, обладает меньшей энергией, чем такая же частица с магнитным моментом, ориентированным против поля. По формуле Больцмана в состоянии равновесия число первых частиц будет больше, чем вторых. Иными словами, нижние подуровни зеемановского расщепления окажутся заселенными больше, чем верхние.

Оценим разность заселенностей подуровней при комнатной температуре $T = 293$ К в предположении, что магнитный момент частицы равен одному магнетону Бора, $\mathfrak{m} = 9{,}27 \cdot 10^{-21}$ эрг/Гс, а $B = 5 \cdot 10^3$ Гс. Если n_2 — число частиц на верхнем подуровне $\mathcal{E}_2$, а n_1 — на нижнем подуровне $\mathcal{E}_1$, то по формуле Больцмана

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp\frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{kT} \approx 1 + \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{kT} = 1 + \frac{2\mathfrak{m}B}{kT},$$

так что

$$\frac{n_1 - n_2}{n} = \frac{2\mathfrak{m}B}{kT} = 2{,}3 \cdot 10^{-3}.$$

Значит, разность заселенностей двух соседних подуровней составляет всего около 0,2 % от заселенности одного из этих подуровней.

Несмотря на столь ничтожную величину этой разности, она может проявиться макроскопически, поскольку число частиц на каждом подуровне весьма велико. При вынужденном переходе частицы с верхнего подуровня на нижний испускается квант энергии, соответствующий разности энергий этих подуровней. При переходах с нижнего уровня на верхний расходуется энергия радиочастотного поля. Спонтанные переходы с излучением энергии из-за их относительной редкости могут не приниматься во внимание. В результате поглощение энергии будет превалировать над излучением, несмотря на то, что вероятности прямых и обратных переходов одинаковы (см. т. IV, § 119). Такой разностный эффект достигнет максимума при совпадении частоты радиочастотного поля с ларморовской частотой прецессирующей частицы, т. е. при резонансе. В максимуме поглощения энергии радиочастотного поля вблизи ларморовской частоты и проявится магнитный резонанс.

В результате преобладающих переходов частиц с нижних уровней на верхние энергии подуровней начнут выравниваться. Этому препятствуют релаксационные процессы, стремящиеся восстановить первоначальное равновесное состояние. Поэтому, чтобы магнитный резонанс был выражен достаточно резко, необходимо, чтобы период радиочастотных колебаний был мал по сравнению со временем релаксации, в течение которого восстанавливается равновесное состояние.

8. Электронный парамагнитный резонанс был открыт Е. К. Завойским (1907–1976) в 1944 г. Его первые наблюдения были произведены на солях группы железа. В дальнейшем круг изучаемых веществ значительно расширился. Завойский производил свои исследования с радиоволнами дециметрового диапазона, а потому в соответствии с формулой (42.2) пользовался магнитными полями **B** небольшой напряженности. В связи с развитием техники ультракоротких волн позднее в методе ЭПР стали применять радиоволны сантиметрового диапазона.

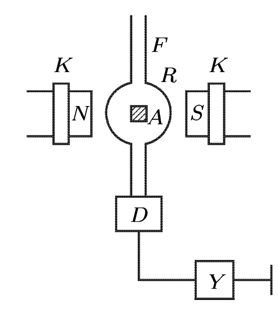


Рис. 78

В современных радиоспектроскопах частоту радиосигнала поддерживают постоянной, а магнитное поле **B** модулируют низкой частотой (50 Гц). Схема радиоспектроскопа показана на рис. 78. Электромагнит NS питается постоянным током и создает сильное постоянное магнитное поле. Это поле модулируется катушками KK, питаемыми переменным током с частотой 50 Гц. Исследуемый образец A объемом в несколько мм^3 помещают в объемный резонатор R, настроенный на длину волны $\lambda \sim 3$ см. Электромагнитные волны такой длины генерируются отражательным клистроном

и подводятся к резонатору R через волновод F. После частичного поглощения в образце A они, также через волновод, поступают к кристаллическому кремний-вольфрамовому детектору D, где детектируются и могут быть усилены. Парамагнитное поглощение может быть обнаружено, если детектор соединить с чувствительным гальванометром. Еще бóльшая чувствительность достигается, если сигнал от детектора, усиленный усилителем Y, развернуть на экране осциллографа (не указанного на рис. 78). Сигнал подается на вертикально отклоняющие пластины осциллографа. Горизонтальное отклонение фиксирует мгновенное значение магнитного поля **B**. Это отклонение должно быть сфазировано с модуляцией магнитного поля **B** . На экране осциллографа получается кривая парамагнитного поглощения вещества, аналогичная кривой рис. 77. Современные радиоспектроскопы при нормальной температуре позволяют обнаруживать ЭПР в образцах, содержащих до 10^{11}–10^{12} парамагнитных частиц.

9. Ядерный магнитный резонанс с поглощением коротких радиоволн макроскопическими количествами вещества впервые наблюдали в конце 1945 г. Парселл (р. 1912), Торри и Паунд (р. 1919) и независимо от них Блох (р. 1905), Хансен (1909–1949) и Пакард. Хотя в принципиальном отношении ядерный магнитный резонанс и не отличается от электронного, для его экспериментального исследования из-за большого различия в длинах волн высокочастотного электромагнитного поля требуется несколько изменить метод исследования. Идея одной из возможных экспериментальных схем понятна из схематического рис. 79. Главная особенность состоит в том, что исследуемый образец A помещается в катушку, последовательно соединенную с катушкой колебательного контура генератора высокой частоты. Электромагнит NS, питаемый постоянным током, создает сильное постоянное магнитное поле. Для создания перпендикулярного модулирующего магнитного поля применяется дополнительная катушка K, питаемая переменным током с частотой 50 Гц. При наступлении резонанса увеличивается поглощение высокочастотного электромагнитного поля. Это проявляется в уменьшении добротности колебательного контура генератора и даже в срыве генерации. Высокочастотный сигнал, появляющийся во внешней цепи, индуктивно связанной с колебательным контуром генератора, детектируется и усиливается усилителем Y. Затем получается его развертка, совершенно так же, как при исследовании ЭПР.

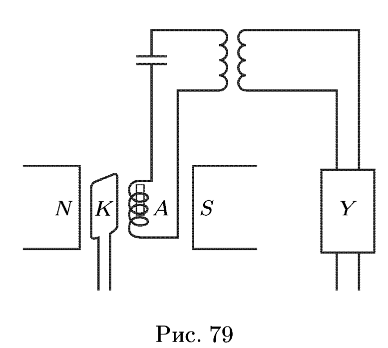


Рис. 79

10. В заключение заметим, что, помимо электронного и ядерного парамагнитных резонансов, различают также *ферромагнитный резонанс*, связанный с изменением ориентации электронных магнитных

моментов внутри доменов или между доменами ферромагнетика, а также *антиферромагнитный резонанс*, связанный с изменением ориентации спиновых магнитных моментов в антиферромагнетике. Частным случаем последнего резонанса является *ферримагнитный резонанс* — резонанс, происходящий в ферримагнетиках, т. е. антиферромагнетиках с неполностью компенсированными противоположно направленными магнитными моментами спинов решетки, а потому обладающими ферромагнитными свойствами. Ограничимся еще упоминанием, что к магнитному резонансу иногда формально причисляют *диамагнитный (циклотронный) резонанс*, имеющий, однако, совершенно иную физическую природу.

§ 43. Эффект Штарка

1. Явление Штарка (1874–1957) состоит в том, что при наложении электрического поля энергетические уровни атомов, молекул и кристаллов смещаются и расщепляются на подуровни. Это проявляется в расщеплении и смещении спектральных линий в спектрах испускания и поглощения указанных тел. Об этом явлении уже кратко говорилось в т. IV, § 93. Там указывалось, какие экспериментальные трудности возникают при наблюдении явления и как Штарку удалось их преодолеть. Штарк открыл явление, названное его именем, а затем подробно исследовал его на спектральных линиях серии Бальмера водорода. Впоследствии явление Штарка было обнаружено и на других атомах.

Уже с самого начала было выяснено, что классическая теория не в состоянии объяснить явление Штарка. Теория явления Штарка, основанная на полуклассической теории Бора, была независимо построена К. Шварцшильдом (1874–1916) и П. С. Эпштейном (1886–1966) в 1916 г. Их основные результаты были подтверждены в последовательно квантовомеханической теории, развитой Шредингером в 1926 г. В обеих теориях используются вычислительные методы теории возмущений, развитые в небесной механике Лагранжем (1736–1813), Лапласом (1749–1827) и др., а затем модернизированные применительно к задачам квантовой механики. Вычисления довольно сложны и не могут быть здесь воспроизведены. Можно ограничиться только некоторыми качественными соображениями и окончательными результатами При этом мы ограничимся штарк-эффектом только на атомах, а электрическое поле $\mathbf{E}$ будем предполагать однородным.

2. Уже из простых классических соображений легко понять, какую следует ожидать поляризацию компонент, на которые расщепляются спектральные линии при помещении источника света во внешнее электрическое поле $\mathbf{E}$. В электрическом поле частота колебаний элементарного источника света (электрона) зависит от того, совершаются ли колебания вдоль поля $\mathbf{E}$ или перпендикулярно к нему. Во всех случаях в наблюдаемом свете ввиду его поперечности возможны только колебания, перпендикулярные к линии наблюдения. Если линия наблюдения сама перпендикулярна к полю $\mathbf{E}$, то колебания, удовлетворяющие этому условию, могут происходить как по полю $\mathbf{E}$, так и перпендикулярно к нему. Они, вообще говоря, происходят с различными частотами, а потому в наблюдаемом спектре все линии окажутся поляризованными линейно: часть линий будет поляризована вдоль поля $\mathbf{E}$ (π-компоненты), а остальная часть перпендикулярно к нему (σ-компоненты).

Если же линия наблюдения направлена вдоль поля $\mathbf{E}$, то все колебания, сопровождающиеся излучением света, направлены только перпендикулярно

к $\mathbf{E}$. Поэтому в наблюдаемом спектре могут появиться только σ-компоненты. Все они будут неполяризованы, поскольку сила, действующая со стороны электрического поля $\mathbf{E}$ на колеблющийся электрон, не зависит от величины и направления скорости движения последнего. В этом существенное отличие электрического поля от магнитного. Сила, действующая на электрон со стороны магнитного поля, пропорциональна его скорости $\mathbf{v}$ и меняет свое направление на противоположное с изменением на противоположное направления скорости $\mathbf{v}$. Поэтому-то она и изменяет угловые скорости круговых вращений электрона, на которые можно разложить его колебательное движение. Это изменение зависит от направления вращения электрона, с чем и связан продольный эффект Зеемана. В случае электрического поля подобного изменения нет, а потому компоненты штарковского расщепления при продольном наблюдении оказываются *неполяризованными*. При наблюдении же под углом к полю $\mathbf{E}$ эти компоненты окажутся поляризованными *частично*.

3. Явление Штарка выглядит по-разному в зависимости от того, имеется у атома (в отсутствие электрического поля $\mathbf{E}$) дипольный электрический момент $\mathbf{p}$ или не имеется. В первом случае при наложении электрического поля $\mathbf{E}$, если ограничиться линейными по полю членами, атом получает дополнительную энергию $(-\mathbf{pE})$, пропорциональную первой степени электрического поля. Смещение и расщепление спектральных линий получатся также пропорциональными первой степени электрического поля. Такой эффект и был обнаружен Штарком.

Во втором случае у атома нет собственного электрического момента. В электрическом поле возбуждается лишь *индуцированный дипольный момент* $\mathbf{p} = \beta\mathbf{E}$, где β — поляризуемость атома, которая может быть вычислена методами квантовой механики. При увеличении электрического поля от 0 до $\mathbf{E}$ дипольный момент атома также увеличивается от 0 до $\mathbf{p}$. При этом над атомом совершается работа $(\mathbf{pE})/2 = \beta E^2/2$, которая идет на приращение потенциальной энергии атома в электрическом поле. (Коэффициент 1/2 появляется по той же причине, что и в аналогичном случае при вычислении потенциальной энергии упруго деформированного тела, подчиняющегося закону Гука.) Смещение и расщепление спектральных линий окажутся пропорциональными E^2. Эффект Штарка в этом случае называется *квадратичным*. Он, разумеется, много меньше линейного эффекта, почему и был обнаружен позднее.

Конечно, атом с собственным дипольным моментом в электрическом поле получает и добавочный дипольный момент. В первом приближении этот добавочный момент можно считать пропорциональным полю. Тогда получится наложение *линейного* и *квадратичного* эффектов Штарка. Картина расщепления уровней окажется несимметричной: все подуровни будут смещены в сторону более низких энергий, и тем сильнее, чем выше они расположены. Сами линии окажутся смещенными в красную сторону спектра. Это смещение невелико. Например, для одной из штарковских компонент линии H_α оно составляет примерно 1 см$^{-1}$, тогда как расстояние между крайними штарковскими компонентами этой линии составляет 200 см$^{-1}$ [1]).

В полях, не превышающих 10^5 В/см, квадратичным эффектом Штарка в водороде можно полностью пренебречь. Квадратичный член $\sim E^2$ в водороде начинает сказываться только при более сильных полях. В полях, превышающих примерно $4 \cdot 10^5$ В/см, проявляется и член третьей степени

[1]) Так как $1/\lambda = v/c$, то 1 см$^{-1} = 3 \cdot 10^{10}$ Гц $= 3 \cdot 10^4$ МГц.

$\sim E^3$, который также вычислен наряду с членом $\sim E^2$. С учетом этих членов теория хорошо согласуется с опытом в самых сильных электрических полях, вплоть до полей порядка 10^6 В/см, которых удалось достигнуть в настоящее время.

4. Причина, по которой в водороде, его изотопах (дейтерий и тритий) и водородоподобных ионах эффект Штарка *линейный*, состоит в том, что в этих случаях электрическое поле ядра, в котором движется электрон, *кулоновское*. В кулоновском же поле энергетические уровни электрона вырождены по l. Все состояния одноэлектронного атома с одним и тем же значением главного квантового числа n, отличающиеся значением l, в этом случае обладают *одной и той же энергией*. При этом состояния, суперпозицией которых получается любое состояние с заданным n, уже *в отсутствие внешнего электрического поля* обладают *собственными дипольными электрическими моментами*. При наложении внешнего электрического поля вырождение (частично) снимается, и энергетические уровни, соответствующие различным состояниям, испытывают разные смещения. Но все эти смещения и связанное с ними расщепление спектральных линий пропорциональны полю E, почему эффект Штарка и получается *линейным*.

В случае более сложных атомов и ионов с одним валентным электроном атом может рассматриваться также как одноэлектроная система. Однако в этом случае поле ядра, в котором движется электрон, искажено внутренними электронными оболочками, а потому уже не является кулоновским. В таком поле вырождения по l нет. Более подробное исследование показывает, что в каждом из состояний, характеризуемых квантовыми числами n и l, средний собственный электрический момент атома равен нулю. Поэтому при наложении поля расщепление уровней начинается с членов, квадратичных по полю E. Эффект Штарка оказывается *квадратичным*.

5. Обращаемся к рассмотрению эффекта Штарка в водороде. При этом не будем учитывать спин электрона, т. е. будем пренебрегать спин-орбитальным взаимодействием. В этом приближении задача сводится к решению уравнения Шредингера с учетом потенциальной энергии атома во внешнем электрическом поле. В этом случае задача обладает *цилиндрической симметрией*, причем ось симметрии направлена параллельно электрическому полю. Сферические координаты r, θ, φ хорошо приспособлены для решения задач в полях, обладающих сферической симметрией, но неудобны в случае цилиндрической симметрии. В этом случае более удобны так называемые *параболические координаты*, обладающие нужной симметрией. Решение уравнения Шредингера для атома водорода приводит к результату, что в постоянном электрическом поле энергетический уровень с главным квантовым числом n распадается на $2n - 1$ подуровней. Переходы между этими подуровнями, подчиняющиеся правилам отбора, и определяют компоненты, на которые расщепляются спектральные линии водорода при наложении электрического поля.

При наличии внешнего электрического поля закон сохранения момента количества движения, вообще говоря, не имеет места. Однако в постоянном однородном электрическом поле должна сохраняться *проекция момента количества движения* на направление электрического поля. Поэтому в этом случае сохраняют силу и правила отбора по магнитному квантовому числу m_l, определяющему указанную проекцию (спин s, как сказано выше, не учитывается). При $\Delta m_l = 0$ возникает π-компонента, а при $\Delta m_l = \pm 1$ σ-компоненты. Эти правила отбора и определяют возможные переходы.

Простейшей является картина расщепления водородных линий серии Лаймана. Линии этой серии получаются при переходах с вышележащих

уровней на уровень $n = 1$, который не расщепляется ($2n - 1 = 1$). Уровень $n = 2$ расщепляется на $2n - 1 = 3$ подуровня. Переходы с этих подуровней на уровень $n = 1$ дают три компоненты, на которые расщепляется линия L_α водорода. Эти переходы изображены на рис. 80. Уровни $n = 3$ и $n = 4$ расщепляются соответственно на $2n - 1 = 5$ и $2n - 1 = 7$ подуровней. При переходах с них на уровень $n = 1$ возникают компоненты, на которые расщепляются линии L_β и L_γ. Картина расщепления представлена на схематическом рис. 81. Здесь π-компоненты изображены жирными линиями, отложенными вверх, а σ-компоненты — такими же линиями, отложенными вниз. Длины этих линий показывают относительные интенсивности спектральных компонент, возникающих при наложении электрического поля. Заметим, что в случае L_β центральная компонента отсутствует, так что линия L_β расщепляется на 4 компоненты. Линия L_γ расщепляется на 7 компонент, из которых четыре являются π-, а три σ-компонентами. Приведенные теоретические результаты подтверждаются

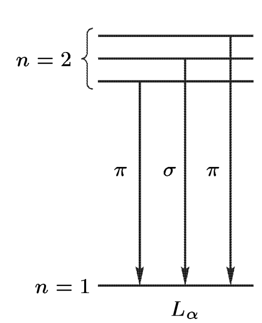
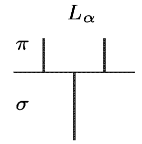
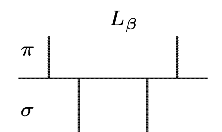


Рис. 80





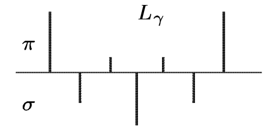


Рис. 81

опытами, которые, разумеется, должны выполняться с вакуумной спектральной аппаратурой (ультрафиолет!).

Несколько сложнее расщепляются спектральные линии серии Бальмера водорода. В этом случае переходы совершаются на три подуровня расщепившегося уровня $n = 2$. Ближайший уровень $n = 3$ расщепляется на 5 подуровней. В результате бальмеровская линия H_α, возникающая при переходах с уровня $n = 3$ на уровень $n = 2$, расщепляется на 15 компонент, как это видно из рис. 82. Линия H_β расщепляется на 20 компонент, линия H_γ — на 27, линия H_δ — на 32 и т. д. (Центральные компоненты при расщеплении H_β, H_δ не появляются, с чем и связано уменьшение числа компонент соответственно с 21 до 20 и с 33 до 32.) Расщепление линий H_α и H_β при эффекте Штарка, предсказываемое теорией (согласующейся с опытом), показано на рис. 83. Аналогично расщепляются линии H_γ, H_δ, ...

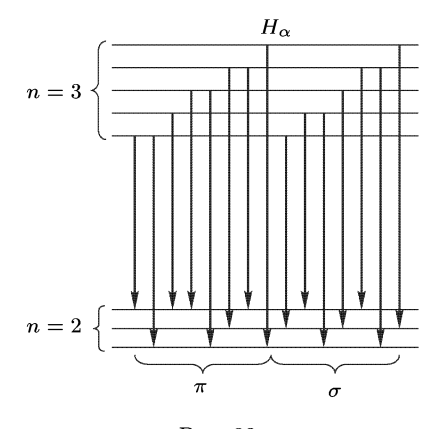


Рис. 82

6. Описанная картина штарковского расщепления получается, если *не учитывать спин электрона*, т. е. пренебречь *тонкой структурой* спектраль-

ных линий. Это можно делать, когда штарковское расщепление значительно превосходит ширину тонкой структуры спектральной линии. В полях порядка десятков тысяч В/см и выше тонкая структура практически не играет роли. Такие электрические поля (как и в случае магнитных полей в эффекте

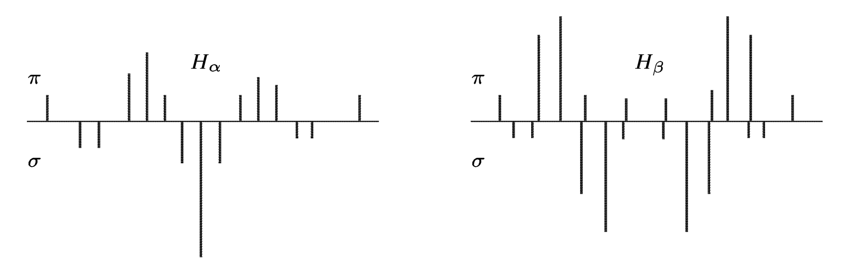


Рис. 83

Зеемана) можно назвать *сильными*. Когда же штарковское расщепление становится сравнимым или меньше ширины тонкой структуры, то электрическое поле называют *слабым*. Таким образом, приведенные выше результаты относятся к *сильным* (в указанном смысле) электрическим полям. В слабых полях эффект Штарка осложняется *тонкой структурой*.

§ 44. Лэмбовский сдвиг уровней атомных электронов

1. В § 38 указывалось, что, согласно релятивистской квантовой теории Дирака, энергии водородных и водородоподобных атомов и ионов с одинаковыми квантовыми числами n и j должны *точно совпадать* независимо от того, каково значение квантового числа l. При заданном j число l может принимать значения $j - 1/2$ и $j + 1/2$ в зависимости от того, как ориентирован спин электрона. Так, главному квантовому числу $n = 2$ (нижний терм водородной серии Бальмера) соответствуют три уровня $2s_{1/2}$, $2p_{1/2}$ и $2p_{3/2}$. Два первых уровня по теории Дирака должны совпадать, так как они имеют одно и то же квантовое число $j = 1/2$.

Действительно ли совпадают уровни $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ — этот вопрос пытались решить методами оптической спектроскопии, изучая тонкую структуру водородной линии H_α, возникающую при переходах с уровней с главным квантовым числом $n = 3$ на уровни с $n = 2$. Однако результаты получались противоречивыми. Одни исследователи находили полное согласие наблюдаемой тонкой структуры с теорией Дирака, тогда как другие приходили к результату, что уровни $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ смещены относительно друг друга приблизительно на величину порядка 0,03 см$^{-1}$ или около 1000 Гц. Эта величина примерно в 10 раз меньше расстояния между указанными уровнями и лежащим выше уровнем $2p_{3/2}$. Трудность исследования тонкой структуры состояла в исключительной близости спектральных линий, обладавших довольно большой шириной. Наблюдавшееся небольшое несовпадение уровней

$2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ лежало в пределах экспериментальных ошибок. Вопрос был решен в 1947 г. Лэмбом (р. 1913) и Ризерфордом (р. 1912) *методами радиоспектроскопии*. Ожидаемые смещения уровней $\sim$ 1000 Гц лежат в области сверхвысоких частот (СВЧ), где можно воспользоваться методами радиоспектроскопии, а последние позволяют обеспечить точность измерений до 1 Гц.

2. Идея опыта Лэмба и Ризерфорда основана на том, что возбужденный уровень $2p_{1/2}$ является нестабильным, а возбужденный уровень $2s_{1/2}$ — метастабильным. Время жизни на уровне $2s_{1/2}$ примерно в 10^8 раз больше, чем на уровне $2p_{1/2}$. Действительно, радиационный переход с уровня $2p_{1/2}$ на невозбужденный уровень $1s_{1/2}$ с испусканием одного фотона *разрешен правилом отбора* $\Delta l = \pm 1$. Переход же с уровня $2s_{1/2}$ на уровень $1s_{1/2}$ *запрещен*, поскольку при этом $\Delta l = 0$. Такой переход возможен только с испусканием *двух фотонов*, а потому он совершается примерно в 10^8 раз медленнее, чем переход $2p_{1/2} \to 1s_{1/2}$. По сравнению с переходом $2s_{1/2} \to 1s_{1/2}$ переход $2p_{1/2} \to 1s_{1/2}$ происходит примерно в 10^8 раз быстрее, т. е. практически мгновенно.

В опытах Лэмба и Ризерфорда молекулы водорода диссоциировались под действием высокой температуры в печи K (рис. 84). В результате получался пучок атомов водорода в основном состоянии $1s_{1/2}$, направлявшийся на металлическую пластинку (мишень) P, соединенную с гальванометром. Поскольку атомы пучка не были возбуждены, они не могли передавать энергию электронам мишени P. Вырывания электронов из мишени не происходило, и гальванометр не обнаруживал электрического тока.

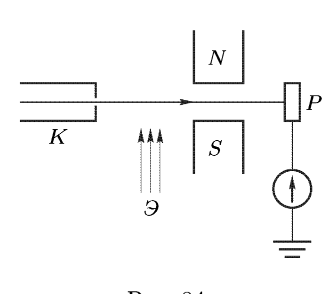


Рис. 84

Но часть атомов (примерно одну стомиллионную) можно было перевести в возбужденные состояния $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$, заставив пучок атомов пересекать электронный пучок Э. Возбуждение атомов производится ударами электронов, так что правила отбора при излучении *не действуют*. Энергия возбуждения составляет 10,2 эВ. Атомы в состоянии $2p_{1/2}$ на мишень P не попадают, так как они практически мгновенно переходят в основное состояние $1s_{1/2}$. На мишень из возбужденных атомов могут попасть только атомы в состоянии $2s_{1/2}$. Энергию возбуждения они при столкновениях передают электронам мишени P, вырывая последние из мишени. Гальванометр начинает показывать ток, по величине которого можно судить о числе атомов в метастабильном состоянии $2s_{1/2}$, попадающих на мишень.

Если теперь на пути пучка атомов водорода включить циклически меняющееся магнитное поле надлежащей частоты, то в случае несовпадения уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ начнутся вынужденные переходы между ними (см. § 42, п. 2). Они будут происходить с максимальной скоростью

при резонансе, когда частота внешнего магнитного поля будет соответствовать разности энергий между рассматриваемыми уровнями. Перейдя из состояния $2s_{1/2}$ в состояние $2p_{1/2}$, атом почти мгновенно возвращается в невозбужденное состояние $1s_{1/2}$. Поэтому число возбужденных атомов в состоянии $2p_{1/2}$, попадающих на мишень, начинает убывать. Вместе с тем начинает убывать и ток через гальванометр. По минимуму тока можно определить резонансную частоту поля, а с ней и разность уровней $2s_{1/2} - 2p_{1/2}$ [1]).

Опыты Лэмба и Ризерфорда доказали, что уровни $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ не совпадают между собой. Разность между ними по частотам составляет для водорода 1057,90 ± 0,06 МГц. Эта разность (как и вообще разность между уровнями тонкой структуры с одинаковыми n и j, но различными l) называется *лэмбовским сдвигом.* Взаимное расположение уровней $2s_{1/2}$, $2p_{1/2}$ и $2p_{3/2}$ с указанием расстояний между ними для водорода приведено на рис. 85. Лэмбовский сдвиг очень мал — он примерно в 10 раз меньше расстояния между уровнями тонкой структуры $2p_{3/2}$ и $2s_{1/2}$. Тем не менее это очень важное явление, теоретически истолкованное в квантовой электродинамике. Последняя дает для лэмбовского сдвига в случае водорода 1057,91 ± 0,01 МГц, что находится в превосходном согласии с экспериментальным значением, приведенным выше. Столь же превосходное согласие получается для дейтерия и однократно ионизованных атомов гелия.

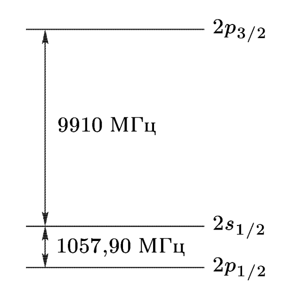


Рис. 85

3. Заметим, что лэмбовский сдвиг позволяет судить о точности, с которой оправдывается закон Кулона на расстояниях порядка атомных (10^{-8} см). Предположим, что истинный закон имеет вид $E \sim 1/r^{2\pm\gamma}$. Предположим далее, что $|\gamma| = 10^{-9}$. Тогда вычисления привели бы к изменению лэмбовского сдвига $2s_{1/2} - 2p_{1/2}$ на величину, бóльшую существующей ошибки измерения. На основании этого можно заключить, что на атомных расстояниях $|\gamma|$ не может быть больше 10^{-9} (ср. т. III, § 6, п. 4). На самом деле отступления от закона Кулона при взаимодействии электрона с ядром начинаются тогда, когда включаются ядерные силы. Для случая же, когда у взаимодействующих частиц ядерные взаимодействия отсутствуют (электроны и позитроны), закон Кулона в настоящее время проверен на ускорителях со встречными пучками до расстояний $\sim 10^{-16}$ см.

---

[1]) Уровень $2p_{1/2}$ оказался лежащим ниже уровня $2s_{1/2}$. Поэтому возможны переходы $2s_{1/2} \to 2p_{1/2}$ и в отсутствие внешнего поля. Однако так как расщепление мало, а вероятность перехода пропорциональна кубу расстояния между уровнями, то эта вероятность крайне мала (соответствующее время жизни — порядка нескольких лет). Поэтому указанный переход можно не принимать во внимание.

§ 45. Физический вакуум и объяснение лэмбовского сдвига

1. Лэмбовский сдвиг был объяснен и рассчитан Бете (р. 1908) в квантовой электродинамике. Поскольку последняя нами не излагалась, в нашем курсе можно дать только качественное представление о теории лэмбовского сдвига.

Предварительно необходимо остановиться на вопросе о *физическом вакууме* и *виртуальных частицах* — важнейших понятиях квантовой теории поля. Согласно квантовой теории поля вакуум не есть абсолютная «пустота», в которой ничего нет. Вакууму присущи многие физические свойства, и он может находиться в различных физических состояниях. Поэтому-то он и получил почетное название «физического вакуума». В отличие от гипотетического эфира XIX века, которому приписывались механические свойства, принципиально не отличающиеся от механических свойств обычных материальных сред, современная физика пытается устанавливать свойства физического вакуума только на основе твердо установленных экспериментальных фактов и проверенных опытом физических теорий. Никаких механических свойств физическому вакууму не приписывается.

Строго говоря, следует различать не один вакуум, а несколько, в зависимости от того, с какими частицами и полями он связан. Так, электромагнитное поле, или поле фотонов, может отдавать свою энергию квантами величиной $h\nu$. При каждой такой отдаче число фотонов уменьшается на единицу. В результате последовательности таких процессов в конце концов возникает состояние, в котором число квантов в системе равно нулю. Однако, в отличие от классических представлений, электромагнитное поле при этом не исчезает, а переходит в состояние с наименьшей энергией, отнять которую от поля уже нельзя. Это заключение является следствием существования нулевой энергии, т. е. в конце концов принципа неопределенностей. Состояние электромагнитного поля с наименьшей возможной энергией, в котором фотонов нет, называется *вакуумным состоянием электромагнитного поля* или *фотонным вакуумом*. Электромагнитное поле в вакуумном состоянии не может быть поставщиком энергии, но из этого не следует, что оно вообще никак не может проявить себя. Оно может быть причиной различных наблюдаемых физических явлений, как об этом уже упоминалось выше и подробнее будет сказано дальше.

Аналогично и для других частиц вводится представление о вакууме как о низшем энергетическом состоянии поля соответствующих частиц. Так, различают *электронно-позитронный вакуум*, где такими частицами являются электрон и позитрон, отличающиеся друг от друга только знаками электрических зарядов. Существует *вакуум π-мезонов* и т. д. При рассмотрении взаимодействия полей вакуумом можно назвать низшее энергетическое состояние всей системы этих полей.

Если полю, находящемуся в вакуумном состоянии, сообщить достаточную энергию, то происходит его возбуждение, т. е. рождение частицы — кванта этого поля. Так, в вакууме происходит, например, рождение электронно-позитронных пар. Рождение частицы можно описать как переход из «ненаблюдаемого» вакуумного состояния в состояние реальное.

2. Согласно современным представлениям взаимодействие между частицами осуществляется посредством обмена какими-то другими частицами, которым соответствует свой вакуум. Так, электромагнитное взаимодействие между электрически заряженными частицами осуществляется посредством электромагнитного вакуума. Один электрический заряд испускает фотон, поглощаемый другим зарядом, который в свою очередь испускает фотон, поглощаемый первым зарядом. Таким образом, между зарядами происходит обмен фотонами. В результате этого изменяется нулевое (т. е. невозбужденное) состояние вакуума, что по современным представлениям проявляется в силе взаимодействия между частицами, обменивающимися фотонами. Аналогично, до недавнего времени считалось, что взаимодействие между нуклонами (протонами и нейтронами) осуществляется посредством вакуума π-мезонов. Один из нуклонов испускает π-мезон, а другой его поглощает, и наоборот. Со времени принятия кварковой модели ядерные силы сводят к взаимодействию кварков.

Изложенные представления о взаимодействии на первый взгляд находятся в противоречии с тем, что утверждалось в п. 5 § 1. Будем для конкретности иметь в виду взаимодействие электрических зарядов, хотя все сказанное ниже будет относиться и ко всем другим типам взаимодействий. Пока взаимодействие не началось, каждая из частиц является свободной, а свободная частица ни испустить, ни поглотить квант не может. В противном случае в процессах испускания и поглощения кванта нарушался бы либо закон сохранения энергии, либо закон сохранения импульса. Однако приведенное утверждение относится к испусканию истинных частиц. Взаимодействие же осуществляется не реальными, а *виртуальными частицами*, и приведенное выше противоречие устраняется. Поэтому в предыдущем абзаце точнее надо было бы везде говорить не просто о частицах, обменом которых осуществляется взаимодействие, а о виртуальных частицах.

Виртуальные частицы существуют только в промежуточных состояниях и притом очень короткое время, что препятствует экспериментальной регистрации их. Но время существования виртуальной частицы Δt связано с неопределенностью ее энергии соотношением $\Delta t\ \Delta\mathscr{E} \geqslant \hbar$. Аналогично $\Delta x \Delta p \geqslant \hbar$. При наличии этих соотношений неопределенности законы сохранения энергии уже не препятствуют более испусканию квантов истинными свободными частицами, если только эти кванты имеют энергию $\Delta\mathscr{E}$ и существуют в течение промежутка времени $\Delta t \sim \hbar/\Delta\mathscr{E}$. Можно сказать, что виртуальная частица есть такая частица, для которой не выполняется обычная классическая связь между энергией и импульсом $\mathscr{E}^2 = (pc)^2 + m_0^2c^4$.

3. За время Δt естественно принять продолжительность акта обмена между взаимодействующими частицами. Если принять далее, что взаимодействие распространяется с максимальной скоростью c, то $\Delta t = L/c$, где L — радиус переносимого взаимодействия. Поэтому энергия кванта $\Delta\mathscr{E} = m_0 c^2 = \hbar c/L$, где m_0 — масса покоя кванта. Отсюда

$$L = \frac{\hbar}{m_0 c}. \tag{45.1}$$

Чем больше масса m_0 кванта, переносящего взаимодействие, тем короче радиус действия соответствующих сил. Значение этого факта мы рассмотрим ниже. Отметим только, что для фотона $m_0 = 0$. Поэтому радиус действия кулоновских сил бесконечен.

Таким образом, принцип неопределенности вынуждает принять, что каждая заряженная частица окружена облаком испускаемых и поглощаемых виртуальных фотонов. Другие частицы окружены также соответствующими квантами, переносящими взаимодействие. Такая картина соответствует воззрениям Фарадея и Максвелла о недопустимости непосредственного действия на расстоянии. Для взаимодействия необходимо наличие промежуточного агента. Однако конкретное представление, что таким агентом является классический непрерывный эфир, безнадежно устарело и может быть сохранено только ради исторического интереса.

4. Вакуум является суперпозицией нулевых колебаний поля, т. е. состояний с виртуально возникающими и исчезающими виртуальными фотонами, виртуальными электронно-позитронными парами, а также другими парами частиц и античастиц. Эти виртуальные частицы взаимодействуют между собой и с истинными частицами. Так, возникший виртуальный фотон может породить электронно-позитронную пару. При аннигиляции последней возникнут новые виртуальные фотоны, и т. п. Во внешнем электрическом поле, например в поле атомного ядра, виртуальные электроны и позитроны располагаются неравномерно. Виртуальные позитроны смещаются преимущественно в направлении электрического поля, виртуальные электроны — против электрического поля. В результате во внешнем электрическом поле возникает явление, называемое *поляризацией вакуума*. Это явление аналогично обычной поляризации диэлектриков во внешнем поле. Только в диэлектриках речь идет о смещении истинных электрических зарядов, а в вакууме — о смещении виртуальных.

5. Теперь можно обратиться к объяснению лэмбовского сдвига. Основной вклад ($\sim \alpha^3 R$, где α — постоянная тонкой структуры, R — постоянная Ридберга) вносят два вакуумных эффекта (называемых иначе *радиационными поправками*). Во-первых, испускание и поглощение связанным электроном виртуальных фотонов, что приводит у него к изменению эффективной массы и появлению аномального магнитного момента. Во-вторых, поляризация вакуума, т. е. рождение и аннигиляция в вакууме виртуальных электронно-позитронных пар, что искажает кулоновский потенциал ядра на расстояниях порядка

комптоновской длины волны электрона ($\sim 10^{-11}$ см). Поскольку комптоновская длина волны электрона много меньше среднего радиуса боровских орбит в водороде, лэмбовский сдвиг в водороде вызывается преимущественно первой причиной (изменением эффективной массы электрона). Поляризация вакуума приводит к одинаковому для всех уровней сдвигу. Вклад поляризации вакуума в величину лэмбовского смещения уровней незначителен (в водороде $\approx 3\,\%$ общего смещения для основного уровня).

По теории, согласующейся с опытом, лэмбовский сдвиг уровня пропорционален четвертой степени атомного номера и обратно пропорционален третьей степени главного квантового числа.

Следующее простое рассуждение поясняет влияние главного квантового числа на сдвиг уровней. Образно говоря, s-электрон проводит основную часть времени вблизи ядра, где электрическое поле сильное и резко неоднородное, а p-электрон в среднем находится на более далеких расстояниях, где поле слабее и менее неоднородно. С другой стороны, взаимодействие с вакуумом (испускание и поглощение виртуальных фотонов) как бы раскачивает (трясет) электрон. На классическом языке орбита электрона не плавная кривая (например, круговая), а извилистая. Электрон то удаляется от ядра, то приближается к нему, и притом хаотически. Потенциальная энергия в поле ядра $U \sim 1/r$. При увеличении r на Δr энергия U меняется на величину

$$\Delta U \sim \frac{1}{r+\Delta r} - \frac{1}{r} = -\frac{\Delta r}{r(r+\Delta r)},$$

при уменьшении r — на величину

$$\Delta U' \sim \frac{\Delta r}{r(r-\Delta r)},$$

что по абсолютной величине больше ΔU. Это значит, что вакуумное дрожание электрона меняет знак изменения его потенциальной энергии U. Особенно велико изменение потенциальной энергии вблизи ядра, где U велика и резко меняется с расстоянием. Таким образом, вакуумные добавки к полной энергии $\mathscr{E}$ больше для s-электронов, чем для p-электронов. Это в основном и раздвигает энергии s- и p-электронов, которые без этого совпадали бы (если не учитывать сдвиг уровней, вызываемый поляризацией вакуума).

Глава VI

АТОМНЫЕ СИСТЕМЫ СО МНОГИМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

§ 46. Принцип тождественности одинаковых частиц. Принцип Паули

1. В отличие от макроскопических тел, однотипные частицы микромира (электроны, протоны, нейтроны, все так называемые элементарные частицы, атомы и пр.) обладают *совершенно одинаковыми* свойствами: у них одинаковы масса, электрический заряд, спин и пр. В связи с этим возникает вопрос, как отличить одну частицу от другой такой же частицы. Возьмем в качестве примера систему, состоящую из двух электронов. В некоторый момент времени (принимаемый за начальный) отметим положение обоих электронов, снабдив один из них номером 1, а другой номером 2. С классической точки зрения электрон движется по определенной траектории, так что принципиально возможно проследить за движением каждого из рассматриваемых электронов. Обнаружив электрон в какой-то последующий момент времени, можно в принципе сказать, будет ли это электрон 1 или электрон 2. Поменяв местами и скоростями оба электрона, мы получим *новое состояние* системы. Во всех отношениях оно обладает теми же свойствами, что и исходное состояние, но отличается от него нумерацией электронов. С изложенной точки зрения одинаковые частицы *принципиально различимы* или *индивидуализированы.*

Совсем иначе обстоит дело с точки зрения квантовой механики, отвергающей классическое представление о движении частицы по траектории. Состояние системы частиц описывается в квантовой механике волновой функцией, которой дается вероятностное истолкование. В нашем примере она является функцией времени и координат обоих электронов. Обнаружив в какой-то момент времени один из электронов, *принципиально невозможно* решить, будет ли это электрон 1 или электрон 2. Невозможность принципиального решения того или иного вопроса означает, что самый вопрос поставлен *неправильно.* К таким искусственно поставленным вопросам с точки зрения квантовой механики относится и разбираемый нами вопрос о различении двух одинаковых частиц. Если две одинаковые частицы поменять местами, то результат такого обмена *никак нельзя обнаружить экспериментально.* От всякой теории естественно требовать, чтобы два состояния, принципиально неразличимые никакими опытами, она рассматривала как *одно и то же состояние.* Именно так поступает квантовая механика, которая принимает, что при перестановке двух одинаковых частиц не возникает нового состояния системы: оно остается абсолютно тем же, что и до

перестановки. Одинаковые частицы *принципиально неразличимы* или *обезличены*. Можно говорить о состоянии системы одинаковых частиц *только в целом*, а не о состоянии каждой частицы в отдельности. Это положение можно формулировать в виде *принципа тождественности одинаковых частиц*:

в системе одинаковых частиц реализуются только такие состояния, которые не меняются при перестановке местами двух любых частиц.

Этот принцип в квантовой механике является существенно новым, т. е. логически не вытекает из остальных основных положений ее, но можно доказать, что он не противоречит им. Его следует принять, поскольку он подтверждается всей совокупностью опытных фактов.

2. Состояние системы частиц в квантовой механике характеризуется волновой функцией. Какие же волновые функции допустимы, т. е. удовлетворяют принципу тождественности одинаковых частиц? Для решения этого вопроса достаточно ограничиться рассмотрением системы из двух одинаковых частиц. От зависимости волновой функции от времени t можно отвлечься и писать ее в виде $\psi(q_1, q_2)$. В случае бесспиновых частиц под q_1 следует понимать совокупность трех пространственных координат первой частицы, а под q_2 второй. Если же частица обладает спином, то к тройке пространственных координат следует еще добавить *спиновые координаты*, которые могут принимать дискретный ряд значений. Например, в случае электронов проекция спина может принимать два значения: $+1/2$ и $-1/2$. Эти значения в рассматриваемом случае и являются спиновыми координатами.

Переставив теперь местами частицы 1 и 2, получим функцию $\psi(q_2, q_1)$. Эту операцию можно рассматривать как действие на функцию $\psi(q_1, q_2)$ линейного оператора $\widehat{P}$, называемого *оператором перестановки*:

$$\psi(q_2, q_1) = \widehat{P}\psi(q_1, q_2).$$

Переставив рассматриваемые частицы вторично, получим исходную функцию

$$\psi(q_1, q_2) = \widehat{P}\psi(q_2, q_1) = \widehat{P}^2\psi(q_1, q_2).$$

Отсюда $\widehat{P}^2 = 1$, а потому $\widehat{P} = \pm 1$. Значит, допустимы волновые функции двух типов:

$$\psi_s(q_1, q_2) = \psi_s(q_2, q_1) \tag{46.1}$$

и

$$\psi_a(q_1, q_2) = -\psi_a(q_2, q_1) \tag{46.2}$$

В первом случае волновая функция при перестановке частиц не изменяется. Она называется *симметричной*, а потому и снабжается индексом s. Во втором случае функция называется *антисимметричной* и снабжается индексом a. Антисимметричная функция при перестановке одинаковых частиц меняет знак.

Полученные результаты обобщаются и для систем, состоящих из какого угодно числа одинаковых частиц. В этом случае, как показывает опыт, симметрия или антисимметрия волновой функции имеет место при перестановке *любых двух* одинаковых частиц.

3. Частицы, состояние которых описывается симметричными волновыми функциями, называются *бозе-частицами* или *бозонами.* Частицы же, описываемые антисимметричными волновыми функциями, называются *ферми-частицами* или *фермионами.* Такие названия приняты потому, что системы, состоящие из бозонов, подчиняются *статистике Бозе–Эйнштейна*, а состоящие из фермионов — *статистике Ферми–Дирака* (см. т. II, § 82). К бозонам относятся фотоны, π- и K-мезоны — вообще все частицы с нулевым или целым спином. К фермионам относятся электроны, протоны, нейтроны, нейтрино и все элементарные частицы и античастицы с полуцелым спином. Связь между спином и статистикой, установленная сначала эмпирически для фотонов и электронов, была в 1940 г. распространена теоретически Паули на все элементарные частицы и античастицы. Паули установил эту связь, исходя из самых общих принципов квантовой теории — релятивистской инвариантности, неотрицательности полной энергии, причинности и т. п.

Указанная связь между спином и статистикой справедлива и для сложных частиц, построенных из элементарных, т. е. для атомных ядер, атомов и молекул, если только рассматриваются явления при достаточно низких энергиях, в которых каждая из сложных частиц ведет себя как целое. Принадлежность сложной частицы к бозонам или фермионам определяется ее спином.

Например, атом водорода состоит из двух ферми-частиц: протона и электрона, спин каждой из которых равен $1/2$. Суммарный механический момент, т. е. спин атома водорода в нормальном состоянии, может быть равен либо 0 (спины протона и электрона антипараллельны), либо 1 (спины параллельны). В обоих случаях атом водорода в нормальном состоянии будет бозоном.

Приведем второй пример. Ядро атома гелия ${}^4_2\mathrm{He}$, т. е. α-частица, состоит из двух протонов и двух нейтронов. Спин этого ядра равен нулю, т. е. оно является бозоном. Бозоном будет и сам атом ${}^4_2\mathrm{He}$ в нормальном состоянии. Но ядро ${}^3_2\mathrm{He}$ состоит из нечетного числа (3) частиц со спинами $1/2$: двух протонов и одного нейтрона. Спин этого ядра нечетный, т. е. оно является фермионом. Фермионом будет и сам атом ${}^3_2\mathrm{He}$. Ядра и атомы ${}^4_2\mathrm{He}$ подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна, ядра и атомы ${}^{03}_{2}\mathrm{He}$ — статистике Ферми–Дирака. Это проявляется в том, что вблизи абсолютного нуля температуры ${}^4_2\mathrm{He}$ обладает сверхтекучестью, в то время как ${}^3_2\mathrm{He}$ не обладает (уточнение дается в § 61, п. 7).

4. Применим принципы симметрии и антисимметрии к системе одинаковых частиц, не взаимодействующих между собой. При этом сначала будем рассуждать так, как если бы эти частицы не обладали спинами (уравнения для волновых функций при наличии спина в этом

курсе не рассматриваются), а затем обобщим полученные результаты на случай наличия спина.

Начнем с простейшего случая, когда система состоит всего из двух одинаковых частиц, декартовы координаты которых обозначим соответственно через x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2. Если $\widehat{H}$ — оператор Гамильтона всей системы, а $\widehat{H}_1$ и $\widehat{H}_2$ — каждой из частиц, то $\widehat{H} = \widehat{H}_1 + \widehat{H}_2$. Уравнение Шредингера для системы частиц в стационарных состояниях будет

$$\widehat{H}\psi \equiv (\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2)\psi = \mathscr{E}\psi, \tag{46.3}$$

где оператор $\widehat{H}_1$, поскольку частицы не взаимодействуют между собой, зависит только от координат первой частицы, а $\widehat{H}_2$ — только от координат второй частицы, а именно:

$$\begin{aligned} \widehat{H}_1 &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right) + U(x_1, y_1, z_1), \\ \widehat{H}_2 &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right) + U(x_2, y_2, z_2). \end{aligned} \tag{46.4}$$

Оба оператора $\widehat{H}_1$ и $\widehat{H}_2$ совершенно одинаковы, так как одинаковы сами частицы, но эти операторы зависят от разных координат.

Для решения уравнения (46.3) применим тот же метод, какой был использован в § 26. Так как оператор $\widehat{H}_1$ действует только на координаты x_1, y_1, z_1, а оператор $\widehat{H}_2$ — только на координаты x_2, y_2, z_2, то уравнение (46.3) распадается на два:

$$\widehat{H}_1\psi = \mathscr{E}_1\psi, \quad \widehat{H}_2\psi = \mathscr{E}_2\psi, \tag{46.5}$$

где $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ — постоянные, удовлетворяющие условию $\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}$. Решение первого уравнения (46.5) имеет вид $\varphi_\beta\varphi_\alpha(1)$, где для краткости совокупность координат x_1, y_1, z_1 первой частицы обозначена цифрой 1. Аналогично, совокупность координат x_2, y_2, z_2 второй частицы будем обозначать цифрой 2. В общем случае коэффициент φ_β может зависеть от координат 2, т. е. $\varphi_\beta = \varphi_\beta(2)$. Функцию $\varphi_\beta(2)$ следует выбрать так, чтобы удовлетворялось и второе уравнение (46.5). Для этого должно быть

$$\widehat{H}_1\varphi_\alpha(1) = \mathscr{E}_1\varphi_\alpha(1) \quad \text{и} \quad \widehat{H}_2\varphi_\beta(2) = \mathscr{E}_2\varphi_\beta(2). \tag{46.6}$$

Таким образом, функция $\varphi_\alpha(1)$ описывает состояние первой частицы с энергией $\mathscr{E}_1$, а функция $\varphi_\beta(2)$ — состояние второй частицы с энергией $\mathscr{E}_2$. Соотношение $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$ означает, что энергия системы двух невзаимодействующих частиц равна сумме энергий этих частиц, как этого и следовало ожидать. Решение уравнения (46.3) принимает вид $\psi = \varphi_\alpha(1)\varphi_\beta(2)$, т. е. оно является, как принято говорить, решением с *разделяющимися переменными.*

Уравнения (46.6) по существу одинаковы. Они отличаются одно от другого только обозначениями независимых переменных и значениями

постоянных $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$. Конечно, собственному значению $\mathscr{E}_1$ могут соответствовать несколько независимых решений первого уравнения (46.6). В общем случае под $\varphi_\alpha(1)$ следует понимать их линейную суперпозицию с постоянными коэффициентами, которая также является решением уравнения (46.3). То же относится к функции $\varphi_\beta(2)$.

Прежде чем идти дальше, учтем наличие спина. Для этого достаточно понимать под 1 и 2 совокупность не только пространственных, но и *спиновых координат* частиц. По-прежнему находится функция $\varphi_\alpha(1)\varphi_\beta(2)$, являющаяся решением уравнения, заменяющего уравнение Шредингера при наличии спина (такое уравнение называется уравнением Паули). В силу тождественности частиц функция $\varphi_\alpha(2)\varphi_\beta(1)$ является решением того же уравнения. Она получается из функции $\varphi_\alpha(1)\varphi_\beta(2)$, если поменять местами частицы 1 и 2, т. е. произвести перестановку их пространственных и спиновых координат.

Однако ни одна из этих функций не удовлетворяет принципу симметрии или антисимметрии. Но из них можно составить линейные комбинации с постоянными коэффициентами, которые также являются решениями уравнения типа Шредингера. Среди этих комбинаций есть *симметричная функция*

$$\psi_s = \varphi_\alpha(1)\varphi_\beta(2) + \varphi_\alpha(2)\varphi_\beta(1) \tag{46.7}$$

и *антисимметричная*

$$\psi_a = \varphi_\alpha(1)\varphi_\beta(2) - \varphi_\alpha(2)\varphi_\beta(1). \tag{46.8}$$

Состояние, описываемое функцией ψ_s, может действительно реализоваться в природе в случае системы двух одинаковых бозонов, а состояние, описываемое функцией ψ_a, — в случае системы двух одинаковых фермионов.

5. Приведенное рассуждение без всяких затруднений распространяется на случай системы, состоящей из произвольного числа N тождественных частиц. Прежде всего получается волновая функция

$$\psi = \psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3)\ldots\psi_\omega(N)$$

с разделяющимися переменными, в которой сохранены прежние обозначения. Отсюда, последовательно меняя местами каждые две частицы, получаем новые волновые функции с разделяющимися переменными:

$$\psi' = \psi_\alpha(2)\psi_\beta(1)\psi_\gamma(3)\ldots\psi_\omega(N),$$

$$\psi'' = \psi_\alpha(3)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(1)\ldots\psi_\omega(N)$$

и т. д., которым соответствует то же значение параметра $\mathscr{E}$. Состояние с таким значением $\mathscr{E}$ N-кратно вырождено. Однако ни одно из этих состояний не реализуется в природе.

В случае бозонов реализуется только их симметричная комбинация

$$\psi_s = \sum \widehat{P}\psi, \tag{46.9}$$

где $\widehat{P}$ — оператор перестановки координат двух частиц, причем сумма распространяется на всевозможные перестановки. К числу таких перестановок относится и тождественная перестановка, не меняющая координаты всех частиц, при которой функция ψ не изменяется. Таким образом, сумма (46.9) содержит N слагаемых.

В случае фермионов реализуется антисимметричная комбинация

$$\psi_a = \sum \pm \widehat{P}\psi, \tag{46.10}$$

причем знаку плюс соответствует четное число транспозиций (т. е. перестановок двух частиц), а знаку минус — нечетное. Таким образом, антисимметричная функция может быть записана в форме определителя

$$\psi_a = \begin{vmatrix} \psi_\alpha(1) & \psi_\beta(1) & \ldots & \psi_\omega(1) \\ \psi_\alpha(2) & \psi_\beta(2) & \ldots & \psi_\omega(2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_\alpha(N) & \psi_\beta(N) & \ldots & \psi_\omega(N) \end{vmatrix}. \tag{46.11}$$

Обычно волновые функции (46.10) и (46.11) нормируют, умножая их на определенные числовые коэффициенты. Однако в разбираемом нами вопросе нормировка не имеет значения и поэтому не производится.

6. В случае невзаимодействующих одинаковых частиц имеет смысл говорить о состоянии не только системы в целом, но и о *состоянии одной частицы.* Например, можно сказать, что одна какая-то частица находится в состоянии ψ_α, а другая в состоянии ψ_β. При этом волновые функции фермионов ведут себя существенно иначе, чем волновые функции бозонов.

В системе одинаковых фермионов не может быть двух частиц, находящихся в одном и том же состоянии. Для частного случая системы, состоящей из двух частиц, это непосредственно видно из формулы (46.8), так как в случае $\psi_\alpha \equiv \psi_\beta$ волновая функция ψ_a обращается в нуль, что физически не соответствует никакому состоянию. В общем случае N частиц это видно из формулы (46.10) и в особенности из формулы (46.11), так как, например, при $\psi_\alpha \equiv \psi_\beta$ получился бы определитель с двумя одинаковыми столбцами, а такой определитель обращается в нуль.

Таким образом, *в системе тождественных фермионов не может быть двух частиц, находящихся в одном и том же состоянии.* Это положение называется *принципом* или *запретом Паули*, который высказал его для электронов в атоме еще до создания квантовой механики. В первоначальной формулировке принцип Паули утверждал, что *в атоме не может быть двух электронов, характеризующихся одинаковыми четверками квантовых чисел.*

В смысле ясности и точности принцип Паули уступает *принципу антисимметрии волновых функций.* Последний принцип справедлив и при наличии взаимодействия частиц, тогда как в принципе Паули речь идет о состояниях отдельных частиц, о которых, строго говоря,

можно говорить лишь в отсутствие взаимодействия. Тем не менее принцип Паули, даже в первоначальной формулировке самого Паули, оказался очень плодотворным, например, для обоснования периодической системы Менделеева, а также некоторых закономерностей в спектрах. Принцип антисимметрии волновых функций фермионов иногда называют *обобщенным принципом Паули.*

Что касается бозонов, то на их состояния *принцип симметрии волновых функций* не накладывает никаких ограничений, аналогичных запрету Паули. В одном и том же состоянии может находиться *любое число* одинаковых бозонов. Это непосредственно видно из выражений (46.7) и (46.9) для волновых функций таких бозонов.

§ 47. Объяснение периодической системы химических элементов Д. И. Менделеева

1. Периодическая повторяемость свойств химических элементов, открытая Д. И. Менделеевым (1834–1907) в 1869 г. и отраженная в его *периодической системе*, была объяснена Бором в 1922 г. на основе созданной им теории строения атома. Оказалось, что не атомная масса (атомный вес по старой терминологии), а *заряд ядра* лежит в основе систематики химических элементов. Если за единицу принять элементарный заряд e, то заряд ядра будет выражаться целым числом, которое принято обозначать через Z. Число Z и определяет номер химического элемента в периодической системе. В этой связи его называют также *порядковым номером* элемента. Заряд ядра численно равен числу электронов в электронной оболочке, окружающей ядро нейтрального атома. Свойства же элемента зависят прежде всего от числа электронов в электронной оболочке и от ее строения. Что касается *химических свойств* элемента, то они определяются *наружными электронами* электронной оболочки.

Существенное усовершенствование объяснение периодической системы получило в 1925 г. после открытия *принципа Паули.* Этот принцип определил максимальное число электронов в электронной оболочке атома, которые могут находиться в определенном квантовом состоянии. После этого стало понятным распределение химических элементов по группам и периодам периодической системы, эмпирически угаданное Менделеевым и пополненное затем другими химиками.

В естественном состоянии в природе встречается 90 элементов. Наибольший атомный номер (92) имеет уран. Элементы $_{43}$Tc (технеций) и $_{61}$Pm (прометий) в естественных состояниях не встречаются. Они радиоактивны, причем период их полураспада (у наиболее важного изотопа ^{99}Tc $2{,}12\cdot 10^5$ лет, у изотопов Pm — от нескольких лет до десятков лет) много меньше возраста Земли. Со времени образования Земли эти элементы целиком распались. Образоваться же при радиоактивных превращениях соседних по заряду ядер (из числа встречающихся в природе) они не могли, так как все эти соседние ядра стабильны. Элементы с атомным номером больше 92 называются *трансурановыми.* Они все

радиоактивны и также получены искусственно. К настоящему времени получены элементы с порядковыми номерами до 109 включительно.

Способы получения трансурановых элементов будут кратко описаны ниже. Здесь же заметим, что в 1983 г. поступило сообщение о получении учеными ФРГ (Дармштадт) 109-го элемента в количестве одного атома. В 1984 г. в СССР (Дубна) было получено восемь атомов такого элемента. В том же году там же были синтезированы два изотопа 108-го элемента. Названия элементов 102 (нобелий) и 103 (лоуренсий) не являются общепринятыми, так как первоначальные сообщения об их открытии с присвоением им указанных названий не подтвердились. Ученые Дубны предложили 102-й элемент называть жолиотием (Jl) в честь Жолио-Кюри, а 103-й элемент — резерфордием (Rf) в честь Резерфорда. 105-й элемент ими же предложено называть нильсборием (Ns) в честь Нильса Бора. Остальные трансурановые элементы еще не получили названий. Их по примеру Д. И. Менделеева можно было бы назвать экавольфрам, экарений, экаосьмий, экаиридий. Приставка «эка» означает, что в периодической системе названные элементы лежат соответственно под вольфрамом, рением, осмием, иридием.

2. Периодическая повторяемость свойств химических элементов является внешним проявлением внутренней структуры электронных оболочек атомов. К выяснению указанной структуры и сводится построение теории периодической системы элементов.

В существующей ныне теории периодической системы характеризуются состояния *отдельных электронов* электронной оболочки атома, а не ее состояние в целом. Это, конечно, недостаток теории. Состояние электронной оболочки должно было бы характеризоваться волновой функцией всех координат ее электронов, причем при наличии взаимодействия между электронами эти координаты не разделяются, т. е. волновая функция не представляется в виде произведения волновых функций отдельных электронов. Это и значит, что точный смысл имеет состояние всей электронной оболочки атома, а не отдельных электронов, из которых она состоит. Но точное нахождение волновой функции системы многих взаимодействующих частиц еще более недоступно методам современной математики, чем решение знаменитой задачи многих (в частности, трех) тел в классической механике. Поэтому-то и приходится вводить приближенное представление о состояниях отдельных электронов.

Состояние отдельного электрона характеризуется четырьмя квантовыми числами, за которые удобно принять n, l, m_l, m_s. Принцип Паули, на котором основана теория периодической системы, тогда будет означать, что *в одном квантовом состоянии может находиться не более одного электрона.* Индивидуализация электронов при этом не используется — существенно только, сколько электронов находится в заданном состоянии (n, l, m_l, m_s), а не какие это электроны. Если два электрона обменяются своими координатами, то состояние электронной оболочки останется *абсолютно тем же.* Спиновое квантовое число m_s можно исключить из рассмотрения, если учесть, что оно может принимать только два значения: $m_s = \pm 1/2$. Если это сделать, то можно

сказать, что *в квантовом состоянии* (n,l,m_l) *может находиться не более двух электронов.*

3. Совокупность электронов атома с заданным значением главного квантового числа n образует *электронный слой* или просто *слой.* В соответствии с терминологией, принятой в рентгеновской спектроскопии, слои обозначаются прописными буквами латинского алфавита, а именно:

n	1	2	3	4	5
Слой	K	L	M	N	O
Максимальное число электронов в слое	2	8	18	32	50

Совокупность электронов с заданными значениями n и l образует *оболочку* [1]. Различные состояния в оболочке отличаются значениями квантового числа m_l. Поскольку последнее может принимать значения $m_l = -l, -(l-1), \ldots, 0, \ldots, +(l-1), +l$, в оболочке с квантовым числом l может находиться не более $2(2l+1)$ электронов Оболочки обозначаются строчными буквами латинского алфавита, а именно:

l	0	1	2	3	4
Оболочка	s	p	d	f	g
Максимальное число электронов в оболочке	2	6	10	14	18

Символ, указывающий слои, оболочки и числа электронов в каждой оболочке, называется *электронной конфигурацией* атома. Например, $1s^2 2s^2 2p^6$ означает, что в состоянии $n = 1$, $l = 0$ находятся два электрона, в состоянии $n = 2$, $l = 0$ — также два электрона, а в состоянии $n = 2$, $l = 1$ — шесть электронов. Из дальнейшего будет видно, что это — электронная конфигурация неона. Максимальное число электронов в слое с заданным значением n получится суммированием чисел электронов во всех оболочках с допустимыми значениями l, а именно:

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2. \tag{47.1}$$

Соответствующие числа для различных n были приведены выше.

4. Посмотрим теперь, как меняются электронные конфигурации при переходе от одного атома к другому в порядке возрастания их атомных номеров Z. При возрастании Z на единицу увеличивается на единицу заряд ядра, а к электронной оболочке атома добавляется один электрон. Принцип, определяющий при этом изменение электронной конфигурации, состоит в том, что вновь получаемая конфигурация из $Z+1$ электронов должна обладать *наименьшей энергией* из всех

[1] Термин «оболочка», как это делалось выше, применяется также в смысле совокупности *всех электронов,* окружающих атомное ядро.

возможных значений ее, допускаемых квантовой механикой. Иначе говоря, энергия связи вновь присоединяемого электрона в атоме должна быть *максимально возможной.* Однако фактическое применение этого принципа требовало бы решения квантовомеханической задачи многих тел, что практически невыполнимо. Поэтому приходится пользоваться эмпирическими данными, в частности химическими и в особенности данными спектроскопии об ионизационных потенциалах атомов. Это придает теории периодической системы полуэмпирический, описательный характер. Лучше было бы говорить не о теории, а об *объяснении* периодической системы, что и отражено в заглавии настоящего параграфа.

Казалось бы, что слои должны заполняться последовательно друг за другом, а в пределах каждого слоя сначала должна заполняться целиком s-оболочка, затем также целиком p-, d- и f-оболочки. В действительности такой «идеальный» порядок заполнения не согласуется с только что сформулированным принципом. Нарушение этого порядка объясняется главным образом наличием у электронов орбитальных моментов количества движения $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$. Энергия связи электрона зависит не только от его потенциальной энергии в электрическом поле ядра и окружающей его электронной оболочки, но также от «центробежной энергии»

$$\frac{L^2}{2m_e r^2} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_e r^2},$$

где r — расстояние электрона от ядра. «Центробежная» и электрическая энергии имеют противоположные знаки и поэтому действуют в разные стороны. Образно говоря, центробежная сила, возникающая при орбитальном вращении электрона, стремится удалить электрон от ядра. По этой причине каждый из 10 электронов $3d$-оболочки обладает меньшей энергией связи, чем каждый из двух электронов $4s$-оболочки. Поэтому-то оболочка $4s$ заполняется электронами раньше, чем оболочка $3d$, хотя главное квантовое число во втором случае меньше, чем в первом. Особенно велика «центробежная энергия» в случае d- и f-оболочек, поскольку для этих оболочек соответственно $l(l+1) = 6$ и $l(l+1) = 12$. С наличием этих оболочек и связаны отступления от того «идеального» порядка заполнения, о котором говорилось выше.

В действительности слои и оболочки, если отвлечься от некоторых деталей, указанных в табл. 4 (см. ниже), заполняются в следующем порядке:

$1s^2$	2 электрона,
$2s^2 2p^6$	8 электронов,
$3s^2 3p^6$	8 электронов,
$4s^2 3d^{10} 4p^6$	18 электронов,
$5s^2 4d^{10} 5p^6$	18 электронов,
$6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^6$	32 электрона,
$7s^2 5f^{14} 6d^{10} 7p^6$	32 электрона.

5. Слой $n = 1$ состоит всего из одной s-оболочки ($l = 0$). В водороде на этой оболочке (т. е. в состоянии $1s$) находится лишь один электрон. В атоме гелия к нему присоединяется второй электрон в том же состоянии $1s$. Средняя энергия связи одного электрона в атоме гелия приблизительно в два раза больше, чем средняя энергия связи электрона в атоме водорода. Это объясняется тем, что заряд ядра гелия вдвое больше заряда ядра водорода, и по этой причине электрон в нормальном состоянии гелия находится на меньшем расстоянии от ядра, чем в атоме водорода. Наличие же второго электрона уменьшает энергию связи первого. Два элемента — водород и гелий — образуют *первый период* периодической системы.

Присоединим теперь к атому третий электрон, увеличив одновременно на единицу заряд ядра. Третий электрон не может находиться в слое K ($n = 1$), так как этот слой уже целиком заполнен. Он начинает заполнять s-оболочку слоя L ($n = 2$), попадая в состояние $2s$. Получается щелочной металл $_3$Li. Четвертый электрон также попадает в состояние $2s$ — получается элемент бериллий $_4$Be. Пятый электрон уже не может быть присоединен к оболочке $2s$, так как она заполнена целиком. Поэтому с бора $_5$B начинает заполняться $2p$-оболочка. В результате последовательно получаются элементы $_6$C, $_7$N, $_8$O, $_9$F. Построение оболочки $2p$ заканчивается благородным газом $_{10}$Ne. Так образуется *второй* (*короткий*) *период* периодической системы, состоящий из восьми элементов.

Затем, начиная с щелочного элемента $_{11}$Na, идет заполнение слоя M ($n = 3$). Однако после заполнения s- и p-оболочек оно заканчивается благородным газом $_{18}$Ar. Получается *третий* (опять *короткий*) *период* периодической системы, состоящий также из восьми элементов. С этого места появляются нарушения «идеального» порядка заполнения слоев и оболочек. Именно, сначала заполняется $4s$-оболочка и только после этого начинается заполнение пропущенной $3d$-оболочки, да и то при ее заполнении встречаются различные нерегулярности.

6. Порядок заполнения слоев и оболочек указан в табл. 4. В ней приведены электронные конфигурации для каждого элемента. Все элементы разбиты на две половины. Первая половина напечатана слева, а вторая смещена относительно нее вправо. Так же принято поступать в химии с символами тех же элементов при печатании периодической системы, с целью расположить друг под другом элементы со сходными химическими свойствами. В элементах первой половины заполняются s- и p-оболочки. Это заполнение происходит всегда закономерно. Сначала целиком заполняется s-оболочка, а затем также целиком p-оболочка того же слоя. К электронной конфигурации каждого элемента последовательно прибавляется по одному s- или p-электрону — тогда получается электронная конфигурация стоящего после него элемента.

В элементах второй половины идет заполнение d- и f-оболочек. При этом и происходит нарушение «идеального» порядка заполнения, о котором говорилось выше. Так, в *четвертом периоде* за электронной

Таблица 4

Электронные конфигурации элементов

Период	Элемент	Электронная конфигурация	Ионизационный потенциал, В
1	1 H водород	$1s^1$	13,539
	2 He гелий	$1s^2$	24,45
2		Конфигурация гелия +	
	3 Li литий	$2s^1$	5,37
	4 Be бериллий	$2s^2$	9,48
	5 B бор	$2s^22p^1$	8,4
	6 C углерод	$2s^22p^2$	11,217
	7 N азот	$2s^22p^3$	14,47
	8 O кислород	$2s^22p^4$	13,56
	9 F фтор	$2s^22p^5$	18,6
	10 Ne неон	$2s^22p^6$	21,48
3		Конфигурация неона +	
	11 Na натрий	$3s^1$	2,12
	12 Mg магний	$3s^2$	7,61
	13 Al алюминий	$3s^23p^1$	5,96
	14 Si кремний	$3s^23p^2$	7,39
	15 P фосфор	$3s^23p^3$	10,3
	16 S сера	$3s^23p^4$	10,31
	17 Cl хлор	$3s^23p^5$	12,96
	18 Ar аргон	$3s^23p^6$	15,69
4		Конфигурация аргона +	
	19 K калий	$4s^1$	4,32
	20 Ca кальций	$4s^2$	6,09
	21 Sc скандий	$4s^23d^1$	6,57
	22 Ti титан	$4s^23d^2$	6,80
	23 V ванадий	$4s^23d^3$	6,76
	24 Cr хром	$4s^13d^5$	6,74
	25 Mn марганец	$4s^23d^5$	7,40
	Переходные элементы: 26 Fe железо	$4s^23d^6$	7,83
	27 Co кобальт	$4s^23d^7$	7,81
	28 Ni никель	$4s^23d^8$	7,61
	29 Cu медь	$4s^13d^{10}$	7,62
	30 Zn цинк	$4s^23d^{10}$	9,35
	31 Ga галлий	$4s^24p^13d^{10}$	5,27
	32 Ge германий	$4s^24p^23d^{10}$	7,85
	33 As мышьяк	$4s^24p^33d^{10}$	9,4
	34 Se селен	$4s^24p^43d^{10}$	
	35 Br бром	$4s^24p^53d^{10}$	11,8
	36 Kr криптон	$4s^24p^63d^{10}$	13,94

Продолжение табл. 4

Период	Элемент	Электронная конфигурация	Ионизационный потенциал, В
5		Конфигурация криптона +	
	37 Rb рубидий	$5s^1$	4,16
	38 Sr стронций	$5s^2$	5,67
	39 Y иттрий	$5s^2 4d^1$	6,5
	40 Zr цирконий	$5s^2 4d^2$	
	41 Nb ниобий	$5s^1 4d^4$	
	42 Mo молибден	$5s^1 4d^5$	7,65
	43 Tc технеций	$5s^1 4d^6$	
	Переходные элементы: 44 Ru рутений	$5s^1 4d^7$	7,7
	Переходные элементы: 45 Rh родий	$5s^1 4d^8$	7,7
	Переходные элементы: 46 Pd палладий	$4d^{10}$	8,5
	47 Ag серебро	$5s^1 4d^{10}$	7,54
	48 Cd кадмий	$5s^2 4d^{10}$	8,95
	49 In индий	$5s^2 5p^1 4d^{10}$	5,76
	50 Sn олово	$5s^2 5p^2 4d^{10}$	7,37
	51 Sb сурьма	$5s^2 5p^3 4d^{10}$	8,5
	52 Te теллур	$5s^2 5p^4 4d^{10}$	
	53 I иод	$5s^2 5p^5 4d^{10}$	10,44
	54 Xe ксенон	$5s^2 5p^6 4d^{10}$	12,08
6		Конфигурация ксенона +	
	55 Cs цезий	$6s^1$	3,88
	56 Ba барий	$6s^2$	5,19
	57 La лантан	$6s^2 5d^1$	
	Лантаниды: 58 Ce церий	$6s^2 4f^2$	
	Лантаниды: 59 Pr празеодим	$6s^2 4f^3$	
	Лантаниды: 60 Nd неодим	$6s^2 4f^4$	
	Лантаниды: 61 Pm прометий	$6s^2 4f^5$	
	Лантаниды: 62 Sm самарий	$6s^2 4f^6$	
	Лантаниды: 63 Eu европий	$6s^2 4f^7$	
	Лантаниды: 64 Gd гадолиний	$6s^2 5d^1 4f^7$	
	Лантаниды: 65 Tb тербий	$6s^2 5d^1 4f^8$	
	Лантаниды: 66 Dy диспрозий	$6s^2 4f^{10}$	
	Лантаниды: 67 Ho гольмий	$6s^2 4f^{11}$	
	Лантаниды: 68 Er эрбий	$6s^2 4f^{12}$	
	Лантаниды: 69 Tm тулий	$6s^2 4f^{13}$	
	Лантаниды: 70 Yb иттербий	$6s^2 4f^{14}$	
	Лантаниды: 71 Lu лютеций	$6s^2 5d^1 4f^{14}$	
	72 Hf гафний	$6s^2 5d^2 4f^{14}$	

Продолжение табл. 4

Период	Элемент		Электронная конфигурация	Ионизационный потенциал, В
6			Конфигурация ксенона +	
	Переходные элементы	73 Ta тантал	$6s^2 5d^3 4f^{14}$	
		74 W вольфрам	$6s^2 5d^4 4f^{14}$	
		75 Re рений	$6s^2 5d^5 4f^{14}$	
		76 Os осмий	$6s^1 5d^7 4f^{14}$	
		77 Ir иридий	$6s^2 5d^7 4f^{14}$	
		78 Pt платина	$6s^1 5d^9 4f^{14}$	
		79 Au золото	$6s^1 5d^{10} 4f^{14}$	
		80 Hg ртуть	$6s^2 5d^{10} 4f^{14}$	9,20
	81 Tl таллий		$6s^2 6p^1 5d^{10} 4f^{14}$	10,59
	82 Pb свинец		$6s^2 6p^2 5d^{10} 4f^{14}$	7,39
	83 Bi висмут		$6s^2 6p^3 5d^{10} 4f^{14}$	8,0
	84 Po полоний		$6s^2 6p^4 5d^{10} 4f^{14}$	
	85 At астат		$6s^2 6p^5 5d^{10} 4f^{14}$	
	86 Rn радон		$6s^2 6p^6 5d^{10} 4f^{14}$	10,69
7			Конфигурация радона +	
	87 Fr франций		$7s^1$	
	88 Ra радий		$7s^2$	
		89 Ac актиний	$7s^2 6d^1$	
	Актиниды	90 Th торий	$7s^2 6d^2$	
		91 Pa протактиний	$7s^2 6d^1 5f^2$	
		92 U уран	$7s^2 6d^1 5f^3$	
		93 Np нептуний	$7s^2 6d^1 5f^4$	
		94 Pu плутоний	$7s^2 5f^6$	
		95 Am америций	$7s^2 5f^7$	
		96 Cm кюрий	$7s^2 6d^1 5f^7$	
		97 Bk берклий	$7s^2 6d^1 5f^8$	
		98 Cf калифорний	$7s^2 5f^{10}$	
		99 Es эйнштейний	$7s^2 5f^{11}$	
		100 Fm фермий	$7s^2 5f^{12}$	
		101 Md менделевий	$7s^2 5f^{13}$	
		102 (No нобелий)	$7s^2 5f^{14}$	
		103 Lr лоуренсий	$7s^2 6d^1 5f^{14}$	
		104 (Ku курчатовий)	$7s^2 6d^2 5f^{14}$	
		105 (Ns нильсборий)	$7s^2 6d^3 5f^{14}$	
		106	$7s^2 6d^4 5f^{14}$	
		107	$7s^2 6d^5 5f^{14}$	

конфигурацией ванадия $4s^2 3d^3$ следует электронная конфигурация хрома $4s^1 3d^5$ (конфигурацию аргона для краткости опускаем), т. е. в $3d$-оболочке число электронов увеличивается сразу на два, причем один электрон заимствуется из $4s$-оболочки. В конфигурации следующего элемента марганца $4s^2 3d^5$ новый электрон присоединяется не к $3d$-, а к $4s$-оболочке, восстанавливая в ней прежнее число электронов. Аналогичные нарушения идеального порядка, как легко проследить по табл. 4, происходят и при заполнении остальных d-, а также f-оболочек.

Каждый период периодической системы начинается со щелочного металла, в электронной конфигурации которого имеется только один наружный s-электрон. Из всех элементов атомы щелочных металлов обладают наименьшими ионизационными потенциалами. Поэтому эти атомы легко могут отдавать наружные s-электроны и присоединять их к атомам других элементов. Этим объясняется большая химическая активность щелочных металлов.

Каждый период заканчивается атомом благородных газов He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn. У этих атомов (за исключением He) наружная $s - p$-оболочка состоит из восьми электронов, образующих особенно компактную, симметричную и прочно связанную систему. Поэтому у атомов благородных газов ионизационные потенциалы максимальны. Этим и объясняется их химическая пассивность — они не вступают (или практически не вступают) в химические соединения с другими атомами. Наоборот, элементы соседней седьмой группы периодической системы — фтор, хлор, бром, иод — химически очень активны. Это потому, что у них наружная $s - p$-оболочка состоит из семи электронов и может быть легко дополнена до замкнутой оболочки путем присоединения недостающего восьмого электрона.

Каждый полупериод периодической системы заканчивается так называемыми *переходными элементами*, обведенными в табл. 4 штриховыми рамками. Это триады: (железо, кобальт, никель), (рутений, родий, палладий), (осмий, иридий, платина), помещаемые обычно в одну клетку периодической системы.

Особого внимания заслуживают 14 элементов от церия до лютеция включительно, называемые *редкими землями* или *лантанидами*. В них происходит заполнение внутренней $4f$-оболочки. Поскольку при этом наружные оболочки практически остаются без изменения, все элементы редких земель обладают весьма близкими химическими свойствами, и поэтому их трудно отделить один от другого. Лантаниды в табл. 4 обведены сплошной рамкой.

Представляет интерес история открытия элемента 72 (гафния). Этот элемент до 1922 г. не был известен, но место для него ошибочно оставляли среди редких земель. Однако Бор указал, что по теоретическим соображениям элементы редких земель должны заканчиваться 71-м элементом (лютецием), а элемент 72 по химическим свойствам должен быть аналогом циркония ($Z = 40$). После этого указания его стали искать и действительно обнаружили в циркониевых рудах.

Подобно лантанидам ведут себя *актиниды*. Так называют 14 элементов, большинство из которых получено искусственно. Это — элементы от тория до лоуренсия включительно. В табл. 4 они также обведены сплошной рамкой. В них происходит заполнение внутренней $5f$-оболочки, в то время как наружные оболочки практически остаются незатронутыми. Поэтому, как и лантаниды, актиниды обладают весьма близкими химическими свойствами.

Мы оборвали периодическую систему на элементе 109, искусственно полученном к настоящему времени. Это, конечно, не означает, что в дальнейшем не могут быть получены элементы с бóльшими атомными номерами.

7. Успехи теории периодической системы химических элементов несомненны. Однако необходимо иметь в виду и принципиальные недостатки существующей теории. Один из них был уже указан в п. 2. Добавим к нему следующее. Электроны в каждой оболочке атома характеризуются орбитальными квантовыми числами l. Это предполагает сохранение числового значения орбитального момента количества движения для каждого электрона. Но закон сохранения момента количества движения справедлив для частицы, движущейся в *центрально-симметричном* силовом поле, и не имеет места в других случаях. Поле же, в котором движется электрон в атоме, создается ядром и остальными электронами. Оно не обладает сферической симметрией. Даже в случае одного наружного электрона, когда все внутренние оболочки заполнены, сферическая симметрия получается в результате квантово-механического усреднения. В уравнение же Шредингера, определяющее движение электронов, входит не усредненная потенциальная энергия, а потенциальная энергия, понимаемая классически, как функция координат всех (точечных) электронов (см. § 21, п. 3).

§ 48. Рентгеновские лучи

1. Рентгеновские лучи в рентгеновских трубках получаются при торможении ускоренных электронов на аноде (в старых трубках —на антикатоде; см. т. III, § 117). Волновые свойства рентгеновских лучей были установлены в 1912 г. Лауэ и его сотрудниками Фридрихом (1883–1968) и Книппингом (1883–1935), осуществившими дифракцию этих лучей в кристаллах (см. т. IV, § 61). Еще раньше, в 1905 г., Баркла (1877–1944) установил, что если рентгеновские лучи действительно являются волнами, то эти волны должны быть *поперечными*. В опыте Баркла пучок рентгеновских лучей S (рис. 86) рассеивался на теле A. Наличие рассеяния обнаруживалось с помощью ионизационной камеры — рентгеновские лучи, попадая в камеру, производили ионизацию воздуха, делая его проводящим. Рассеянное под углом 90° излучение попадало на тело B и вновь рассеивалось. Оказалось,

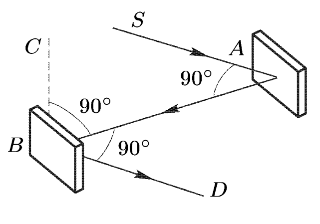


Рис. 86

что интенсивность вновь рассеянного излучения в направлении BC, перпендикулярном к плоскости SAB, равна нулю, тогда как в других направлениях, в частности в направлении BD, антипараллельном SA, рассеяние происходило. На основании этого Баркла и заключил, что рентгеновские волны, если рентгеновское излучение действительно состоит из них, должны быть поперечными.

В самом деле, если волны поперечны, то электрический вектор в падающем луче SA и возбужденные им колебания электронов в теле A можно разложить по направлениям AB и BC. Первые колебания, в направлении AB, излучения не дадут, так как колеблющийся электрон не излучает в направлении его колебаний. К телу B дойдет только волна с электрическим вектором, параллельным BC. Она возбудит колебания электронов в том же направлении. Следовательно, излучения в направлении BC не возникнет.

Разумеется, рентгеновские лучи в опытах Баркла должны были обладать достаточной жесткостью, чтобы на своем пути в воздухе не испытывать заметного поглощения. Для этого напряжение на трубке должно быть достаточно высоким. По той же причине тела A и B делались из материала с малым атомным номером Z (уголь в опытах Баркла). Иначе при высоких напряжениях на трубке в случае больших Z получилось бы собственное характеристическое излучение (см. ниже) и притом значительной интенсивности. Уголь, парафин и пр. дают слабое и мягкое собственное излучение, поглощающееся в воздухе на пути уже в несколько сантиметров, а потому не мешающее постановке опыта.

2. Баркла же установил, что рентгеновское излучение, исходящее из антикатода трубки, состоит из двух частей. Одна из них есть *тормозное излучение*, возникающее при торможении электронов в антикатоде. Его свойства совершенно не зависят от материала антикатода. Свойства другого существенно определяются материалом, из которого состоит антикатод. Рентгеновское излучение Баркла характеризовал его *жесткостью*, т. е. способностью проходить через различные вещества. Точная количественная характеристика стала возможной только после опыта Лауэ, упоминавшегося выше, когда были разработаны методы рентгеновской спектроскопии, позволившие измерять длины волн рентгеновского излучения (см. т. IV, § 61).

Тормозное излучение дает *сплошной спектр*. По аналогии с белым светом его называют также *белым рентгеновским излучением*. В сторону длинных волн интенсивность тормозного излучения спадает полого и асимптотически стремится к нулю. Со стороны коротких волн сплошной спектр обрывается резко (см. рис. 5). Как уже подробно указывалось в § 2, такая особенность сплошного рентгеновского излучения объясняется его *квантовой природой*. Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра определяется формулой (2.6). Она совершенно не зависит от материала анода (антикатода), а определяется только напряжением на трубке. Вообще, относительное распределение энергии по длинам волн в спектре тормозного рентгеновского

излучения от материала анода не зависит. Последний влияет только на интегральную интенсивность излучения.

Характеристическое излучение, напротив, имеет *линейчатый спектр*, т. е. состоит из закономерно расположенных достаточно узких спектральных линий. Их длины волн зависят исключительно от материала анода. В этом отношении характеристическое излучение напоминает линейчатый спектр газов в оптической области. Электронная бомбардировка возбуждает как сплошное, так и характеристическое излучение, тогда как бомбардировка α-частицами или протонами возбуждает только характеристическое излучение. Рентгеновские лучи, испускаемые веществом при действии других рентгеновских лучей, состоят частично из рассеянного первичного пучка, частично из характеристического излучения самого вещества. Характеристическое излучение появляется только после того, как напряжение на трубке начинает превосходить некоторое определенное значение, зависящее лишь от материала анода.

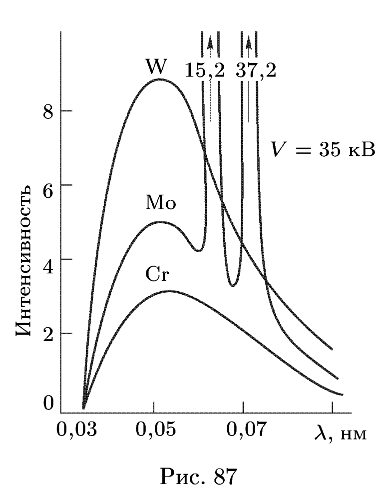


Рис. 87

На рис. 87 для напряжения на трубке $V = 35$ кВ приведены экспериментальные кривые спектрального распределения энергии рентгеновского излучения в случае антикатодов из вольфрама, молибдена и хрома. За меру интенсивности излучения принят ток в ионизационной камере. В случае молибдена, наряду со сплошным излучением, возбуждаются две линии характеристического излучения с длинами волн примерно $\lambda = 0{,}063$ и $\lambda = 0{,}071$ нм. Характеристическое излучение появляется и для хрома, но при более длинных волнах, не укладывающихся на рисунке. Но в случае вольфрама напряжения 35 кВ недостаточно для возбуждения характеристического излучения в диапазоне волн, приведенном на рисунке, — получается только сплошной спектр.

3. Каждая линия рентгеновского характеристического излучения, конечно, возникает в результате перехода атома с одного энергетического уровня на другой. Ее частота определяется правилом частот Бора:

$$\hbar\omega = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2. \tag{48.1}$$

Поскольку рентгеновское излучение коротковолновое, разность энергий в начальном и конечном состояниях атома очень велика и в случае тяжелых элементов превосходит в тысячи, десятки и сотни тысяч раз соответствующую разность в оптической области спектра. Это указывает на то, что квантовые переходы совершаются *внутренними*, а не наружными (валентными) электронами атома. Но для того, чтобы такие переходы были возможны, необходимо, чтобы внутри электронной

оболочки атома были *свободные места*, не заполненные электронами, на которые могут переходить электроны из других квантовых состояний атома. Такие свободные места образуются при воздействии на атом быстрых электронов, фотонов высоких энергий или других быстрых частиц.

Допустим, например, что с наиболее глубокого слоя K атома удален электрон. В результате этого энергия атома возрастает на энергию ионизации из K-слоя. Обозначим через $\mathscr{E}_1$ энергию атома после такого удаления электрона из K-слоя наружу. На освободившееся место перейдет электрон из соседнего L-слоя. K-слой окажется заполненным, а в L-слое не будет доставать одного электрона. Иными словами, получится атом, у которого из слоя L удален один электрон. Его энергия $\mathscr{E}_2$ меньше исходной энергии $\mathscr{E}_1$. Если в результате излучится рентгеновский квант, то его частота определится соотношением (48.1). На освободившееся место в слое L перейдет электрон из слоя M с излучением рентгеновского кванта более низкой частоты. То же произойдет с электроном из слоя N, и т. д. Конечно, переходы могут происходить не только между соседними слоями, но, например, между слоями M и K, N и K и т. д. Они возбуждают более жесткое излучение, чем переходы $L \to K$. В результате всех этих процессов возникнет *весь спектр* рентгеновского характеристического излучения атома.

Итак, частота линии характеристического рентгеновского излучения определяется разностью энергий энергетических уровней атома, найденной в предположении, что из каждого из них *удален один электрон.* При таком удалении атом переходит в возбужденное состояние — его энергия увеличивается на соответствующую энергию ионизации. Последняя тем больше, чем глубже лежит уровень невозбужденного атома. Из изложенного ясно, почему при рассмотрении рентгеновского излучения пользуются схемой уровней возбужденного атома, полученной в предположении, что с рассматриваемого уровня удален один электрон, тогда как число электронов на всех остальных уровнях остается неизменным. Из сказанного выше также следует, что схема уровней так возбужденного атома является *обращенной* по отношению к схеме энергетических уровней невозбужденного атома. Это значит, что в обращенной схеме энергетический уровень расположен тем выше, чем глубже он лежал до удаления с него электрона.

Обращенная схема энергетических уровней атома приведена на рис. 88. Электронные слои невозбужденного атома, соответствующие главным квантовым числам $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, как известно, обозначаются соответственно через K, L, $M, \ldots$. Такие же обозначения применяются и к атому, возбужденному в указанном выше смысле. Точно так же к возбужденному атому применяют спектроскопические обозначения типа $2^2S_{1/2}$, $2^2P_{1/2}, \ldots$ Целесообразность этого мотивируется тем, что внутренние оболочки атома замкнуты; их момент количества движения равен нулю, а при удалении электрона уносимый им момент количества движения передается с противоположным знаком электронной оболочке, с которой он был удален.

В отсутствие магнитного поля энергия не может зависеть от магнитного квантового числа. Она практически зависит только от квантовых чисел n и j. Слой K состоит из одного энергетического уровня $1^2S_{1/2}$

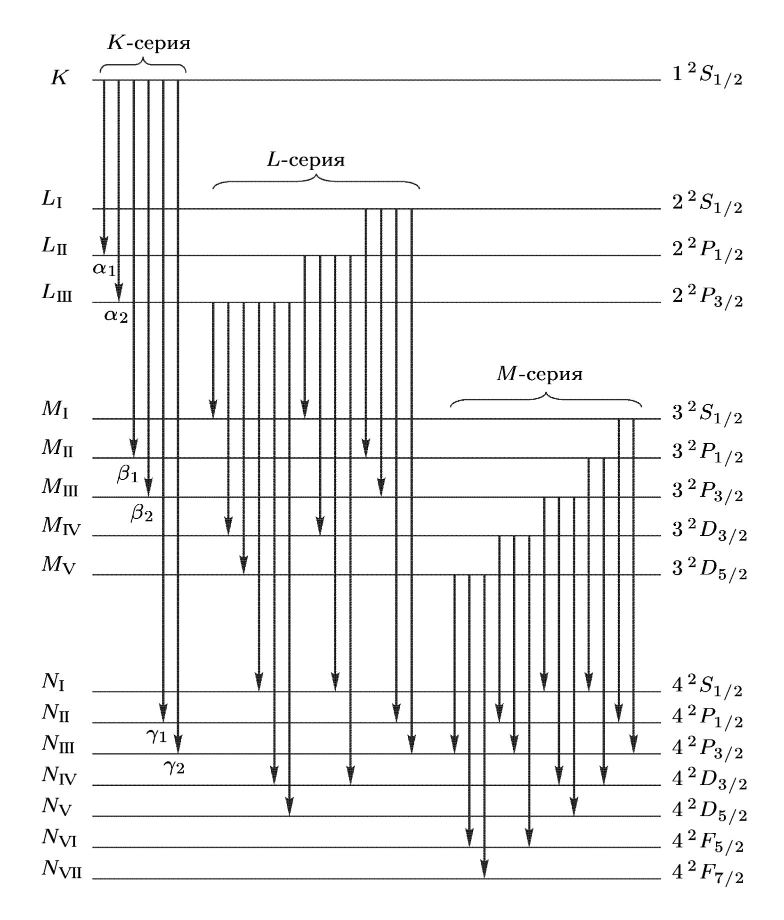


Рис. 88

($n = 1$, $l = 0$, $j = 1/2$). Слой L ($n = 2$) распадается на три подслоя, обозначаемые через L_{I}, L_{II}, L_{III}. Подслой L_{I} состоит из одной $2S$-оболочки. Два остальных подслоя представляют $2P$-оболочку, расщепляющуюся на две подоболочки $2^2P_{1/2}$ и $2^2P_{3/2}$. Их энергии различаются из-за спин-орбитального взаимодействия. Аналогично слой M ($n = 3$) состоит из пяти подслоев, слой N ($n = 4$) — из семи подслоев, обозначенных на рис. 88, и т. д.

4. Недостаток электрона в замкнутой оболочке атома можно рассматривать как «дырку» в этой оболочке. Формально можно считать, что дырка может находиться в различных квантовых состояниях и пе-

реходить из одного состояния в другое. Когда в электронной оболочке атома есть дырка, эта оболочка не замкнута. При переходе дырки на другую замкнутую оболочку последняя перестает быть замкнутой, а исходная оболочка восстанавливается до замкнутой. С этой точки зрения обращенная схема рентгеновских уровней атома аналогична обычной схеме энергетических уровней атома с одним наружным (валентным) электроном. Понятно, что сохраняют силу и все правила отбора при излучении, когда атом (дырка) переходит из одного квантового состояния в другое. Такими правилами отбора являются

$$\Delta J = -1,\ 0,\ +1; \quad \Delta L = \pm 1. \tag{48.2}$$

Все переходы, удовлетворяющие этим правилам отбора, изображены стрелками на рис. 88. Стрелки означают переходы возбужденного атома с высших энергетических уровней на более низкие, или, что то же самое, переходы дырки с уровня на уровень. В целях сокращения мы ограничились наличием в атоме только слоев K, L, M, N. Рисунок нетрудно дополнить переходами на подуровни слоев O $(n = 5)$ и P $(n = 6)$, если таковые имеются.

Характеристический спектр рентгеновского излучения состоит из серий линий, которые обозначаются буквами K, L, M, N, O. Серия K возникает при переходах возбужденного атома с уровня K на лежащие ниже подуровни слоев $L, M, N, \ldots$; серия L — при аналогичных переходах с подуровней слоя L; серия M — при переходах с подуровней слоя M и т. д. Как видно из рисунка, линии серии K имеют дублетную структуру. Компоненты дублетов обозначаются соответственно через α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2, как видно из рис. 88. Серии L, M, N имеют более сложную мультиплетную структуру. Для линий этих мультиплетов применяются также обозначения греческими буквами с индексами. Буква α указывает, что переход совершился с ближайшего слоя, буква β — со следующего после ближайшего и т. д. Цифровые индексы при буквах α, β, γ нумеруют линии в порядке убывания длин волн.

Из приведенного объяснения возникновения характеристического рентгеновского излучения следует, что при возбуждении наиболее глубоко лежащего слоя K возникает не только серия K, но и *весь рентгеновский спектр.* Вообще, при возбуждении какой-либо серии или линии рентгеновского излучения появляются и все серии и линии рентгеновского излучения с большими длинами волн.

При освобождении электрона из какой-либо внутренней оболочки электрон за пределами атома может обладать каким угодно запасом кинетической энергии. В этом случае его энергия в конечном состоянии не квантуется. При переходе из этого неквантованного состояния на одно из свободных мест в оболочках атома возникает *сплошное рентгеновское излучение.*

5. В отличие от оптических линейчатых спектров с их сложностью и разнообразием, рентгеновские характеристические спектры различных элементов характеризуются простотой и однообразием. Это связано с тем, что при переходе от одного элемента к следующему структура внутренних электронных оболочек атома изменяется очень

мало. При возрастании зарядового числа Z на единицу рентгеновский характеристический спектр элемента сохраняет свой вид; происходит лишь незначительное смещение всех рентгеновских линий в сторону более коротких волн. Эта особенность рентгеновских спектров впервые была обнаружена экспериментально Мозли в 1913 г. и истолкована им на основе теории Бора. Мозли систематически исследовал K- и L-серии рентгеновского излучения 38 различных элементов. Он пользовался кристаллическим спектрографом, работавшим по принципу брэгговских отражений (см. т. IV, § 61), в котором вместо ионизационной камеры была использована фотопластинка.

На рис. 89 воспроизведена фотография K-серии различных элементов, полученная Мозли. Спектры различных элементов расположены относительно друг друга так, что расстояние каждой линии от левого края рисунка приблизительно пропорционально длине волны этой линии. Сами элементы расположены в порядке возрастания атомных номеров от кальция ($Z = 20$) до цинка ($Z = 30$), входящего в состав латуни. Замечательна регулярность, с которой возрастает частота характеристического K-излучения с возрастанием атомного номера элемента. Такой же регулярностью отличаются и изменения частот L-, M- и N-линий характеристического излучения при переходе от одного элемента к следующему. Например, из рис. 89 сразу видно, что между кальцием и титаном пропущен элемент с атомным номером $Z = 21$. Это — скандий, предсказанный Менделеевым и открытый в 1879 г. Нильсоном и Клеве.

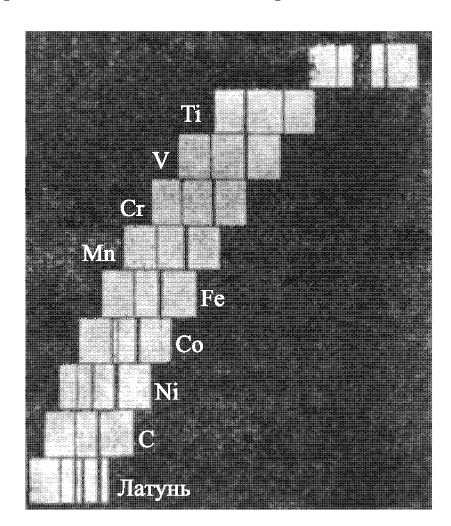


Рис. 89

Исследования Мозли впервые экспериментально показали, что основной величиной, определяющей место элемента в периодической таблице, является не атомная масса, а *атомный номер элемента*. Вместе с тем характеристические рентгеновские спектры позволяют однозначно определять атомные номера элементов и таким образом судить, заполнены ли в периодической таблице все места или должны существовать еще не открытые элементы. Уже сам Мозли оставил место под номером 43 для неизвестного в то время элемента, полученного позднее искусственно и названного технецием. До исследований Мозли не было выяснено, какой из элементов — кобальт с атомной массой 58,933 или никель с атомной массой 58,71 — надо поставить раньше в периодической таблице. Из рис. 89 ясно видно, что кобальт надо поставить между железом и никелем, хотя его атомная

масса и больше, чем у никеля. Участок периодической системы от $Z = 58$ до $Z = 71$ включительно занят элементами редких земель. Их химические свойства настолько близки, а атомные массы были известны настолько недостоверно, что правильность расположения этих элементов в периодической системе вызывала большие сомнения. Изучение рентгеновских спектров с использованием закона Мозли (см. ниже) устранило всякие сомнения. Оно показало, что от водорода до урана включительно должно существовать ровно 92 химических элемента.

Из изложенного выше о происхождении характеристических рентгеновских лучей следует, что длины волн таких лучей зависят исключительно от внутренней структуры электронных оболочек атома. Это есть *атомное свойство* элемента. Поэтому в сплавах и химических соединениях каждый элемент дает такой же характеристический спектр, какой получился бы в отсутствие других элементов. Это ясно проявляется на рис. 89. Спектр латуни получается простым наложением спектров меди и цинка, а в спектре кобальта отчетливо проявилось его загрязнение железом и никелем.

6. Мозли экспериментально установил, что квадратный корень из частоты колебаний $\sqrt{\nu}$ данной линии K-серии в зависимости от атомного номера элемента Z выражается плавной кривой, очень близкой к прямой линии:

$$\sqrt{\nu} = M(Z - a), \tag{48.3}$$

где M и a — постоянные. Та же формула, но с другими числовыми значениями M и a, справедлива и для L-серии, а также для последующих серий M, N, O. Эта эмпирическая формула называется *законом Мозли.* Она и определяет смещение характеристических рентгеновских спектров при переходе от одного элемента к следующему. Последующие более точные измерения обнаружили некоторые отступления от простой линейной зависимости (48.3). Впрочем, эти отступления для K- и L-серий не являются сколько-нибудь значительными, а становятся заметными лишь для M-, N- и O-серий.

Строгое доказательство и установление точности закона Мозли дать невозможно, так как этот вопрос сводится к проблеме многих тел. Можно дать лишь грубую интерпретацию закона Мозли, сведя проблему многих тел к одноэлектронной задаче. Это приводит к вполне удовлетворительным результатам, в особенности для K- и L-серий, а главное — устанавливает физический смысл постоянных, входящих в формулу (48.3).

Пусть в слое K, состоящем из двух электронов, образовалась дырка, т. е. один электрон из этого слоя был удален за пределы атома. Пусть эта дырка заполняется электроном из слоя L, в результате чего произойдет излучение K_α-линии. Поведение этого электрона и будет интересовать нас в дальнейшем, пока не произойдет заполнение дырки в слое K. Можно считать, что на этот электрон все внешние электроны не действуют, так как они как бы образуют внешнюю оболочку со сферически распределенным зарядом в ней. Электрическое поле, действующее на

рассматриваемый электрон, создается зарядом ядра и другим электроном, оставшимся в K-слое. Обе эти частицы можно заменить одной — ядром с «эффективным» зарядом $(Z-1)e$: другой электрон K-слоя как бы экранирует поле ядра атома.

Такое же рассуждение, хотя и менее четкое, применимо и в том случае, когда образовалась дырка в слое L, заполняемая в дальнейшем одним из электронов слоя M с излучением L_α-линии. В этом случае по-прежнему надо интересоваться поведением такого электрона, пока он не заполнит дырку в слое L. Теперь экранирование производится сначала двумя электронами слоя K и семью электронами слоя L. Однако в дальнейшем, пока рассматриваемый электрон не заполнил дырку в слое L, экранирующее действие некоторых электронов слоя L постепенно выпадает. Можно приближенно принять, что в экранирующем действии принимает участие как бы половина из оставшихся семи электронов из слоя L. Это значит, что эффективный заряд ядра можно считать равным $(Z-a)e$, где постоянная a называется *постоянной экранирования.* Можно ожидать, что для L_α-линии $a \approx 5{,}5$, что не так плохо согласуется с тем, что дает опыт. Впрочем, на приведенное обоснование значения $a \approx 5{,}5$ следует смотреть как на грубую оценку. В частности, в наших рассуждениях не учтено, что уровень L состоит из трех подуровней. Точные значения постоянных экранирования следует определять экспериментально.

В обоих случаях задача свелась к одноэлектронной, подобно тому, как это имело место при объяснении спектральных серий щелочных металлов. Частоты излучаемых линий будут определяться формулой

$$\nu = cR(Z-a)^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \tag{48.4}$$

где R — постоянная Ридберга (см. § 13). Отсюда и получается формула (48.3), так как для рассматриваемой линии квантовые числа n_1 и n_2 фиксированы. Для K_α-линии $n = 1$, $n_2 = 2$, а $a = 1$, как это было обосновано выше. Поэтому

$$\nu_{K_\alpha} = \frac{3}{4}\, cR(Z-1)^2. \tag{48.5}$$

Для L_α-линии $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, так что

$$\nu_{L_\alpha} = \frac{5}{16}\, cR(Z - a_{L_\alpha})^2, \text{ где } a_{L_\alpha} \approx 5{,}5. \tag{48.6}$$

7. Рентгеновские спектры поглощения отличаются той характерной особенностью, что в них *нет обращения линий.* Если через слой какого-либо элемента пропустить пучок тормозного рентгеновского излучения (т. е. излучения, разлагающегося в сплошной спектр), то на месте характеристических линий не появятся темные линии, как это было бы в случае оптических спектров. Это объясняется тем, что в веществе, через которое проходит рентгеновский пучок, *нет атомов в возбужденных состояниях.* Все внутренние электронные оболочки заполнены, в них

нет дырок, в которые при облучении рентгеновскими лучами могли бы перейти электроны из более глубоких энергетических уровней.

Поглощение рентгеновских лучей веществом совершенно не зависит от его оптических свойств. Например, белое прозрачное свинцовое стекло толщиной в несколько миллиметров практически полностью поглощает рентгеновские лучи, а потому и применяется для защиты персонала, обслуживающего рентгеновские установки. Тонкий же лист алюминия, абсолютно непрозрачный для видимого света, хорошо пропускает рентгеновские лучи; для рентгеновских лучей, получаемых в технических рентгеновских трубках (при напряжениях ~ 100 кВ), он почти совершенно прозрачен.

8. Параллельный пучок рентгеновских лучей при прохождении через вещество испытывает ослабление. Оно вызывается двумя причинами. Во-первых, *рассеянием*, когда часть лучей отклоняется в сторону и поэтому выходит из первоначального пучка. Это явление аналогично рассеянию видимого света в мутных средах. Но в случае видимого света мутность среды вызывается либо наличием в среде посторонних частиц с другим показателем преломления, либо (при отсутствии таких частиц) флуктуациями плотности самого вещества (см. т. IV, § 98). Рассеяние на флуктуациях плотности называется *молекулярным* или *релеевским*. Для рентгеновских же лучей ввиду малости их длин волн всякая среда является *сильно мутной*. Здесь роль неоднородностей, вызывающих рассеяние, играют не малые макроскопические кусочки вещества, а отдельные атомы и даже электроны в атомах. В случае мягкого рентгеновского излучения, когда длина волны больше или сравнима с размерами атома, электроны в атоме ведут себя как связанные — атом рассеивает как целое, а потому волны, рассеиваемые отдельными электронами атома, *когерентны*. В противоположном случае очень жестких рентгеновских лучей длина волны мала по сравнению с размерами атома. Тогда на электронах атома происходит *некогерентное* комптоновское рассеяние.

Количественное различие в рассеянии видимого света и рентгеновского излучения можно иллюстрировать следующим примером. Параллельный пучок видимого света вследствие молекулярного рассеяния ослабевает в e раз в слое совершенно чистой воды толщиной около 1 км, тогда как рентгеновский луч испытывает такое же относительное ослабление всего на расстоянии порядка 5 см.

Во-вторых, ослабление пучка рентгеновских лучей происходит из-за *истинного поглощения* или *абсорбции*, когда часть энергии пучка в конце концов переходит в тепло.

Если параллельный пучок рентгеновских лучей монохроматичен ($\lambda = \text{const}$), то ослабление его интенсивности I на отрезке dx однородного вещества определяется соотношением $dI = -\mu I\,dx$, где постоянная μ называется *коэффициентом ослабления* рентгеновских лучей. Отсюда следует

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x}, \tag{48.7}$$

т. е. при прохождении расстояния $x = 1/\mu$ интенсивность убывает в e раз. Ослабление интенсивности пучка происходит как за счет истинного поглощения, так и за счет рассеяния рентгеновских лучей, так что можно написать

$$\mu = \tau + \sigma, \tag{48.8}$$

где τ называется *коэффициентом истинного поглощения*, а σ — *коэффициентом рассеяния* рентгеновских лучей.

Все коэффициенты μ, σ, τ пропорциональны плотности вещества ρ, а потому удобнее пользоваться так называемыми *массовыми коэффициентами*, т. е. величинами

$$\mu_m = \frac{\mu}{\rho}, \quad \tau_m = \frac{\tau}{\rho}, \quad \sigma_m = \frac{\sigma}{\rho}. \tag{48.9}$$

Введя μ_m в формулу (48.7), запишем ее в виде

$$I(x) = I_0 e^{-\mu_m \rho x}. \tag{48.10}$$

Если S — площадь поперечного сечения пучка, то величина $S\rho x$ означает массу вещества, проходимого рентгеновским пучком на расстоянии x. Следовательно, ρx есть масса вещества, проходимого пучком на расстоянии x, если площадь поперечного сечения пучка равна единице.

В теоретических расчетах еще удобнее пользоваться так называемыми *атомными коэффициентами*:

$$\begin{gathered} \mu_a = \frac{\mu}{\rho} m = \frac{\mu}{\rho} \frac{A}{N_\text{A}}, \quad \tau_a = \frac{\tau}{\rho} m = \frac{\tau}{\rho} \frac{A}{N_\text{A}}, \\ \sigma_a = \frac{\sigma}{\rho} m = \frac{\sigma}{\rho} \frac{A}{N_\text{A}}, \end{gathered} \tag{48.11}$$

где m — масса атома, равная $m = A/N_\text{A}$, A — масса моля, N_A — постоянная Авогадро. Эти коэффициенты имеют размерность площади, а потому могут быть истолкованы как *поперечные сечения атома* по отношению к ослаблению, поглощению и рассеянию рентгеновских лучей. Например, μ_a характеризует ослабление интенсивности рентгеновского пучка в слое, содержащем один атом на единице площади поперечного сечения пучка. Если в формулах (48.11) m означает массу не атома, а молекулы, то величины, определяемые этими формулами, следует назвать *молекулярными коэффициентами.*

9. Коэффициент поглощения рентгеновских лучей вообще возрастает с увеличением длины волны. Однако при некоторых значениях длины волны он резко падает, а затем начинает снова плавно возрастать. Такая особенность поглощения рентгеновских лучей имеет простое физическое объяснение. Пусть длина волны рентгеновских лучей настолько мала, что возбуждаются все рентгеновские уровни, включая K-уровень. На это возбуждение затрачивается энергия рентгеновских лучей. При увеличении длины волны, начиная с некоторого значения λ, энергии рентгеновского кванта становится недостаточно,

чтобы возбудить K-уровень. Это и сказывается на резком уменьшении поглощения, — появляется так называемый *край поглощения.* При дальнейшем увеличении длины волны перестают последовательно возбуждаться L_{I}-, L_{II}-, L_{III}-уровни (см. схему уровней на рис. 88), что ведет к появлению новых краев поглощения и т. д.

Довольно точно соблюдается эмпирически установленное соотношение

$$\tau_a = CZ^4\lambda^3, \tag{48.12}$$

где постоянная C испытывает всякий раз скачкообразное уменьшение при переходе через край поглощения. Из формулы (48.12), конечно, следует

$$\sigma_m = \frac{\tau_a}{\rho} = C'\frac{Z^4\lambda^3}{A}, \tag{48.13}$$

где $C' = CN_{\text{A}}$ — новая скачкообразно меняющаяся постоянная.

На схематическом рис. 90 изображен (в произвольных единицах) ход массового коэффициента поглощения для серебра и меди в зависимости от длины волны λ. На вертикальной оси отложена величина $\tau_m^{1/3}$. Зависимость всюду линейная, но при длинах волн $\lambda =$ $= 0{,}0485$ нм для серебра и $\lambda = 0{,}13785$ нм для меди наблюдается край поглощения, связанный с прекращением возбуждения K-уровня. Если бы кривую поглощения для серебра продолжить в сторону более длинных волн, то на ней появились бы три зубца при длинах волн 0,3245, 0,3506, 0,3993 нм, соответствующие новым краям поглощения (уровень L тройной, как видно из рис. 88).

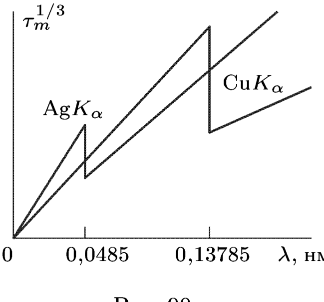


Рис. 90

Особенность поглощения рентгеновских лучей состоит в том, что оно является чисто *атомным свойством.* Молекулярный коэффициент поглощения *аддитивно складывается* из атомных коэффициентов элементов, входящих в состав молекулы. Пользуясь этим, молекулярные коэффициенты поглощения бесчисленного множества химических соединений можно вычислить, зная атомные коэффициенты поглощения элементов. Далее, как видно из формулы (48.12), атомные коэффициенты поглощения быстро возрастают с увеличением порядкового номера элемента — пропорционально Z^4. На этих особенностях поглощения рентгеновских лучей основано их применение для целей просвечивания (см. задачу 1 к этому параграфу).

10. В заключение этого параграфа рассмотрим еще одно явление, происходящее в электронной оболочке атома и вызывающее также поглощение рентгеновских лучей. Оно называется *эффектом Оже* (р. 1899) или *автоионизацией возбужденного атома.* Это явление связано с перераспределением энергии внутри возбужденного атома. В отличие от обычной фотоионизации, когда поглощенный рентгеновский

квант приводит непосредственно к вылету электрона за пределы атома, эффект Оже происходит в две стадии. На первой стадии происходит поглощение рентгеновского кванта, сопровождающееся возбуждением атома, а именно освобождением электрона из K-слоя, т. е. образованием дырки в этом слое. На второй стадии происходит заполнение этой дырки электроном, перескакивающим из L-слоя. Избыток энергии $\mathscr{E}_K - \mathscr{E}_L$ либо выделяется в виде кванта характеристического излучения, что было рассмотрено выше, либо приводит к выбрасыванию одного электрона из вышележащих оболочек атома. Этот процесс и называется эффектом Оже, а выброшенный электрон — *электроном Оже.* Таким образом, дырка в L-слое сохраняется, но возникает вторая дырка в одном из вышележащих слоев. Иными словами, атом становится дважды ионизованным.

Фотографируя в камере Вильсона фотоэлектроны, освобождаемые рентгеновскими лучами из атомов тяжелых инертных газов (например, криптона), Оже обнаружил, что в некоторых случаях в одной и той же точке берут начало *два электронных следа.* Один электрон образуется в результате обычной фотоионизации на K-слое, другой — вследствие внутреннего перераспределения энергии возбужденного атома, т. е. вследствие эффекта Оже.

Электроны Оже всегда уносят значительную долю энергии возбужденного атома. Особенно сильно эффект Оже проявляется в тех случаях, когда переходы с излучением фотонов запрещены (например, в 0 – 0-переходах).

ЗАДАЧИ

1. Сравнить коэффициенты поглощения рентгеновских лучей для костей и тканей человеческого тела. Вещество кости в основном составляет фосфорнокислый кальций $Ca_3(PO_4)_2$. Поглощение ткани обусловлено главным образом входящей в нее водой H_2O.

Решение. На основании формулы (48.12) с учетом значений порядковых номеров элементов получим

$$\frac{(\tau_a)_{\text{кость}}}{(\tau_a)_{\text{ткань}}} = \frac{3 \cdot 20^4 + 2 \cdot 15^4 + 8 \cdot 8^4}{2 \cdot 1^4 + 8^4} \approx 150.$$

Для определения отношения массовых коэффициентов поглощения, согласно (48.13), надо учесть отношение молекулярных масс рассматриваемых химических соединений. Для $Ca_3(PO_4)_2$ $A = 3 \cdot 40 + 2 \cdot 30 + 8 \cdot 16 = 308$; для H_2O $A = 2 \cdot 1 + 16 = 18$. Поэтому

$$\frac{(\tau_m)_{\text{кость}}}{(\tau_m)_{\text{ткань}}} \approx 150 \cdot \frac{18}{308} \approx 9,$$

т. е. массовый коэффициент поглощения кости примерно в 10 раз превосходит такой же коэффициент ткани. Из-за различия плотностей отношение коэффициентов поглощения $(\tau)_{\text{кость}}$ и $(\tau)_{\text{ткань}}$ еще примерно в 2–3 раза больше. Этого достаточно, чтобы понять, почему на рентгеновских снимках тень от костей выделяется так резко.

2. Как известно, у редких земель внутренняя оболочка f заполняется после заполнения наружных оболочек. Таким образом, внутри электронной

атмосферы атома имеются незаполненные места — дырки. Может ли происходить спонтанное рентгеновское излучение, возникающее при заполнении таких дырок?

Ответ. Не может, так как при переходе электрона из наружных оболочек в рассматриваемую дырку энергия атома не уменьшается, а увеличивается.

§ 49. Атом гелия

1. Простейшими после атома водорода являются атом гелия ($Z = 2$) и аналогичные ему ионы Li^+ ($Z = 3$), Be^{++} ($Z = 4$), Be^{3+} ($Z = 5$), ..., электронные оболочки которых содержат по два электрона. В спектрах этих двухэлектронных атомов и ионов встречаются те же спектральные серии, что и у атомов щелочных металлов, но каждая из серий представлена в двух экземплярах: есть две главные серии, две резкие, две диффузные и т. д. В одном экземпляре серий все линии простые (синглеты), тогда как в другом — триплеты, т. е. каждая из линий состоит из трех близко расположенных линий.

Наиболее известной в спектре гелия является желтая линия D_3, благодаря которой гелий впервые был обнаружен на Солнце в 1867 г. Это — триплет с длинами волн 587,5963; 587,5643 и 587,5601 нм и отношениями интенсивностей 1 : 3 : 5. Расстояние между двумя последними линиями составляет всего 0,0042 нм. Поэтому долгое время эти две линии принимали за одну, а триплет D_3 — за дублет. Триплет D_3 является первым членом первой побочной серии триплетов. Главная серия триплетов гелия лежит в инфракрасной части спектра. Соответствующие серии синглетов расположены преимущественно в области ультрафиолета.

Между синглетными и триплетными энергетическими уровнями гелия не осуществляются квантовые переходы (так называемый *запрет интеркомбинаций*). Этот факт послужил основанием для гипотезы, согласно которой гелий состоит из двух различных элементов: *ортогелия*, дающего триплетные линии, и *парагелия*, спектральные линии которого — синглеты. Гипотеза эта, как будет показано в дальнейшем, оказалась неправильной, а запрет интеркомбинаций — не абсолютно точным правилом. Это видно из того, что в спектре гелия имеется линия, правда единственная, с длиной волны 591,6 нм, получающаяся при переходе с триплетного уровня ${}^3P_{1/2}$ на синглетный уровень ${}^1S_0$.

2. Теория многоэлектронных атомов в квантовой механике не встречает принципиальных трудностей, хотя практические вычисления весьма сложны и громоздки и могут быть выполнены только на машинах. В простейшем случае атома гелия и аналогичных ему ионов, если не учитывать спины, задача сводится к решению уравнения Шредингера с двумя электронами. Ниже рассматривается этот случай, хотя все вычисления и опускаются. Для стационарного состояния уравнение Шредингера записывается в виде

$$\widehat{H}\psi \equiv (\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 + \widehat{U}_{12})\psi = \mathscr{E}\psi, \tag{49.1}$$

где волновая функция ψ зависит от координат обоих электронов, $\mathscr{E}$ — энергия стационарного состояния, $\widehat{H}_1$ и $\widehat{H}_2$ — гамильтонианы первого и второго электронов в отсутствие взаимодействия между ними:

$$\widehat{H}_1 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_1^2 - \frac{Ze^2}{r_1}, \tag{49.2}$$

$$\widehat{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_2^2 - \frac{Ze^2}{r_2}, \tag{49.3}$$

а $\widehat{U}_{12}$ — часть полного гамильтониана, учитывающая взаимодействие между электронами:

$$\widehat{U}_{12} = \frac{e^2}{r_{12}}. \tag{49.4}$$

Здесь ∇_1^2 и ∇_2^2 — операторы Лапласа для первого и второго электронов:

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}, \quad \nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}.$$

Через $\mathbf{r}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_2(x_2, y_2, z_2)$ обозначены радиусы-векторы и декартовы координаты первого и второго электронов, а через r_{12} — расстояние между ними. Заряд ядра для общности принят равным Z (в случае гелия $Z = 2$). Ядро атома в рассматриваемом приближении считается неподвижным и принимается за начало координат.

3. Сформулированная задача аналогична классической задаче трех тел, рассматриваемой в небесной механике. В ней речь идет о движении двух планет в гравитационном поле Солнца с учетом гравитационного взаимодействия между самими планетами. Такая задача, хотя в принципе и допускает аналитическое решение в виде рядов, но эти ряды абсолютно непригодны для практических расчетов (см. подстрочное примечание к § 16 на с. 90). Но в небесной механике разработаны превосходные приближенные методы расчета, вполне удовлетворяющие высоким требованиям наблюдательной астрономии. В их основе лежит *теория возмущений*, использующая тот факт, что взаимодействие между планетами мало по сравнению с взаимодействием каждой планеты с Солнцем. В нулевом приближении взаимодействием между планетами можно совсем пренебречь. Используя решение, полученное в нулевом приближении, можно затем учесть взаимодействие между планетами в первом приближении, после этого найти второе приближение и т. д. По тому же пути идет и теория возмущений квантовой механики в случае атома с двумя электронами. Она также в нулевом приближении отбрасывает взаимодействие между электронами. Правда, здесь ситуация значительно менее благоприятна, чем в небесной механике, так как взаимодействие между электронами отнюдь не мало по сравнению с взаимодействием каждого из них с атомным ядром. Однако получающиеся результаты довольно удовлетворительны, чем и оправдывается использование методов теории возмущений.

Трудность задачи об атоме гелия обусловлена наличием в уравнении (49.1) члена $\widehat{U}_{12}\psi$, зависящего от координат *обоих* электронов. Благодаря этому уравнение (49.1) не имеет решений с разделяющимися переменными. В теории возмущений член $\widehat{U}_{12}\psi$ рассматривается как «малая» поправка и в нулевом приближении отбрасывается. Таким образом, уравнение нулевого приближения имеет вид

$$\widehat{H}^0\psi^0 = \mathscr{E}^0\psi^0, \tag{49.5}$$

где через $\widehat{H}^0$ обозначен гамильтониан в нулевом приближении, т. е. оператор $\widehat{H}^0 = \widehat{H}^1 + \widehat{H}^2$, в котором возмущающий член $\widehat{U}_{12}$ отброшен. Аналогично, через ψ^0 и $\mathscr{E}^0$ обозначены волновая функция и собственное значение энергии в нулевом приближении. Найдя величины ψ^0 и $\mathscr{E}^0$, ищем решение в первом приближении $\psi = \psi^0 + \psi^1$, $\mathscr{E} = \mathscr{E}^0 + \mathscr{E}^1$. Для этого служит уравнение

$$(\widehat{H}^0 + \widehat{U}_{12})(\psi^0 + \psi^1) = (\mathscr{E}^0 + \mathscr{E}^1)(\psi^0 + \psi^1),$$

или на основании (49.5)

$$\widehat{H}^0\psi^1 + \widehat{U}_{12}\psi^0 + \widehat{U}_{12}\psi^1 = \mathscr{E}^1\psi^0 + \mathscr{E}^0\psi^1 + \mathscr{E}^1\psi^1.$$

Здесь величины $\widehat{U}_{12}\psi^1$ и $\mathscr{E}^1\psi^1$ следует рассматривать как «малые» более высокого порядка и в первом приближении отбросить. Таким образом, в первом приближении

$$(\widehat{H}^0 - \mathscr{E}^0)\psi^1 = (\mathscr{E}^1 - \widehat{U}_{12})\psi^0. \tag{49.6}$$

Это — неоднородное уравнение, правая часть которого известна. Можно весьма просто доказать (на чем мы не останавливаемся), что уравнение (49.6) имеет решение только при таких значениях параметра $\mathscr{E}^1$, когда правая часть ортогональна к волновой функции ψ^0 нулевого приближения, т. е.

$$\int \psi^{0*}(\mathscr{E}^1 - \widehat{U}_{12})\psi^0\, d\tau = 0,$$

причем интегрирование производится по шестимерному объему $d\tau = dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2$ обоих электронов. Таким образом, если функция ψ^0 нормирована к единице, то получается

$$\mathscr{E}^1 = \int \psi^{0*}\widehat{U}_{12}\psi^0\, d\tau, \tag{49.7}$$

т. е. поправка $\mathscr{E}^1$ к энергии в первом приближении равна потенциальной энергии U_{12} взаимодействия электронов, усредненной с помощью волновых функций нулевого приближения. Вычислив $\mathscr{E}^1$, можно затем решить уравнение (49.6) и найти ψ^1, на чем мы не останавливаемся.

Аналогичным путем можно найти второе приближение $\mathscr{E} = \mathscr{E}^0 + \mathscr{E}^1 + \mathscr{E}^2$, $\psi = \psi^0 + \psi^1 + \psi^2$, рассматривая поправки $\mathscr{E}^2$ и ψ^2 как величины еще более высокого порядка малости, и т. д.

4. Обратимся теперь к уравнению (49.5), т. е. к решению в нулевом приближении. В более подробной записи это уравнение гласит

$$(\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2)\psi^0 = \mathscr{E}^0\psi^0, \tag{49.8}$$

где оператор $\widehat{H}_1$ зависит только от координат первого электрона, а оператор $\widehat{H}_2$ — только от координат второго. Поэтому решение ψ^0 будет решением с разделяющимися переменными:

$$\psi^0 = \psi^0(1)\psi^0(2), \tag{49.9}$$

где цифрой 1 обозначена совокупность координат первого, а цифрой 2 — второго электронов. После подстановки в предыдущее уравнение и деления на $\psi^0 = \psi^0(1)\psi^0(2)$ получится

$$\frac{\widehat{H}_1\psi^0(1)}{\psi^0(1)} + \frac{\widehat{H}_2\psi^0(2)}{\psi^0(2)} = \mathscr{E}^0.$$

Первое слагаемое в левой части зависит только от координат 1, а второе — только от координат 2. Так как сумма этих слагаемых $\mathscr{E}^0$ постоянна, то должно быть постоянно и каждое из слагаемых в отдельности. Иными словами, должны выполняться уравнения

$$\widehat{H}_1\psi^0(1) = \mathscr{E}_1^0\psi^0(1), \quad \widehat{H}_2\psi^0(2) = \mathscr{E}_2^0\psi^0(2), \tag{49.10}$$

где $\mathscr{E}_1^0$ и $\mathscr{E}_2^0$ — постоянные, удовлетворяющие условию

$$\mathscr{E}_1^0 + \mathscr{E}_2^0 = \mathscr{E}^0. \tag{49.11}$$

Оба уравнения (49.10) по существу тождественны. Они отличаются друг от друга только обозначениями координат первого и второго электронов, а также числовыми значениями постоянных $\mathscr{E}_1^0$ и $\mathscr{E}_2^0$ (поскольку электроны могут находиться в различных состояниях; если же эти состояния одинаковы, то $\mathscr{E}_1^0 = \mathscr{E}_2^0$. Каждое из уравнений (49.10) описывает стационарное состояние электрона в поле ядра в предположении, что взаимодействие между электронами не учитывается. В этом предположении

$$\widehat{H}_1 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_1^2 - \frac{Ze^2}{r_1}, \quad \widehat{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_2^2 - \frac{Ze^2}{r_2}. \tag{49.12}$$

Тем самым задача в нулевом приближении сведена к задаче нахождения собственных функций и собственных значений одноэлектронного водородоподобного атома. Решение последней задачи хорошо известно.

5. Найдем прежде всего в нулевом приближении энергию полной ионизации нейтрального атома гелия, т. е. работу по удалению в бесконечность обоих его электронов, когда сам атом находится в основном состоянии. Работа по удалению электрона в бесконечность из атома водорода в основном состоянии равна $\mu e^4/2\hbar^2 \approx 13{,}539$ эВ. Для однократно ионизованного гелиеподобного атома эта работа в Z^2 раз больше (см. формулу (13.12)). Поэтому, согласно формуле (49.11), работа

по удалению обоих электронов гелиеподобного атома в бесконечность в нулевом приближении будет

$$\mathscr{E}^0_{\text{иониз}} = 2Z^2 \frac{\mu e^4}{2\hbar^2}. \tag{49.13}$$

Результат этот вполне очевиден, поскольку в нулевом приближении взаимодействие электронов не учитывается. В частности, для атома гелия формула (49.13) дает $\mathscr{E}_{\text{иониз}} = 108{,}3$ эВ.

Зная волновую функцию (49.9) в нулевом приближении, можно по формуле (49.7), в которой следует положить $U_{12} = e^2/r_{12}$, найти поправку к энергии полной ионизации гелиеподобного атома, которую дает первое приближение. Вычисления приводят к результату

$$(\mathscr{E}^0 + \mathscr{E}^1)_{\text{иониз}} = \left(2Z^2 - \frac{5}{4}\,Z\right)\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}. \tag{49.14}$$

Числовые результаты приведены в табл. 5. В нулевом приближении, как и следовало ожидать, получается большое различие между вычислением и опытом: ошибка составляет примерно 40 % для He и 10 % для C^{4+}. Но уже в первом приближении получается хорошее согласие теории с опытом. Это тем более удивительно, что энергия взаимодействия между электронами отнюдь не мала по сравнению с энергией их взаимодействия с атомными ядрами. Многие авторы вычисляли в высших приближениях энергии ионизации и возбуждения атома гелия, а также разработали более совершенные методы, отличные от теории возмущений. Не имея возможности останавливаться на этих вопросах, приводим в последнем столбце таблицы результаты расчетов Хиллерааса (1898–1965), полученные без учета конечности масс ядер и поправок на теорию относительности. Согласие с опытом очень хорошее.

Таблица 5

Атом или ион	Энергия полной ионизации, эВ			
	Наблюдено	Вычислено		
		в нулевом приближении	в первом приближении	по Хиллераасу
He	78,98	108,3	74,46	78,98
Li^{+}	198,04	243,7	192,9	198,03
Be^{2+}	371,51	433,2	365,5	371,49
B^{3+}	599,43	676,9	592,3	599,40
C^{4+}	881,83	974,8	873,3	881,82

6. Обратимся теперь к объяснению, почему в спектрах гелия и гелиеподобных ионов происходит удвоение спектральных серий, о котором говорилось в начале этого параграфа. Заметим прежде всего, что все серии получаются путем возбуждения одного электрона, а не обоих электронов сразу. Последний процесс значительно менее вероятен, чем

первый, и рассматриваться не будет. Поэтому рассмотрим в нулевом приближении такое состояние атома, когда один электрон не возбужден, а другой находится в возбужденном состоянии. Состояние первого электрона в нулевом приближении описывается волновой функцией $\psi_1^0(1)$, а второго — функцией $\psi_k^0(2)$. Нижний индекс означает совокупность трех квантовых чисел $(n,\ l,\ m_l)$, характеризующих состояние электрона. В частности, нижнему индексу 1 соответствует нормальное (невозбужденное) состояние $(n = 1,\ l = 0,\ m_l = 0)$. От наличия спина электрона мы временно отвлекаемся.

Волновая функция обоих электронов в нулевом приближении представится произведением $\psi_1^0(1)\psi_k^0(2)$. Однако такая функция не удовлетворяет требованию тождественности одинаковых частиц (электронов). Если в ней поменять местами первый и второй электроны, то получится функция $\psi_k^0(1)\psi_1^0(2)$, описывающая то же состояние атома: имеет место обменное вырождение (см. § 46). Линейной суперпозицией обоих квантовых состояний получается множество мыслимых состояний одной и той же энергии. Из них из-за тождественности электронов могут реализоваться только состояния, описываемые симметричными и антисимметричными волновыми функциями

$$\begin{aligned} \psi_s^0(1,2) &= \psi_1^0(1)\psi_k^0(2) + \psi_k^0(1)\psi_1^0(2), \\ \psi_a^0(1,2) &= \psi_1^0(1)\psi_k^0(2) - \psi_k^0(1)\psi_1^0(2). \end{aligned} \tag{49.15}$$

Симметрия и антисимметрия функций (49.15) относится к операции, в которой электроны обмениваются своими местами, т. е. аргументами в волновой функции, причем «место» характеризуется значениями только пространственных координат: спиновые координаты во внимание не принимаются. Между тем принцип антисимметрии волновых функций, которому должны подчиняться электроны, имеет в виду *полные* волновые функции, т. е. функции, зависящие не только от пространственных, но и от спиновых координат электронов. Здесь «место» электрона в волновой функции определяется не тремя, а *четырьмя* координатами. Поэтому обе неполные, т. е. пространственные функции (49.15), поскольку они удовлетворяют требованию неразличимости тождественных частиц, допустимы при квантовом описании состояния атома. Это утверждение содержится также в первоначальной упрощенной формулировке принципа Паули. Последний исключает такие состояния атома, в которых оба электрона имеют одинаковые четверки квантовых чисел n, l, m_l, m_s, но не запрещает, чтобы у электронов были одинаковыми три квантовых числа при различии четвертых. В частности, возможны состояния, у которых $k = 1$, когда оба электрона находятся в основном состоянии, которое характеризуется значениями квантовых чисел $n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$. Для такого состояния, понятно, из двух возможных функций (49.15) надо взять только симметричную, так как антисимметричная тождественно обращается в нуль В этом случае обменное вырождение отсутствует,

а потому основному состоянию соответствует только одна волновая функция и один уровень энергии.

Теперь каждое из выражений (49.15) можно принять в качестве нулевого приближения и по методу теории возмущений отыскать первое приближение. Таким путем будут найдены две волновые функции, одна из которых симметрична по координатам, а другая антисимметрична. Их можно обозначить соответственно через $\psi_s(1,2)$ и $\psi_a(1,2)$ без верхнего индекса 0. Состояние с антисимметричной волновой функцией $\psi_a(1,2)$ называется *ортосостоянием*, а с симметричной волновой функцией $\psi_s(1,2)$ — *парасостоянием*. Таким образом, двух гелиев, как различных химических элементов, не существует. Орто- и парагелий суть *один и тот же химический элемент, но находящийся в различных квантовых состояниях*. Тем самым объяснено происхождение двух систем термов и соответствующих спектральных переходов между ними. Понятно, что такие переходы, если они сопровождаются излучением света, должны подчиняться правилам отбора, о которых говорилось в § 39.

7. Знание волновых функций нулевого приближения позволяет вычислить по формуле (49.7) поправку к энергии атома в первом приближении. Эта формула предполагает, однако, что волновая функция нормирована к единице. Поэтому и обе функции (49.15), симметричную и антисимметричную, надо предварительно нормировать. Обозначим соответствующие постоянные нормирующие множители через C_s и C_a. Для фактического проведения расчета, конечно, эти нормирующие множители надо вычислить. Мы не будем этого делать, так как нашей целью является только выяснение *принципиальной физической стороны вопроса*, а для этого знания числовых значений C_s и C_a не требуется. Однако различие C_s и C_a должно быть учтено. (Если бы C_s и C_a были одинаковы, то нормирующие множители можно было бы опустить, предполагая, что комбинации (49.15) уже нормированы.)

Для состояний, описываемых симметричной волновой функцией, поправка к энергии равна

$$\mathscr{E}_s^1 = |C_s|^2 \int \psi_s^{0*} \frac{e^2}{r_{12}} \psi_s^0 \, d\tau = |C_s|^2 \int \frac{e^2}{r_{12}} |\psi_s^0|^2 \, d\tau_1 \, d\tau_2, \qquad (49.16)$$

где $d\tau_1 = dx_1\, dy_1\, dz_1$, $d\tau_2 = dx_2\, dy_2\, dz_2$, а для состояний, описываемых антисимметричной волновой функцией,

$$\mathscr{E}_a^1 = |C_a|^2 \int \psi_a^{0*} \frac{e^2}{r_{12}} \psi_a^0 \, d\tau = |C_a|^2 \int \frac{e^2}{r_{12}} |\psi_a^0|^2 \, d\tau_1 \, d\tau_2. \qquad (49.17)$$

Подставив сюда значения волновых функций из (49.15) и выполнив умножение с учетом тождественности электронов, получим

$$\mathscr{E}_s^1 = |C_s|^2 (I_{\text{к}} + I_{\text{об}}), \quad \mathscr{E}_a^1 = |C_a|^2 (I_{\text{к}} - I_{\text{об}}), \qquad (49.18)$$

где введены обозначения

$$I_{\text{к}} = 2\int \frac{e^2}{r_{12}} \left|\psi_1^0(1)\right|^2 \left|\psi_k^0(2)\right|^2 \, d\tau,$$
$$I_{\text{об}} = 2\int \frac{e^2}{r_{12}} \psi_1^0(1)\psi_k^{0*}(1)\psi_k^0(2)\psi_1^{0*}(2)\, d\tau. \qquad (49.19)$$

Из формул (49.16) и (49.17) видно, что энергии $\mathscr{E}_s^1$ и $\mathscr{E}_a^1$ существенно положительны. Величина $I_{\text{к}}$ также существенно положительна, как это ясно из первой формулы (49.19). Таким образом,

$$I_{\text{к}} + I_{\text{об}} > 0, \quad I_{\text{к}} - I_{\text{об}} > 0.$$

Величина $I_{\text{об}}$ также положительна, как показывает фактическое вычисление ее с использованием явных выражений волновых функций водородоподобных атомов. Таким образом, как видно из формул (49.18), *энергетические уровни парасостояния лежат ниже энергетических уровней ортосостояния.* Поэтому *нормальным состоянием гелия является парасостояние.*

Член $I_{\text{к}}$ имеет наглядное классическое истолкование. Заряд одного электрона как бы «размазан» в пространстве с объемной плотностью $\rho_1 = e|\psi_1^0(1)|^2$, а другого — с объемной плотностью $\rho_2 = e|\psi_k^0(2)|^2$. Подынтегральное выражение в $I_{\text{к}}$ имеет смысл потенциальной энергии отталкивания зарядов $\rho_1\, d\tau_1$ и $\rho_2\, d\tau_2$, а интеграл в целом — потенциальной энергии взаимодействия обоих размазанных по пространству зарядов. Член $I_{\text{об}}$ не имеет классического истолкования и является сугубо квантовым. Выражаясь образно, можно сказать, что $I_{\text{об}}$ появляется потому, что каждый электрон как бы одновременно находится и в состоянии ψ_1^0, и в состоянии ψ_k^0. Величина $I_{\text{об}}$ называется *обменной энергией*, а соответствующее ей взаимодействие — *обменным взаимодействием.* Наличием обменной энергии и объясняется понижение энергетических уровней парасостояния и повышение уровней ортосостояния.

Не следует думать, что обменная энергия есть какой-то особый вид энергии. Она появляется только в результате *принципиальной неразличимости* двух квантовых состояний, из которых одно получается из другого в результате перестановки двух тождественных взаимодействующих частиц. Поэтому обменное взаимодействие специфично не только для кулоновских сил, а имеет место в системе любых тождественных частиц независимо от природы сил взаимодействия между ними. Например, обменное взаимодействие существует между нуклонами атомного ядра и проявляется в так называемом *насыщении ядерных сил.* Обменным взаимодействием объясняется явление ферромагнетизма.

8. Объясним теперь разделение спектральных термов атома гелия и соответствующих им спектральных линий на синглетные и триплетные. Для этого надо учесть наличие спинов у электронов. В нулевом приближении пространственная и спиновая части полной волновой функции разделяются, так что она может быть представлена в виде

произведения пространственной и спиновой волновых функций. Конечно, как и пространственные, спиновые волновые функции должны удовлетворять требованию либо симметрии, либо антисимметрии. Поэтому спиновых функций может быть только четыре, а именно:

$$\begin{aligned} \varphi_s^{(1)} &= \varphi_+(1)\varphi_+(2) \uparrow\uparrow, \\ \varphi_s^{(2)} &= \varphi_-(1)\varphi_-(2) \downarrow\downarrow, \\ \varphi_s^{(3)} &= \varphi_+(1)\varphi_-(2) + \varphi_+(2)\varphi_-(1) \uparrow\downarrow, \\ \varphi_a^{(4)} &= \varphi_+(1)\varphi_-(2) - \varphi_+(2)\varphi_-(1) \uparrow\downarrow . \end{aligned} \tag{49.20}$$

Здесь спиновые функции, в отличие от пространственных, обозначены буквой φ. Значок + у функции указывает, что проекция m_s спина электрона на направление, выделяемое орбитальным моментом, равна $+1/2$, а минус означает, что она равна $-1/2$. Это для наглядности отмечено направлениями стрелок, поставленных справа у волновых функций. Первая симметричная функция $\varphi_s^{(1)}$ означает, что проекции m_s спинов обоих электронов равны $+1/2$, вторая $\varphi_s^{(2)}$ — что обе они равны $-1/2$. В третьей симметричной функции $\varphi_s^{(3)}$ проекции спинов обоих электронов имеют противоположные знаки. Таким образом, в первых двух случаях полный спин обоих электронов будет 1, причем его проекции соответственно равны $+1$ и -1. Но если полный спин равен 1, то его проекции на избранное направление могут иметь три значения: $+1$, -1 и 0. Третий случай и осуществляется оставшейся симметричной волновой функцией $\varphi_s^{(3)}$.

Что касается антисимметричной спиновой функции $\varphi_a^{(4)}$, то ей соответствует проекция спина, равная нулю. А так как это единственная проекция, то полный спин в этом состоянии также равен нулю.

Четыре спиновые функции (49.20) можно комбинировать с пространственными функциями ψ_s и ψ_a, чтобы получить полную волновую функцию. Однако, поскольку речь идет о системах двух электронов, полная волновая функция их должна быть антисимметрична относительно операции перестановки частиц в полной волновой функции, характеризующейся пространственными и спиновыми координатами. Этому условию удовлетворяют только четыре комбинации:

$$\varphi_s^{(1)}\psi_a, \quad \varphi_s^{(2)}\psi_a, \quad \varphi_s^{(3)}\psi_a \quad \text{и} \quad \varphi_a^{(4)}\psi_s.$$

От их нормировки, не играющей роли в разбираемом вопросе, можно отвлечься. Пока что речь шла только о комбинациях в нулевом приближении. Но и во всех последующих приближениях из-за симметрии энергии взаимодействия Ze^2/r_{12} возникают волновые функции того же типа симметрии. Первые три функции образуют триплет с полным спином 1 и его проекциями $+1, -1, 0$. Этому триплету соответствует ортосостояние. Его энергетические уровни и спектральные линии, подчиняющиеся правилам отбора, расщепляются на три подуровня

и три компоненты из-за спин-орбитального взаимодействия. В этом состоянии атомы гелия имеют отличные от нуля магнитные моменты, а потому в магнитном поле дают зеемановское расщепление.

Волновая же функция $\varphi_a \psi_s$ описывает парасостояние. В этом случае проекция полного спина равна нулю. А так как это синглетное состояние, то и полный спин в парасостоянии будет нуль. Атомы гелия в синглетном состоянии не имеют магнитных моментов, а потому не дают зеемановского расщепления.

Что касается запрета интеркомбинаций, о котором было сказано в начале этого параграфа, то этот запрет связан с сохранением спина электронов при излучении, а потому не является абсолютно жестким и допускает исключения (см. § 39, п. 5).

ЗАДАЧИ

1. Зная энергию полной ионизации нейтрального атома гелия (см. табл. 5) в основном состоянии, найти энергию однократной ионизации того же атома, а затем энергию ионизации образовавшегося иона He^+.

Решение. После удаления одного электрона нейтральный атом гелия переходит в водородоподобный ион с зарядовым числом $Z = 2$. Энергия ионизации такого иона равна $13{,}539Z^2 = 54{,}156$ эВ. Поэтому для удаления первого электрона надо совершить работу $78{,}98 - 54{,}16 = 24{,}82$ эВ, а для удаления второго 54,156 эВ.

2. Оценить по порядку величины энергию однократной ионизации атома лития в основном состоянии.

Решение. Для оценки можно предположить, что два K-электрона атома лития экранируют поле ядра, как бы уменьшая зарядовое число до $Z = 3 - 2 = 1$. При таком рассмотрении сформулированная задача сводится к определению работы ионизации водородоподобного атома при удалении электрона из L-слоя. Она равна

$$\frac{13{,}539}{n^2} = \frac{13{,}539}{4} = 3{,}38 \text{ эВ}.$$

Экспериментальное значение равно 5,37 эВ (см. табл. 4).

3. Зная энергию однократной ионизации атома лития из основного состояния (см. предыдущую задачу), а также энергию полной ионизации гелиеподобного иона Li^+ (см. табл. 5), найти энергию ионизации нейтрального лития в основном состоянии при удалении из него двух электронов.

Ответ. 81,56 эВ.

§ 50. Химическая связь. Молекула водорода

1. Первоначально химия была вынуждена ввести предположение о существовании особых «химических сил», чтобы объяснить образование молекул из атомов, а также химические реакции между атомами или молекулами. На самом деле таких сил не существует — они сводятся к обычным электрическим (кулоновским) силам взаимодействия между заряженными частицами, т. е. электронами и ядрами, из которых состоят атомы. Но такое сведение возможно только на основе квантовой механики.

Различают два рода химических связей: *ионную* (*гетерополярную*) и *ковалентную* (*гомеополярную*). Ионная связь реализуется в тех случаях, когда молекулу можно представить как образование, состоящее из двух ионов: положительного и отрицательного (например, молекула NaCl состоит из ионов Na^+ и Cl^-). Если же это сделать невозможно, то связь называется гомеополярной.

Теория гетерополярной связи (носящая, впрочем, полуэмпирический характер) разрабатывалась, и не без успеха, еще до создания квантовой механики. Гомеополярная же связь не поддается классическому объяснению. Причина этого состоит в том, что силы, приводящие к такой связи, являются *обменными*, а потому требуют принципиально квантового рассмотрения. Уясним этот вопрос на примере простейшей гомеополярной молекулы — молекулы водорода. Впервые это было сделано в 1927 г. Гайтлером (1904–1981) и Ф. Лондоном (1900–1954), решившими задачу о молекуле водорода по методу теории возмущений. Впоследствии та же задача рассматривалась математически более совершенными методами, дающими значительно лучшую точность. Но прием Гайтлера и Лондона проще всего приводит к цели. Мы ограничимся принципиальным рассмотрением работы Гайтлера и Лондона, опуская фактическое проведение расчетов, так как нашей задачей является только уяснение физической природы гомеополярной связи, а не теоретический расчет числовых значений величин, характеризующих ее.

2. В квантовой механике задача о молекуле водорода сводится к решению уравнения Шредингера для стационарных состояний

$$\widehat{H}\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathscr{E}\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \tag{50.1}$$

где через $\mathbf{r}_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{r}_2(x_2, y_2, z_2)$ обозначены координаты первого и второго электронов. Гамильтониан системы представляется в виде

$$\widehat{H} = \widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 + \widehat{V}, \tag{50.2}$$

где

$$\begin{gathered}\widehat{H}_1 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_1^2 - \frac{e^2}{r_{1A}}, \quad \widehat{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_2^2 - \frac{e^2}{r_{2B}}, \\ \widehat{V} \equiv V = -\frac{e^2}{r_{1B}} - \frac{e^2}{r_{2A}} + \frac{e^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{R}.\end{gathered} \tag{50.3}$$

Гамильтониан $\widehat{H}_1$ помимо оператора кинетической энергии электрона 1, содержит в качестве второго слагаемого потенциальную энергию того же электрона в кулоновском поле ядра A. Аналогичный смысл имеет гамильтониан $\widehat{H}_2$. Что касается гамильтониана $\widehat{V}$, то он описывает четыре взаимодействия: электрона 1 с ядром B, электрона 2 с ядром A, электронов между собой и ядер также между собой. Здесь $r_{1A}, r_{1B}, r_{2A}, r_{2B}$ — расстояния электронов 1 и 2 до ядер A и B соответственно, r_{12} — расстояние между электронами, R — расстояние между ядрами A и B. Тяжелые ядра A и B могут считаться неподвижными

(такое приближение называется *адиабатическим*). Поэтому ψ рассматривается как функция координат только электронов, а не атомных ядер. Расстояние R между ядрами, существенное как раз в проблеме гомеополярной связи, в волновую функцию ψ входит как параметр.

Разумеется, полная волновая функция зависит не только от пространственных координат электронов, но и от их спинов. Такая полная функция, конечно, должна быть антисимметрична относительно перестановки электронов в пространстве, характеризуемом декартовыми и спиновыми координатами. Однако можно ограничиться только *пространственными волновыми функциями*, а влияние спинов учесть, расчленив задачу на две: 1) в одной *спиновая функция антисимметрична*, тогда пространственная функция, как было выяснено в предыдущем параграфе, должна быть симметричной; 2) в другой *спиновая функция симметрична*, тогда пространственная антисимметрична. В первом случае суммарный спин двух электронов равен нулю, и следовательно, возможно только одно (*синглетное по спину*) состояние с симметричной пространственной функцией. Во втором случае суммарный спин двух электронов равен 1 и может ориентироваться в пространстве тремя различными способами (*триплетное по спину* состояние).

3. Конечно, сформулированная задача не допускает аналитического решения. Необходимо использовать приближенные методы. Чтобы понять, как это можно сделать в рамках теории возмущений, допустим, что оба атома водорода разведены один от другого достаточно далеко. Тогда атомы можно считать независимыми и каждый из них характеризовать своей волновой функцией. А так как речь идет о химической связи невозбужденных атомов, следует принять, что оба атома находятся в *основном* состоянии. При достаточном разведении волновые функции электронов 1 и 2 почти не перекрываются, так что можно считать, что электрон 1 принадлежит «своему ядру» A, а «чужое ядро» B на его состояние влияет мало. Аналогично, можно считать, что электрон 2 принадлежит «своему ядру» B. Именно по этой причине мы выделили выше из полного гамильтониана $\widehat{H}$ рассматриваемой системы слагаемые $\widehat{H}_1$ и $\widehat{H}_2$, представляющие собой гамильтонианы отдельных атомов. Их мы будем рассматривать как *главные части* гамильтониана и только их учтем в нулевом приближении. Слагаемое же V представляет собой гамильтониан *взаимодействия атомов*. Его мы будем рассматривать как *малое возмущение*, учитываемое в первом и высших приближениях. Это мотивируется не только удаленностью атомов друг от друга, но также и тем, что в выражении (50.3) для V первые два слагаемых частично компенсируются остальными двумя, поскольку последние входят в гамильтониан с противоположными знаками.

В синглетном состоянии, когда спиновая функция антисимметрична, в нулевом приближении получается симметричная пространственная волновая функция с разделяющимися переменными:

$$\psi_s = C_s[\psi_A(1)\psi_B(2) + \psi_A(2)\psi_B(1)], \tag{50.4}$$

где C_s — постоянная нормировки. Через ψ_A обозначена волновая функция электрона, когда он принадлежит ядру A, а через ψ_B — когда ядру B. Функции ψ_A и ψ_B считаются различными, хотя аналитически они и представляются одинаковыми выражениями. Это различие обусловлено тем, что они являются функциями различных переменных: в одном случае координаты отсчитываются от ядра A , в другом — от ядра B. В триплетном состоянии, когда спиновая функция симметрична, получается антисимметричная пространственная волновая функция

$$\psi_a = C_a[\psi_A(1)\psi_B(2) - \psi_A(2)\psi_B(1)], \tag{50.5}$$

где C_a — другая постоянная нормировки.

Постоянные C_s и C_a легко вычислить, хотя для наших целей существенно только то, что они различны. Определим для примера постоянную C_s. При этом мы будем считать, что сами функции ψ_A и ψ_B нормированы. Нормировка функции (50.4) означает, что $\int \psi_s^*\psi_s\,d\tau = 1$ или

$$\begin{aligned}|C_s|^2 \int \left[\psi_A^*(1)\psi_B^*(2) + \psi_A^*(2)\psi_B^*(1)\right]\left[\psi_A(1)\psi_B(2) +\right.\\ \left.+ \psi_A(2)\psi_B(1)\right] d\tau_1\,d\tau_2 = |C_s|^2 \int \psi_A^*(1)\psi_A(1)\,d\tau_1 \int \psi_B^*(2)\psi_B(2)\,d\tau_2 +\\ + |C_s|^2 \int \psi_A^*(2)\psi_A(2)\,d\tau_2 \int \psi_B^*(1)\psi_B(1)\,d\tau_1 +\\ + |C_s|^2 \int \psi_A^*(2)\psi_A(1)\psi_B^*(1)\psi_B(2)\,d\tau_1\,d\tau_2 +\\ + |C_s|^2 \int \psi_A^*(1)\psi_A(2)\psi_B^*(2)\psi_B(1)\,d\tau_1\,d\tau_2 = 1,\end{aligned}$$

где $d\tau = d\tau_1\,d\tau_2$, $d\tau_1 = dx_1\,dy_1\,dz_1$, $d\tau_2 = dx_2\,dy_2\,dz_2$. Первые два интеграла в правой части равны единице в силу нормировки волновых функций ψ_A и ψ_B, последние два интеграла равны между собой в силу тождественности электронов. Обозначим один из этих интегралов, например первый, через S, т. е. введем обозначение

$$S = \int \psi_A^*(2)\psi_A(1)\psi_B^*(1)\psi_B(2)\,d\tau_1\,d\tau_2. \tag{50.6}$$

Тогда

$$|C_s|^2(2 + 2S) = 1,$$

откуда

$$C_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+S}}, \tag{50.7}$$

если опустить несущественный фазовый множитель в выражении для C_s. Аналогично

$$C_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-S}}, \tag{50.8}$$

Конечно, волновые функции ψ_s и ψ_a представляются выражениями (50.4) и (50.5) только в нулевом приближении (нуль в индексе

для простоты опущен). Однако характер симметрии пространственных волновых функций сохраняется в любом приближении.

4. Знания волновых функций нулевого приближения достаточно для нахождения энергии в первом приближении. В синглетном состоянии (т. е. состоянии с симметричной пространственной волновой функцией)

$$\mathscr{E}_s = \int \psi_s^* (\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 + V)\psi_s \, d\tau, \tag{50.9}$$

а в триплетном состоянии (т. е. состоянии с антисимметричной пространственной волновой функцией)

$$\mathscr{E}_a = \int \psi_a^* (\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 + V)\psi_a \, d\tau. \tag{50.10}$$

Так как ψ_s, рассматриваемая как функция координат $\mathbf{r}_1$, является собственной функцией оператора $\widehat{H}_1$, то $\widehat{H}_1\psi_s = \mathscr{E}_1\psi_s$. Аналогично $\widehat{H}_2\psi_s = \mathscr{E}_2\psi_s$, где $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ — энергии рассматриваемых изолированных атомов. А так как эти атомы тождественны и находятся в основном состоянии, то $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 \equiv \mathscr{E}_0$, где $\mathscr{E}_0$ — энергия атома в основном состоянии. В точности то же самое имеет место и в случае функции ψ_a. Если учесть еще, что функции ψ_s и ψ_a нормированы, то ясно, что в обоих предыдущих выражениях гамильтониан $(\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2)$ приводит к появлению слагаемого $2\mathscr{E}_0$. Далее, как видно из (50.3), величина V содержит член e^2/R, зависящий только от расстояния между ядрами, но не зависящий от координат электронов. Этот член в излагаемой теории играет роль параметра и добавляет к энергиям $\mathscr{E}_s$ и $\mathscr{E}_a$ величину e^2/R. Таким образом,

$$\mathscr{E}_s = 2\mathscr{E}_0 + \Delta\mathscr{E}_s, \quad \mathscr{E}_a = 2\mathscr{E}_0 + \Delta\mathscr{E}_a, \tag{50.11}$$

где

$$\Delta\mathscr{E}_s = \int \psi_s^* V \psi_s \, d\tau, \quad \Delta\mathscr{E}_a = \int \psi_a^* V \psi_a \, d\tau. \tag{50.12}$$

Подставляя в формулы (50.12) выражения (50.4) и (50.5) для ψ_s и ψ_a и учитывая тождественность электронов, получим

$$\Delta\mathscr{E}_s = \frac{K+S}{1+S}, \quad \Delta\mathscr{E}_a = \frac{K-S}{1-S}, \tag{50.13}$$

где введено обозначение

$$K = \int V\psi_A^*(1)\psi_A(1)\psi_B^*(2)\psi_B(2)\, d\tau_1\, d\tau_2. \tag{50.14}$$

Величины $\Delta\mathscr{E}_s$ и $\Delta\mathscr{E}_a$ в первом приближении и представляют поправки к энергии электронов $2\mathscr{E}_0$, которые возникают из-за кулоновского взаимодействия атомов. В энергию этого взаимодействия ядра вносят член e^2/R. Кулоновское взаимодействие между электронами атомов носит двойственный характер. Оно выражается в одном случае через интеграл (50.14), в другом — через интеграл (50.6). В первом случае электрон 1 все время находится в одном и том же состоянии ψ_A,

а электрон 2 — в одном и том же состоянии ψ_B. В этом случае взаимодействие носит чисто классический характер, если только отвлечься от «размазывания» зарядов электронов в пространстве. Во втором случае каждый электрон находится одновременно и в состоянии ψ_A, и в состоянии ψ_B. Такое взаимодействие, как и в случае атома гелия, есть чисто квантовый эффект, не имеющий классического аналога. Оно называется *обменным взаимодействием* и возникает из-за тождественности электронов. В вычислениях тождественность проявляется в использовании симметричных и антисимметричных пространственных волновых функций.

5. Интегралы K и S, а с ними и энергии $\Delta\mathscr{E}_s$ и $\Delta\mathscr{E}_a$ являются функциями расстояния R между ядрами. На рис. 91 изображена зависимость этих энергий от расстояния R. По горизонтальной оси отложено отношение R/a, где a — боровский радиус. Из рисунка видно, что при сближении атомов в синглетном спиновом состоянии (спины антипараллельны) энергия взаимодействия сначала убывает, а затем быстро возрастает. Минимум достигается при расстоянии R, обозначаемом далее через R_0. В триплетном спиновом состоянии (спины параллельны) минимума не получается.

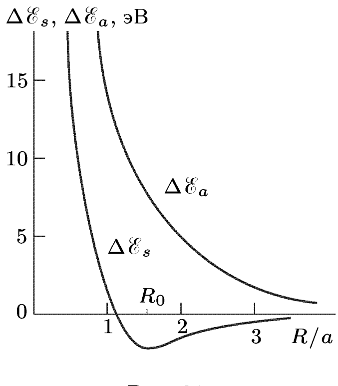


Рис. 91

Из рис. 91 видно, что *равновесное положение атомов существует только в синглетном спиновом состоянии*, а именно при $R = R_0$, когда энергия взаимодействия $\Delta\mathscr{E}_s$ обращается в минимум. *Только в синглетном состоянии и возможно образование молекулы*, причем R_0 имеет смысл равновесного расстояния между атомами в молекуле. *В триплетном состоянии молекула образоваться не может.* Гайтлер и Лондон в первом приближении теории возмущений нашли $R_0 = 1{,}51a \approx 0{,}080$ нм. Экспериментальное значение $R_0 = 0{,}07395$ нм. Лучшего согласия между теорией и опытом и не следовало ожидать, так как теория возмущений в первом приближении может считаться обоснованной только при $R \gg R_0$. Однако уже в первом приближении она приводит к качественно правильной картине взаимодействия атомов водорода в синглетном и триплетном состояниях. Более точные вариационные методы расчета привели в случае молекулы водорода к практически полному количественному согласию теории с опытом.

6. Различное поведение атомов в синглетном и триплетном состояниях легко понять на основе простых качественных соображений. В триплетном состоянии пространственная волновая функция (50.5) антисимметрична, а потому она имеет узел в плоскости симметрии, проходящей посередине между ядрами A и B перпендикулярно к соединяющей эти ядра прямой, так как в этой плоскости в силу тождественности электронов $\psi_A(1) = \psi_A(2)$, $\psi_B(1) = \psi_B(2)$. По

той же причине в синглетном состоянии пространственная волновая функция (50.4) в той же плоскости симметрии обращается в максимум. Поэтому в синглетном состоянии плотность вероятности нахождения электронов вблизи плоскости симметрии велика, тогда как в триплетном состоянии она близка к нулю. Таким образом, в синглетном состоянии при $R > R_0$ кулоновское отталкивание ядер компенсируется противоположно направленным действием электронов, так что при $R = R_0$ результирующая сила взаимодействия атомов меняет знак, т. е. отталкивание сменяется притяжением. Отрицательный заряд электронов, возникающий между ядрами A и B, и стягивает их, образуя связанное состояние. В триплетном же состоянии из-за малой вероятности нахождения электронов посередине между ядрами компенсирующее действие электронов недостаточно, чтобы получилось притяжение между атомами.

На малых расстояниях между ядрами атомы всегда отталкиваются независимо от того, находятся ли они в синглетном или триплетном состояниях. Силы отталкивания особенно велики, когда расстояние между ядрами становится меньше боровского радиуса a, так как в этом случае в средней точке между атомами, где волновые функции ψ_A и ψ_B совпадают, эти функции ничтожно малы. (Согласно полуклассической теории Бора, электрон вообще не может приблизиться к ядру на расстояние меньше a.) На малых расстояниях силы, с которыми отталкиваются атомы, обусловлены не столько кулоновским отталкиванием протонов, сколько отталкиванием электронов. Кулоновское отталкивание ядер меняется по степенному закону — обратно пропорционально квадрату расстояния между ядрами, тогда как кулоновское отталкивание электронов, как показывает расчет, приводит к более быстрому экспоненциальному возрастанию сил отталкивания с уменьшением расстояния между ядрами.

На расстояниях $R \gg a$, как также показывает расчет, силы притяжения (в синглетном состоянии) и отталкивания (в триплетном состоянии) экспоненциально убывают с расстоянием.

Как видно из формул (50.13), количественное различие во взаимодействии атомов в синглетном и триплетном состояниях обусловлено обменным интегралом (50.6), зависящим от расстояния R как от параметра. «Химические силы» могут проявиться только при таких R, когда подынтегральное выражение в обменном интеграле (50.6) заметно отлично от нуля, т. е. в области «перекрытия» электронных волновых функций $\psi_A(1)$ и $\psi_B(1)$ [или, что то же, $\psi_A(2)$ и $\psi_B(2)$] обоих атомов.

7. Хотя возможность образования нейтральной молекулы из атомов водорода в синглетном состоянии и обусловлена спином электрона, но само по себе силовое (магнитное) взаимодействие между спинами электронов при этом не играет никакой роли. Оно слишком слабо по сравнению с обменным взаимодействием. Влияние спина проявляется только в ограничении, накладываемом на полную электронную волновую функцию системы из двух атомов водорода, которое требует, чтобы она была антисимметрична относительно перестановки электронов.

Связанное состояние из двух ядер водорода (протонов) может образоваться и при наличии только одного электрона, когда ни о каком обменном взаимодействии между электронами говорить не приходится. Таким состоянием является ионизованная молекула водорода H_2^+. Связь осуществляется единственным электроном, в равной мере принадлежащим обоим ядрам. Возможность возникновения сил притяжения между ядрами можно пояснить на классической модели. Пусть отрицательный электрон находится посередине между положительными ядрами (рис. 92). Ядра отталкиваются одно от другого с силой $F_{++} = e^2/R$, тогда как электрон и ядро притягиваются с большей силой $F_{+-} = 4e^2/R$. Этот классический пример показывает только, почему могут появиться силы притяжения. Но классическая физика, конечно, ничего не может сказать, возможно ли устойчивое связанное состояние из рассматриваемых трех частиц. На этот вопрос положительный ответ дает только квантовая механика. Задача сводится к решению уравнения Шредингера для одного электрона в электрическом поле двух (неподвижных) положительно заряженных ядер. На этом вопросе мы останавливаться не можем.

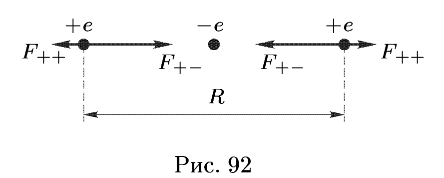


Рис. 92

8. Большой интерес представляет случай, когда химическая связь протонов осуществляется не электронами, а отрицательными мюонами. Тогда образуется *мюонная молекула*, состоящая из двух протонов и двух отрицательных мюонов. Один из протонов или оба вместе можно заменить дейтроном или тритоном, поскольку заряд этих частиц такой же, как у протона. Мюон — нестабильная частица, заряд которой равен заряду электрона. Он распадается на электрон и два нейтрино в среднем за время жизни $2 \cdot 10^{-6}$ с. В течение примерно такого же времени могут существовать и мюонные молекулы. Так как масса мюона в 207 раз больше массы электрона, то в такое же число раз меньше, чем у водорода, и среднее расстояние между ядрами мюонной молекулы, т. е. в мюонной молекуле оно составляет $0{,}07395 : 207 = 3{,}57 \cdot 10^{-4}$ нм $=$ $= 3{,}57 \cdot 10^{-11}$ см. Если ядрами служат протон и дейтрон, то на таком расстоянии между ними может произойти ядерная реакция с образованием ядра ^{3}He и выделением энергии $\approx$ 5,4 МэВ. Следовательно, мюоны могут играть роль катализаторов в указанной ядерной реакции. Аналогичную роль они могут играть и в реакциях дейтерия с дейтерием или с тритием.

9. Построение удовлетворительной количественной теории гомеополярной химической связи сложных молекул, из-за большого количества электронов в них, встречает очень большие математические трудности. Такая теория еще не создана. Поэтому для объяснения качественных особенностей химической связи таких молекул в химии пользуются модельными представлениями, основанными на распространении теории молекулы водорода на случай сложных молекул. На этом вопросе мы останавливаться не будем.

§ 51. Параводород и ортоводород

1. Протоны, как и электроны, обладают спином $1/2$ (в единицах $\hbar$). Поэтому полная волновая функция системы, состоящей из этих частиц, должна быть антисимметрична относительно перестановки двух протонов. Спиновый магнитный момент протона примерно в 657,5 раза меньше, чем у электрона. Поэтому еще с большим основанием, чем для электронов, можно сказать, что в молекуле водорода полная протонная волновая функция может быть представлена в виде произведения пространственной волновой функции на спиновую. Такие же рассуждения, какие были проведены для двух электронов, показывают, что в молекуле водорода могут реализоваться только следующие два состояния.

1. Состояние, в котором спиновая волновая функция протонов антисимметрична, а следовательно, пространственная функция симметрична. В этом случае водород называется *параводородом*. Образно можно сказать, что в молекуле параводорода спины протонов антипараллельны.

2. Состояние, в котором спиновая волновая функция протонов симметрична, а следовательно, пространственная антисимметрична. На образном языке это означает, что в этом случае спины протонов параллельны. Такой водород называется *ортоводородом*.

Так как в молекуле водорода электронные спины всегда взаимно компенсируются, то ее спин I обусловлен только спинами ядер. Для молекулы параводорода $I = 0$, для молекулы ортоводорода $I = 1$.

В качестве координат, характеризующих пространственную волновую функцию двух протонов, удобно взять декартовы координаты центра масс молекулы, расстояние между ядрами (протонами) и два угла (угловые координаты), определяющие направление соединяющей их прямой. Координаты центра масс не меняются при перестановке протонов, от них можно отвлечься. Расстояние между ядрами также не меняется при их перестановке. Оно меняется из-за колебаний ядер относительно друг друга вдоль соединяющей их прямой. Энергия, потребная для возбуждения таких колебаний, довольно велика (в температурной шкале ей соответствуют тысячи Кельвинов). Мы будем предполагать, что относительные колебания ядер не возбуждены (нулевые колебания, конечно, остаются). Меняются только угловые координаты, т. е. возбуждены вращения молекулы. Перестановка протонов эквивалентна повороту молекулы на 180° вокруг ее центра масс. Следовательно, в случае параводорода при таком повороте пространственная волновая функция протонов не меняется, а в случае ортоводорода меняет знак. Из явного выражения угловой волновой функции протонов (которое мы не приводим) видно, что в случае параводорода это имеет место при $L = 0, 2, 4, \ldots$, а в случае ортоводорода при $L = 1, 3, 5, \ldots$, где L — квантовое число, определяющее квадрат орбитального углового момента молекулы при ее вращении. Таким образом, вращательные уровни параводорода характеризуются *четными*, а ортоводорода —

нечетными квантовыми уровнями. Отсюда видно, что наиболее глубокий энергетический уровень молекулы параводорода лежит ниже соответствующего уровня молекулы ортоводорода.

2. Для превращения параводорода в ортоводород или обратно требуется переориентировать спины ядер. Однако благодаря слабому взаимодействию спиновых магнитных моментов ядер такой процесс при столкновениях молекул водорода крайне маловероятен. При обычных условиях параводород практически не переходит в ортоводород и обратно. Это означает, что квантовые переходы в молекуле водорода подчиняются хотя и не абсолютно строгому, но практически строгому правилу отбора

$$\Delta I = 0, \tag{51.1}$$

из которого следует

$$\Delta L = \pm 2. \tag{51.2}$$

Значит, *переходы могут осуществляться только между четными или только между нечетными вращательными квантовыми состояниями.* Если содержание пара- и ортоводорода в газе разное, то это проявляется в закономерном чередовании интенсивностей спектральных линий во вращательном (полосатом) спектре молекулярного водорода.

Итак, обычный молекулярный водород ведет себя как смесь двух газов, обладающих несколько отличающимися свойствами. Так как наиболее глубокое вращательное состояние ($L = 0$) есть парасостояние, то устойчивой равновесной модификацией при низких температурах является параводород. Уже при 20 К водород в равновесном состоянии является практически чистым параводородом. Однако простое охлаждение до этой температуры не приводит к равновесию. Равновесного состояния все же можно достичь с помощью катализаторов (например, десорбцией с угля предварительно адсорбированного им водорода). Этот процесс, проводимый при 20 К, дает возможность получить практически чистый параводород. Параводород очень устойчив и может храниться в чистых стеклянных сосудах несколько недель.

С повышением температуры соотношение пара- и ортоводорода в равновесном состоянии изменяется. Так как параводороду соответствует только одно вращательное квантовое состояние ($I = 0$), а ортоводород может существовать в трех состояниях (со спинами -1, 0, $+1$), то статистические веса этих состояний относятся как $1:3$. При высоких температурах (практически уже при 300 К) влияние экспоненциального больцмановского множителя перестает сказываться, так что относительное содержание пара- и ортоводорода в равновесной смеси становится равным $1:3$. Параводород превращается в ортоводород в присутствии катализаторов (например, платинированного асбеста) при температуре в несколько сот градусов Цельсия или в электрическом разряде. Но так как не существует температуры, при которой равновесное состояние соответствовало бы чистому ортоводороду, то получить чистый ортоводород невозможно. Нижним пределом возможного содержания параводорода в равновесной смеси является 25 %, как это следует из отношения статистических весов пара- и ортоводорода.

3. При понижении температуры, начиная от комнатной, теплоемкость газообразного молекулярного водорода уменьшается. При комнатной температуре молярная теплоемкость водорода составляет классическое значение $C_V = (5/2)R$ и стремится при понижении температуры также к классическому значению $C_V = (3/2)R$ (см. т. II, § 85). Такое уменьшение теплоемкости связано с уменьшением вклада в теплоемкость, который вносят вращения молекул. Однако полного количественного согласия теории с опытом удалось достигнуть только после учета того обстоятельства, что водород является смесью пара- и ортоводорода. Теплоемкости компонентов этой смеси различны из-за того, что вращательные уровни ортоводорода сдвинуты вверх относительно вращательных уровней параводорода. Равновесное соотношение между пара- и ортоводородом достигается за длительное время — очень большое по сравнению со временем нагревания или охлаждения газа, которое требуется для измерения его теплоемкости. Поэтому в неравновесном состоянии теплоемкость газообразного водорода будет зависеть от относительного содержания в нем пара- и ортоводорода. Если же неравновесную смесь на длительное время предоставить саму себе, то ее состав со временем будет меняться. В соответствии с этим и теплоемкость смеси будет медленно меняться во времени.

§ 52. Молекулярные силы

1. Силы взаимодействия молекул и атомов сводятся к кулоновскому притяжению и отталкиванию положительно заряженных атомных ядер и отрицательных электронов. К ним относятся, во-первых, *химические* или *валентные силы*, рассмотренные в § 50. Эти силы действуют на близких расстояниях. Они связаны с противоположной ориентацией спинов атомных ядер и определяются степенью перекрытия электронных волновых функций взаимодействующих атомов. Так как электронная плотность убывает экспоненциально с увеличением расстояния от центра атома, то и химические силы убывают экспоненциально с возрастанием расстояния между атомами. В этом параграфе предполагается, что атомы и молекулы химически не реагируют, так что химические силы между ними не действуют.

Во-вторых, к молекулярным силам относятся *короткодействующие силы отталкивания*, возникающие при проникновении электронных оболочек взаимодействующих частиц при их сближении. Такие силы также экспоненциально убывают с расстоянием между взаимодействующими частицами и притом очень быстро. Это позволяет в кинетической теории газов пользоваться упрощенной моделью молекул и атомов, заменяя их твердыми упругими шарами, при столкновении которых развиваются бесконечно большие силы отталкивания.

В-третьих, между нейтральными атомами и молекулами действуют еще силы притяжения. Они убывают с расстоянием не по экспоненциальному, а по степенному закону, т. е. значительно более медленно. В отличие от короткодействующих сил, их можно было бы назвать

дальнодействующими. Эти силы возникают при взаимодействии электрических дипольных моментов атомов и молекул или вообще при деформации их электронных оболочек. Если молекулы полярные, т. е. обладают постоянными дипольными моментами, то наличие такого взаимодействия понятно. Однако взаимодействие существует, и даже, как правило, превосходит взаимодействие полярных молекул, когда постоянными дипольными моментами молекулы не обладают. В этом случае силы называются *силами Ван-дер-Ваальса* или *дисперсионными силами.*

Откуда же может возникнуть дипольное взаимодействие, если у молекул нет дипольных моментов? Дело в том, что у возбужденных молекул и атомов дипольные моменты появляются, хотя они и меняются во времени. Но если молекула или атом не возбуждены, то с точки зрения классических представлений дипольных моментов у них не должно быть. Не так обстоит дело с точки зрения квантовой механики. Она в согласии с опытом утверждает, что у невозбужденных атома или молекулы есть нулевая энергия, которой соответствуют весьма оживленные нулевые колебания. С наличием нулевых колебаний и связано происхождение сил Ван-дер-Ваальса. Нулевые колебания не связаны с тепловым движением, т. е. не зависят от температуры. Поэтому и силы Ван-дер-Ваальса не должны зависеть от температуры. Опыт показывает, что это действительно так.

2. Роль нулевых колебаний в происхождении сил Ван-дер-Ваальса и квантовую природу этих сил проще всего уяснить не на реальных атомах, а на идеализированных моделях их. Будем моделировать каждый из одинаковых взаимодействующих атомов одномерным гармоническим осциллятором с массой μ и собственной частотой колебаний ω_0. Будем предполагать, что колебания совершаются вдоль прямой, соединяющей осцилляторы. При отклонении из положений равновесия на x_1 и x_2 осцилляторы получат потенциальные энергии $(1/2)\mu\omega_0^2 x_1^2$ и $(1/2)\mu\omega_0^2 x_2^2$. При этом у них появятся дипольные моменты $p_1 = ex_1$ и $p_2 = ex_2$. Потенциальная энергия взаимодействия этих диполей равна $-p_1 p_2/R^3 = -e^2 x_1 x_2/R^3$, где R — расстояние между осцилляторами. В соответствии с этим гамильтониан системы рассматриваемых двух связанных осцилляторов представится выражением

$$\widehat{H} = \widehat{T}_1 + \widehat{T}_2 + \frac{1}{2}\,\mu\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - \lambda x_1 x_2, \tag{52.1}$$

где $\lambda = e^2/R^3$, а $\widehat{T}_1$ и $\widehat{T}_2$ — операторы кинетических энергий осцилляторов, т. е.

$$\widehat{T}_1 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\,\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad \widehat{T}_2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\,\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \tag{52.2}$$

Вместо x_1 и x_2 введем так называемые *нормальные координаты* q_1 и q_2 системы связанных осцилляторов, определяемые формулами

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(q_1 + q_2), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(q_1 - q_2). \tag{52.3}$$

Тогда

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)$$

и далее

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial q_1^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial q_2^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \tag{52.4}$$

Для потенциальной энергии получаем

$$\frac{1}{2}\,\mu\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2}\,\mu\omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2}\,\mu\omega_2^2 q_2^2.$$

Здесь введены обозначения

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\lambda}{\mu}, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{\lambda}{\mu}. \tag{52.5}$$

Таким образом, гамильтониан системы связанных осцилляторов может быть представлен в виде

$$\widehat{H} = \widehat{H}_1 + \widehat{H}_2, \tag{52.6}$$

где

$$\widehat{H}_1 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{1}{2}\,\mu\omega_1^2 q_1^2, \quad \widehat{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial q_2^2} + \frac{1}{2}\,\mu\omega_2^2 q_2^2. \tag{52.7}$$

Это значит, что колебание системы в общем случае получается суперпозицией гармонических колебаний с частотами ω_1 и ω_2. Понятно, что в точности такое же утверждение получается и в классической механике. Колебания с частотами ω_1 и ω_2 называются *нормальными колебаниями* рассматриваемой системы. Целесообразность введения нормальных координат обусловлена тем, что в этих координатах задача о колебаниях связанной системы сводится к задачам о колебаниях двух *независимых* осцилляторов с разными частотами ω_1 и ω_2.

3. Наименьшая или нулевая энергия системы получится тогда, когда каждый из осцилляторов совершает нулевые колебания со своей частотой. Эта нулевая энергия системы равна

$$\mathscr{E}_0 = \frac{\hbar}{2}\,(\omega_1 + \omega_2). \tag{52.8}$$

Частоты ω_1 и ω_2 зависят от расстояния R между осцилляторами. Если R достаточно велико, то

$$\omega_1 = \omega_0 \left(1 - \frac{\lambda}{\mu\omega_0^2}\right)^{1/2} \approx \omega_0\left(1 - \frac{\lambda}{2\mu\omega_0^2} - \frac{\lambda^2}{8\mu^2\omega_0^4}\right),$$

$$\omega_2 = \omega_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu\omega_0^2}\right)^{1/2} \approx \omega_0\left(1 + \frac{\lambda}{2\mu\omega_0^2} - \frac{\lambda^2}{8\mu^2\omega_0^4}\right).$$

Таким образом,

$$\mathscr{E}_0 = \hbar\omega_0 - \frac{\hbar\lambda^2}{8\mu^2\omega_0^3} = \hbar\omega_0 - \frac{\hbar}{8\mu^2\omega_0^3}\,\frac{e^4}{R^6}, \tag{52.9}$$

т. е. нулевая энергия системы связанных осцилляторов является функцией расстояния R между ними, а потому она играет роль потенциальной энергии взаимодействия их. Величина $\hbar\omega_0$ имеет смысл нулевой энергии осцилляторов при отсутствии связи между ними. Отбрасывая эту несущественную аддитивную постоянную, для потенциальной энергии можно написать

$$U(R) = -\frac{\hbar e^4}{8\mu^2\omega_0^3}\,\frac{1}{R^6}. \tag{52.10}$$

Она отрицательна, а потому взаимодействие между осцилляторами носит характер притяжения и притом независимо от того, в каких фазах колеблются осцилляторы. Соответствующие силы притяжения и будут силами Ван-дер-Ваальса для наших идеализированных атомов. Квантовая природа этих сил видна уже из того, что в формулу (52.10) в качестве множителя входит постоянная Планка $\hbar$ [1]).

Если дипольные моменты осцилляторов взаимно перпендикулярны, то потенциальная энергия дипольного взаимодействия равна нулю, и силы притяжения не возникают. Если же они направлены под углом друг к другу, то их можно разложить на составляющие вдоль прямой, соединяющей осцилляторы, и перпендикулярно к ней, так что и в этом случае возникает притяжение.

---

[1]) Притяжение является следствием того, что дипольное взаимодействие осцилляторов уменьшает их общую нулевую энергию. Это можно доказать и не прибегая к разложению частот ω_1 и ω_2 в степенные ряды. Действительно, из (52.5) получаем

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = 2\omega_0^2.$$

Поэтому, рассматривая квадраты частот как стороны прямоугольника и квадрата, на основании известной геометрической теоремы находим $\omega_1^2\omega_2^2 < \omega_0^4$ или $\omega_1\omega_2 < \omega_0^2$. Значит,

$$\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 + \omega_2^2 < 4\omega_0^2, \quad \text{или} \quad (\omega_1 + \omega_2)^2 < 4\omega_0^2,$$

$$\omega_1 + \omega_2 < 2\omega_0.$$

А к установлению последнего неравенства и сводится доказываемое утверждение.

4. Формулу (52.10) можно преобразовать, введя в нее поляризуемость β атома в постоянном электрическом поле по формуле $p = ex = \beta E$. Так как в случае гармонического осциллятора сила, действующая на заряд e, равна $\mu\omega_0^2 x$, то при равновесии $\mu\omega_0^2 x = eE = ex/\beta$, откуда $e^2/(\mu\omega_0^2) = \beta$. Эта формула получена здесь классически, но она может быть найдена также из дисперсионной формулы квантовой механики. (Поэтому-то силы Ван-дер-Ваальса и называют также дисперсионными.) В результате получается

$$U(R) = -\frac{\varepsilon\beta^2}{8}\frac{1}{R^6}, \tag{52.11}$$

где $\varepsilon = \hbar\omega$ — разность между соседними энергетическими уровнями гармонического осциллятора.

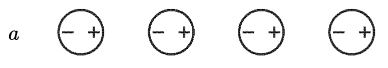
Результат (52.11) существенно не меняется и для реальных атомов. В этом случае во втором приближении теории возмущений квантовая механика дает

$$U(R) = -k\frac{I\beta^2}{R^6}, \tag{52.12}$$

где I — энергия ионизации атома, а k — числовой коэффициент порядка единицы.

В заключение поясним с другой точки зрения, почему дипольное взаимодействие молекул приводит к притяжению между ними. Притяжение наблюдается тогда, когда молекулы обращены друг к другу разноименными зарядами (рис. 93 *а*), отталкивание — когда одноименными (рис. 93 *б*). В первом положении потенциальная энергия взаимодействия молекул, зависящая от их взаимной ориентации, минимальна, во втором максимальна. Первому положению соответствует устойчивое равновесие, второму — неустойчивое. Согласно формуле Больцмана при термодинамическом равновесии, например газа, первое положение более, а второе менее вероятно. В первом положении молекулы проводят большее время, чем во втором. Результирующим эффектом взаимодействия будет притяжение.

а



б

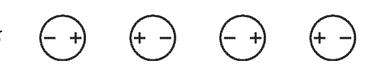


Рис. 93

Глава VII

НЕКОТОРЫЕ МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ КВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

§ 53. Возможные состояния частицы в ограниченном объеме

1. В § 82 т. II были изложены основы квантовых статистик Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака для идеального газа. Были получены выражения для среднего числа частиц в одном квантовом состоянии при заданной температуре T. Однако что́ это за состояния, которые может принимать частица, и каково их число в заданном интервале энергий — об этом до изложения основ квантовой механики, естественно, ничего не могло быть сказано. Теперь мы решим этот вопрос для произвольной нерелятивистской частицы, подобно тому как он был решен для фотона (см. т. IV, § 117).

Пусть частица находится внутри сосуда, который для простоты вычислений будем считать кубом со стороной L с непроницаемыми стенками. Стенка представляет собой потенциальный барьер: внутри сосуда потенциальная энергия частицы постоянна и принимается равной нулю, а при приближении к стенке неограниченно возрастает до бесконечности, оставаясь таковой при переходе через стенку. Такие предположения относительно потенциального барьера необходимо ввести, чтобы полностью исключить возможность выхода частицы из сосуда (см. § 24 и 28).

Сначала будем предполагать, что частица не обладает спином. Стационарное состояние такой частицы внутри сосуда описывается волновой функцией ψ, удовлетворяющей уравнению Шредингера

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0, \tag{53.1}$$

где

$$k^2 = \frac{2\mu\mathscr{E}}{\hbar^2} = \frac{\mathbf{p}^2}{\hbar^2}. \tag{53.2}$$

На стенках сосуда функция ψ должна обращаться в нуль, чтобы частица не могла выйти из сосуда.

Частное решение уравнения (53.1) можно найти методом разделения переменных, полагая $\psi = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)$, так что

$$\nabla^2\psi = \psi_x''(x)\psi_y(y)\psi_z(z) + \psi_x(x)\psi_y''(y)\psi_z(z) + \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z''(z).$$

Подставив это значение в уравнение (53.1) и разделив его на ψ, получим

$$\frac{\psi_x''(x)}{\psi_x(x)} + \frac{\psi_y''(y)}{\psi_y(y)} + \frac{\psi_z''(z)}{\psi_z(z)} = -k^2.$$

Это уравнение должно выполняться, каковы бы ни были значения x, y, z. Первое слагаемое есть функция только x, а потому оно не зависит от того, какие значения имеют y и z. Если фиксировать y и z, то последние два слагаемых в левой части уравнения станут постоянными. Но тогда будет постоянным и первое слагаемое $\psi_x''(x)/\psi_x(x)$. Такое же рассуждение можно провести и в отношении остальных двух слагаемых. Таким образом, должны выполняться уравнения

$$\frac{\psi_x''(x)}{\psi_x(x)} = -k_x^2, \quad \frac{\psi_y''(y)}{\psi_y(y)} = -k_y^2, \quad \frac{\psi_z''(z)}{\psi_z(z)} = -k_z^2, \tag{53.3}$$

где k_x, k_y, k_z — постоянные, удовлетворяющие соотношению

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2. \tag{53.4}$$

Все эти постоянные должны быть положительными; в противном случае нельзя удовлетворить граничным условиям, как это будет ясно из дальнейшего. Общее решение первого уравнения (53.3) имеет вид

$$\psi_x(x) = a\sin k_x x + b\cos k_x x.$$

Постоянная b должна равняться нулю, так как в силу граничного условия $\psi_x(0) = b = 0$. Граничное же условие на стенке $x = L$ дает $\psi_x(L) = a\sin k_x L = 0$, так что $\sin k_x L = 0$. Аналогичные соотношения имеют место и для k_y, k_z. Следовательно,

$$k_x = \frac{\pi}{L}\,n_x, \quad k_y = \frac{\pi}{L}\,n_y, \quad k_x = \frac{\pi}{L}\,n_z, \tag{53.5}$$

где n_x, n_y, n_z — целые числа: $n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \ldots$ (отрицательные значения их не приводят к новым линейно независимым решениям, а значения $n_x = n_y = n_z = 0$ дают тривиальные решения $\psi_x = 0$, $\psi_y = 0$, $\psi_z = 0$ и, следовательно, $\psi = 0$).

Таким образом, получается частное решение уравнения (53.1)

$$\psi = \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z, \tag{53.6}$$

обращающееся в нуль на стенках сосуда. Соответствующая волновая функция, зависящая от времени, представляет собой стоячую волну. Суперпозиция таких стоячих волн с постоянными амплитудами и будет общим выражением для волновой функции внутри сосуда. Каждой тройке целых чисел n_x, n_y, n_z соответствует одна стоячая волна, т. е. одно стационарное квантовое состояние частицы.

2. Чтобы найти число $dZ(k)$ стационарных состояний в интервале волновых чисел от k до $k + dk$, вообразим пространственную кубическую решетку, ячейки которой являются кубиками со стороной π/L и объемом π^3/L^3. Тогда число $dZ(k)$ будет равно числу узлов в зазоре положительного октанта такой решетки, который заключен между

сферами с радиусами k и $k + dk$, т. е. отношению объема такого зазора к объему ячейки:

$$dZ(k) = \frac{1}{8}\,\frac{4\pi k^2\,dk}{\pi^3/L^3} = \frac{Vk^2\,dk}{2\pi^2}, \tag{53.7}$$

где $V = L^3$ — объем сосуда.

Для электронов (и вообще частиц со спином $1/2$) выражение (53.7) следует удвоить, так как каждой пространственной волновой функции в этом случае соответствуют два спиновых состояния с противоположно ориентированными спинами. Для фотонов выражение (53.7) следует также удвоить, чтобы учесть возможность двух взаимно перпендикулярных поляризаций. В этих случаях

$$dZ_{\text{эл}}(k) = dZ_{\text{ф}}(k) = \frac{Vk^2}{\pi^2}\,dk. \tag{53.8}$$

Последняя формула, конечно, не может быть обоснована с помощью уравнения (53.1), так как уравнение Шредингера для фотонов неприменимо. Однако она уже была выведена нами с помощью уравнений Максвелла при рассмотрении вопросов теплового излучения (см. т. IV, § 117).

От волновых чисел можно перейти к импульсам, пользуясь формулой $p = \hbar k$ и, следовательно, $dp = \hbar\,dk$. В этих переменных

$$dZ_{\text{эл}}(p) = dZ_{\text{ф}}(p) = \frac{Vp^2}{\hbar^3\pi^2}\,dp. \tag{53.9}$$

Можно также в качестве переменной принять энергию частицы $\mathscr{E}$. Однако из-за различной связи энергии с импульсом в этом случае получаются различные выражения для электронов и для фотонов. Для электронов $\mathscr{E} = p^2/2\mu$,

$$dZ_{\text{эл}} = \frac{V\sqrt{2\mu^3\mathscr{E}}}{\pi^2\hbar^3}\,d\mathscr{E}. \tag{53.10}$$

Для фотонов $p = \mathscr{E}/c$,

$$dZ_{\text{ф}} = \frac{V\mathscr{E}^2}{\pi^2c^3\hbar^3}\,d\mathscr{E}. \tag{53.11}$$

§ 54. Теория Дебая теплоемкости твердых тел

1. Как было показано в т. II (см. § 69 и 85 указанного тома), применение квантовой теории позволило Эйнштейну уже в 1906 г. дать принципиальное объяснение падения теплоемкости твердых тел вблизи абсолютного нуля температур. Эйнштейн рассматривал твердое тело как совокупность N *независимых* частиц (гармонических осцилляторов), колеблющихся около положений равновесия с одной и той же частотой ω. Средняя энергия, приходящаяся на одну степень свободы,

в этом случае определяется формулой Планка

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \tag{54.1}$$

в которой опущен член $\hbar\omega/2$, представляющий нулевую энергию осциллятора. Этот член надо учитывать в тех случаях, когда существенна амплитуда колебаний, например в случае зависимости рассеяния рентгеновских лучей от температуры. Но в вопросе о теплоемкости нулевая энергия роли не играет, поскольку она не зависит от температуры. По этой причине она и опускается в дальнейшем.

При высоких температурах формула (54.1) переходит в классическое выражение $\overline{\varepsilon} = kT$, а потому в вопросе о теплоемкости приводит к закону Дюлонга и Пти. При низких температурах формула, полученная Эйнштейном, дает убывание теплоемкости с температурой, причем теплоемкость стремится к нулю в согласии с тем, что требует эмпирически установленная теорема Нернста. Однако согласие теории с опытом получается только качественное. Так, по формуле Эйнштейна вблизи абсолютного нуля теплоемкость твердого тела должна убывать с температурой по *экспоненциальному* закону, тогда как опыт приводит к более медленному убыванию по *степенному* закону. Можно было думать, что такое расхождение теории с опытом связано не с принципиальными недостатками теории, а обусловлено грубостью примененной модели твердого тела. В теории Эйнштейна осцилляторы считаются независимыми. Но будет гораздо ближе к действительности, если их рассматривать *связанными.* В таком случае в теле возбудится не колебание с одной частотой, а получится целый *спектр частот* ω_i. Число этих частот равно $3N$, т. е. числу степеней свободы N частиц, из которых состоит тело (конечно, среди этих частот могут быть и совпадающие).

Если твердое тело рассматривать как систему N связанных частиц, совершающую нормальные гармонические колебания, то его средняя энергия определится по формуле

$$\overline{\mathscr{E}} = \sum_{i=1}^{3N} \overline{\varepsilon}_i = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\hbar\omega_i}{e^{\hbar\omega_i/kT} - 1}.$$

Число нормальных колебаний с частотами меньше ω, конечно, дискретное, но оно очень велико и может быть аппроксимировано непрерывной функцией $Z(\omega)$. Число нормальных колебаний в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ тоже очень велико, но может рассматриваться как дифференциал $dZ(\omega)$ той же функции. В указанном приближении предыдущую формулу можно заменить на

$$\overline{\mathscr{E}} = \int\limits_0^{\omega_{\text{макс}}} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}\, dZ(\omega), \tag{54.2}$$

в которой $\omega_{\text{макс}}$ означает максимальную частоту нормальных колебаний. Она определяется из соотношения

$$Z(\omega_{\text{макс}}) = 3N, \tag{54.3}$$

так как общее число нормальных колебаний равно числу степеней свободы $3N$. Таким образом, в квантовой теории задача нахождения средней энергии твердого тела сводится к определению собственных частот нормальных колебаний, тогда как в классической теории этого делать не требуется, так как по этой теории средняя энергия зависит только от общего числа степеней свободы.

2. Вычислением собственных частот колебаний кристаллической решетки применительно к теории теплоемкости занимались Борн и Карман (1881–1963). Это — очень трудная задача. Однако в вопросе о теплоемкости твердых тел при низких температурах она может быть сильно упрощена, что и было сделано Дебаем. Рассмотрим среднюю энергию осциллятора $\bar{\varepsilon}$, определяемую планковской формулой (54.1) как функцию абсолютной температуры T. Для этого представим эту формулу в виде

$$\bar{\varepsilon} = kT\frac{x}{e^x - 1}, \tag{54.4}$$

где введена безразмерная переменная $x = \hbar\omega/kT$. График этой функции представлен на рис. 94. Из него видно, что в выражении (54.2) для средней энергии тела существенны члены, соответствующие только *низким частотам* нормальных колебаний. Им соответствуют длины волн, большие по сравнению с постоянной кристаллической решетки. Это позволяет отвлечься от атомистической структуры тела и рассматривать нормальные колебания в нем как стоячие инфразвуковые волны в упругой сплошной среде. Это — те же волны, которые вызывают тонкую структуру спектральных линий при молекулярном рассеянии света (эффект Мандельштама–Бриллюэна, см. т. IV, § 99). Таким образом, существенные низкие собственные частоты тела могут быть вычислены методами *теории упругости*, в которой среда считается *сплошной.*

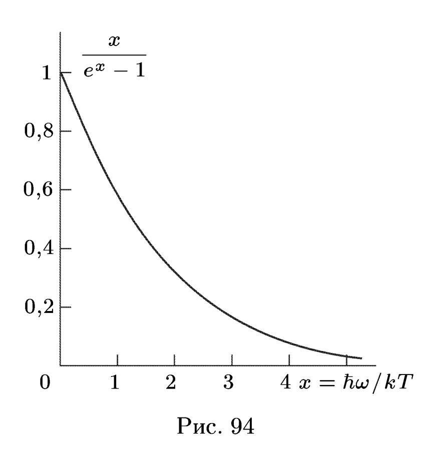


Рис. 94

Выражение для $dZ(\omega)$ может быть найдено из дифференциальных уравнений теории упругости совершенно так же, как была выведена формула (53.7) для такой же величины в случае волн де Бройля. При этом надо только принять во внимание, что в твердом теле могут распространяться как *продольные*, так и *поперечные* звуковые волны. В одном и том же направлении может распространяться только одна

продольная звуковая волна определенной частоты. Поэтому для продольных волн формула (53.7) может быть сохранена без изменений (разумеется, с заменой фазовой скорости волн де Бройля на скорость звука). Поперечных же волн, распространяющихся с той же частотой и в том же направлении, может быть две. Поэтому в этом случае выражение (53.7) надо удвоить. Таким образом,

$$dZ(\omega) = \frac{V\omega^2\,d\omega}{2\pi^2}\left(\frac{1}{c_{\parallel}^3} + \frac{2}{c_{\perp}^3}\right) = \frac{3V\omega^2\,d\omega}{2\pi^2 c^3}, \tag{54.5}$$

где V — объем тела, $c_{\parallel}$ — скорость продольных, а $c_{\perp}$ — скорость поперечных звуковых волн. Величина же c есть некоторая «средняя скорость», определяемая соотношением

$$\frac{3}{c^3} = \frac{1}{c_{\parallel}^3} + \frac{2}{c_{\perp}^3}. \tag{54.6}$$

В этом выводе не учтена анизотропия упругих свойств кристаллов, проявляющаяся даже для кристаллов кубической системы. Тело считалось изотропным, и его упругие свойства характеризовались двумя постоянными, за которые, в частности, можно принять обе скорости звука $c_{\parallel}$ и $c_{\perp}$. Но учет анизотропии малосуществен и вряд ли оправдан в рамках приближенного метода Дебая.

3. Средняя энергия кристалла, согласно (54.2), будет равна

$$\overline{\mathscr{E}} = \frac{3V\hbar}{2\pi^2 c^3}\int\limits_0^{\omega_{\text{макс}}} \frac{\omega^3\,d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \tag{54.7}$$

или, вводя прежнее обозначение $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$, а также $x_{\text{макс}} = \frac{\hbar\omega_{\text{макс}}}{kT}$,

$$\overline{\mathscr{E}} = \frac{3Vk^4T^4}{2\pi^2 c^3\hbar^3}\int\limits_0^{x_{\text{макс}}} \frac{x^3\,dx}{e^x - 1}. \tag{54.8}$$

Для низких температур подынтегральное выражение при высоких частотах ($x \gg 1$) очень мало. В этом случае точное определение верхнего предела $x_{\text{макс}}$ несущественно и его можно принять равным бесконечности, т. е.

$$\overline{\mathscr{E}} = \frac{3Vk^4T^4}{2\pi^2 c^3\hbar^3}\int\limits_0^{\infty} \frac{x^3\,dx}{e^x - 1}. \tag{54.9}$$

Входящий сюда интеграл в точности совпадает с тем, который встречался при выводе закона Стефана–Больцмана из формулы Планка (см. т. IV, § 118). Он равен

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{x^3\,dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}. \tag{54.10}$$

Таким образом, при низких температурах ($x_{\text{макс}} \gg 1$)

$$\overline{\mathscr{E}} = DT^4, \tag{54.11}$$

где

$$D = \frac{V\pi^2 k^4}{10c^3\hbar^3}. \tag{54.12}$$

Для теплоемкости тела получаем

$$C_V = \left(\frac{\partial\overline{\mathscr{E}}}{\partial T}\right)_V = 4DT^3. \tag{54.13}$$

Таким образом, *теплоемкость кристаллической решетки вблизи абсолютного нуля температур меняется пропорционально третьей степени температуры*. Это — *закон кубов*, теоретически найденный Дебаем. Согласно этому закону при $T = 0$ теплоемкость обращается в нуль в согласии с теоремой Нернста. Закон кубов Дебая, вообще говоря, хорошо согласуется с опытом (см., впрочем, п. 5 настоящего параграфа). Конечно, надо помнить, что формула (54.11), как и закон кубов, относится только к теплоемкости кристаллической решетки. В случае металлов к теплоемкости решетки надо добавить теплоемкость свободных электронов, которая меняется пропорционально первой степени температуры (см. т. II, § 85).

4. Для высоких температур ($\hbar\omega/kT \ll 1$) формула (54.7) с учетом (54.3) приводит к правильному классическому выражению $\overline{\mathscr{E}} = 3NkT$. Этот результат, конечно, не следует из формулы (54.5), которая при высоких частотах неверна. Он является следствием того, что в классическом случае вид спектра частот нормальных колебаний вообще не играет никакой роли — важно только общее число таких колебаний, а оно правильно передается формулой (54.3).

Таким образом, формула (54.7) приводит к правильному результату как в области очень низких, так и в области очень высоких температур. Поэтому ее, как *интерполяционную формулу*, естественно распространить и на промежуточную область температур.

Определим теперь значение $\omega_{\text{макс}}$, пользуясь непрерывной моделью тела. На основании формулы (54.3)

$$Z(\omega_{\text{макс}}) = \int\limits_0^{\omega_{\text{макс}}} dZ(\omega) = \frac{3V}{2\pi^2 c^3}\int\limits_0^{\omega_{\text{макс}}} \omega^2\, d\omega = \frac{V}{2\pi^2 c^3}\omega_{\text{макс}}^3 = 3N,$$

откуда

$$\omega_{\text{макс}} = \left(\frac{6\pi^2 c^3 N}{V}\right)^{1/3} = \frac{2\pi c}{a}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3}, \tag{54.14}$$

где a — постоянная решетки, определяемая соотношением $V = Na^3$. Минимальная длина упругой волны, соответствующая максимальной

частоте $\omega_{\text{макс}}$, равна

$$\lambda_{\text{мин}} = \frac{2\pi c}{\omega_{\text{макс}}} = a\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \approx 1{,}6a. \qquad (54.15)$$

Конечно, этот расчет дает только порядок действительных величин $\omega_{\text{макс}}$ и $\lambda_{\text{мин}}$, так как для таких коротких волн непрерывная модель твердого тела уже не может дать точные результаты.

Введем «дебаевскую температуру», определяемую формулой

$$T_D = \frac{\hbar\omega_{\text{макс}}}{k} = \frac{2\pi c\hbar}{ka}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3}. \qquad (54.16)$$

Тогда формулу (54.8) для одного моля можно записать в виде

$$\overline{\mathscr{E}} = 9N_{\text{A}}kT\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int\limits_0^{T_D/T} \frac{x^3\,dx}{e^x-1} = 3RT\cdot 3\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int\limits_0^{T_D/T} \frac{x^3\,dx}{e^x-1}, \qquad (54.17)$$

где $R = N_{\text{A}}k$ — универсальная газовая постоянная. Для высоких температур $T \gg T_D$ это выражение переходит в классическую формулу $\overline{\mathscr{E}} = 3RT$, т. е. получается закон Дюлонга и Пти. При температурах, много меньших дебаевской, получается формула (54.11) и закон кубов Дебая. Дифференцируя (54.17) по температуре, получаем интерполяционную формулу Дебая для молярной теплоемкости твердого тела:

$$C_V = 3R\left\{12\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int\limits_0^{T_D/T} \frac{x^3\,dx}{e^x-1} - \frac{3T_D/T}{e^{T_D/T-1}}\right\}. \qquad (54.18)$$

В табл. 6 приведены значения дебаевских температур, вычисленные по формуле (54.16) и найденные из экспериментальной кривой теплоемкости. На рис. 95 представлена теплоемкость как функция от-

Таблица 6

Вещество	Дебаевская температура T_D, K	
	из экспериментальной кривой теплоемкости	вычислено по формуле (54.16)
Алюминий	398	402
Медь	315	332
Серебро	215	214
Свинец	88	73
Алмаз	1860	—

ношения T/T_D, вычисленная по формуле (54.18) (сплошная кривая); точки соответствуют экспериментальным данным для Pb, KCl и C (алмаз).

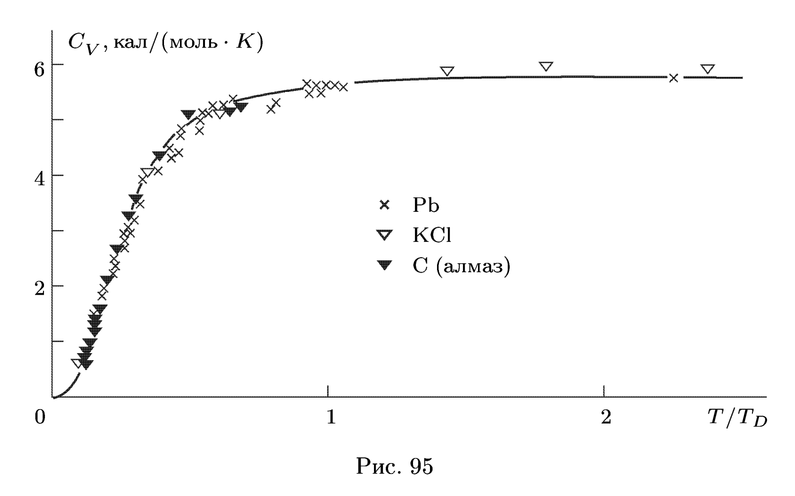


Рис. 95

5. Следует заметить, что изложенная теория Дебая справедлива только для кристаллов, построенных из частиц, на внутреннее состояние которых температура практически не оказывает никакого влияния. В этом случае внутреннее строение частиц не проявляется в теплоемкости. В большинстве случаев указанному условию удовлетворяют кристаллы, построенные из атомов или ионов, у которых расстояние между нормальным и первым возбужденным уровнями велико по сравнению с kT. Однако у некоторых атомов и ионов нижние энергетические уровни расположены очень близко друг к другу. Например, в кристаллическом сульфате гадолиния нижний энергетический уровень иона гадолиния состоит из восьми подуровней, расстояния между которыми соответствуют в температурной шкале дебаевской температуре 1,6 K. При очень низких температурах $T \approx 7$ K появляется добавочная теплоемкость, обусловленная возбуждением указанных подуровней. При столь низких температурах теплоемкость решетки весьма мала по сравнению с этой добавочной теплоемкостью. При $T = 1{,}6$ K теплоемкость кристалла почти в 500 раз превышает теплоемкость кристаллической решетки. При дальнейшем понижении температуры теплоемкость кристалла, естественно, падает до нуля.

В кристаллах, построенных из сложных молекул, может появиться теплоемкость, связанная с тепловым движением атомов или атомных групп внутри молекулы. В первом приближении можно считать, что колебания молекул внутри решетки не сказываются на их внутреннем состоянии. Тогда теплоемкость кристалла можно представить в виде

$$C = C_{\text{реш}} + C_{\text{внутр}}.$$

Вклад, вносимый в теплоемкость внутренним движением, в некоторых случаях может быть довольно значительным. Например, теплоемкость, связанная с внутренними колебаниями в молекулах бензола, при $T \approx 150$ K составляет около 20 % от теплоемкости решетки и достигает 80 % последней при $T \approx 270$ K.

§ 55. Типы связей атомов в твердых телах

1. В предыдущем параграфе при рассмотрении теплоемкости твердых тел мы отвлеклись от их внутренней атомистической структуры. Так поступать, вообще говоря, уже нельзя во многих других вопросах физики твердого тела, некоторые из которых рассматриваются ниже.

В твердых телах (кристаллах) атомы, молекулы или ионы совершают малые колебания около узлов соответствующей кристаллической решетки. Геометрические свойства кристаллических решеток — их симметрия — подробно изучаются в кристаллографии. Кратко эти свойства были рассмотрены в гл. XII второго тома. Содержание этой главы здесь повторяться не будет.

Правильное расположение структурных элементов кристалла (атомов, ионов, молекул) в узлах кристаллической решетки, конечно, требует объяснения с атомистической точки зрения. Можно было бы думать, что такое объяснение требует решения уравнения Шредингера

$$\widehat{H}\psi = \mathscr{E}\psi, \tag{55.1}$$

в котором волновая функция ψ зависит от координат всех ядер и электронов тела. Разумеется, это уравнение, как и всегда, имеет допустимые решения только для избранных значений энергии $\mathscr{E}$. Решение уравнения Шредингера определило бы значения $\mathscr{E}$, при которых тело должно быть кристаллом, а также структуру самой кристаллической решетки. Электроны, заполняющие пространство между атомными ядрами, необходимы для удержания структурных элементов кристалла в положениях равновесия — в узлах кристаллической решетки. В решении должны содержаться все возможные структуры кристаллических решеток. Оно должно охватывать все возможные фазовые переходы между ними, а также переходы в жидкое, а затем и газообразное состояние вещества.

Однако нахождение точного решения уравнения Шредингера макроскопического тела, содержащего громадное число переменных, — задача абсолютно невыполнимая. Она еще более сложна, чем аналогичная задача классической механики многих тел. Более того, явный вид функции ψ макроскопического тела сам по себе и не представляет интереса. Это не исключает возможности и целесообразности исследования функции ψ, не определяя ее явного вида, а непосредственно на основе самого уравнения Шредингера — нахождение таких ее свойств, которые определяли бы наблюдаемые особенности макроскопических тел, в частности существование и структуру кристаллической решетки. Но в такой постановке задача никогда не рассматривалась. Более того,

не доказано, получились ли бы на этом пути ожидаемые и необходимые результаты. При рассмотрении структуры кристаллической решетки и сил, удерживающих атомы, молекулы или ионы в положениях равновесия, приходится широко опираться на опытные данные.

2. Различают *ионные кристаллы*, *ковалентные кристаллы*, *молекулярные кристаллы*, *металлы.*

Кристаллическая решетка ионных кристаллов состоит не из нейтральных частиц, а из положительных и отрицательных ионов, притягивающихся друг к другу. Ионы образуются в результате перехода электронов от одного атома к другому. Электронные оболочки ионов, как правило, соответствуют электронным оболочкам инертных газов. Распределение электронов вблизи каждого иона близко к сферически симметричному и слабо нарушается в области соприкосновения соседних ионов. Типичными представителями ионных кристаллов могут служить NaCl, LiF, KI и т. д. Ионные кристаллы характеризуются большими *энергиями связи.* Под этим вообще понимают работу, которую надо совершить, чтобы при абсолютном нуле разложить систему на составные части. В случае ионных кристаллов такими составными частями являются положительные и отрицательные ионы, из которых построена решетка. Энергия связи решетки NaCl, например, составляет 764 кДж/моль (183 ккал/моль). Эта величина примерно в 1,7 раза больше отнесенной к одному молю энергии связи ионов Na^+ и Cl^- в молекуле NaCl, если предположить, что в молекуле они находятся на том же расстоянии, что и ближайшие ионы в кристаллической решетке. Такого же порядка энергии связи решеток аналогичных ионных кристаллов. Для ионных кристаллов характерна малая электрическая проводимость при низких температурах и хорошая проводимость при высоких температурах.

3. В ковалентных кристаллах (алмаз, кремний, германий и пр.), как и в молекуле водорода, связь *гомеополярная*, т. е. осуществляется *обменными силами.* Для таких кристаллов типично такое строение решетки, при котором число ближайших атомов, окружающих рассматриваемый атом, равно валентности элемента. Рассматриваемые кристаллы обычно образуются из легких элементов средних столбцов периодической системы. Валентные электроны атомов решетки *обобществлены.* Для кристаллов характерна высокая твердость, слабая электрическая проводимость у чистых образцов при низких температурах. Энергия связи кристаллической решетки у рассматриваемых кристаллов составляет примерно 700–1200 кДж/моль (170–280 ккал/моль).

4. Молекулярные кристаллы представляют собой слабо связанные агрегаты молекул. Связь обусловлена *силами Ван-дер-Ваальса.* К молекулярным кристаллам относятся почти все органические кристаллы и многие другие соединения. Молекулярная связь является единственной связью у кристаллов, образованных из атомов инертных газов. У таких веществ, как Ar, CH_4, энергия связи порядка 8 кДж/моль (2 ккал/моль). Для молекулярных кристаллов характерны низкие температуры плавления, кипения и возгонки, а также сильная сжимаемость.

5. Связь в металлах осуществляется посредством электронов, находящихся между ионами кристаллической решетки, подобно тому как электроны осуществляют гомеополярную связь между ядрами в молекуле водорода. Разумеется, невозможно провести детальный количественный расчет в такой многочастичной системе, какой является металл. Приходится довольствоваться качественными соображениями. К металлам относятся элементы, атомы которых содержат внешние недостроенные оболочки. Электроны таких оболочек сравнительно слабо связаны с атомными ядрами. Они могут переходить и действительно переходят от одного ядра к другому. Если даже на пути перехода электрона встречается потенциальный барьер, электрон может сравнительно легко преодолеть его туннельным способом. В результате ядра металла лишаются своих внешних оболочек. Их электроны не привязаны к индивидуальным атомам, а *обобществлены*, т. е. принадлежат всему кристаллу. Такие «свободные» электроны ведут себя подобно электронному газу. Из-за принципа Паули электроны не могут стоять на месте, а должны совершать оживленное движение — электронный газ в металле находится в *состоянии вырождения* (см. т. II, § 82).

Наличием свободных электронов объясняется высокая электрическая проводимость и теплопроводность металлов, специфический металлический блеск, особые механические свойства, позволяющие осуществлять ковку и штамповку.

Каждый ион кристаллической решетки металла заряжен положительно. Из-за этого между ионами действуют электрические силы отталкивания. Свободные электроны уравновешивают эти силы и удерживают ионы в положениях равновесия. Всякий раз, когда ион выходит из положения равновесия, легкие и быстрые свободные электроны перераспределяются в пространстве так, что возникают силы, возвращающие ион в положение равновесия. Этим и обеспечивается устойчивость кристаллической решетки и самого металла.

§ 56. Колебания атомов в одномерной прямолинейной цепочке

1. Для строгого обоснования допустимости и установления границ применимости сплошной модели твердого тела, использованной Дебаем в теории теплоемкости, надо, разумеется, рассмотреть задачу о колебаниях кристаллической решетки в последовательно атомистической постановке, как это сделали Борн и Карман. Рассмотрим этот вопрос на примере одномерной прямолинейной цепочки атомов. Таким путем, конечно, мы не получим точных количественных результатов, пригодных для трехмерного тела, но сильно упростим исследование и в то же время сохраним самые существенные качественные результаты.

2. Допустим сначала, что все атомы цепочки одинаковы и в положениях равновесия находятся на одинаковых расстояниях a друг от друга. Учтем только силы, действующие на каждый атом цепочки, которые исходят от двух соседних атомов. Действием всех остальных

атомов пренебрежем. Такое упрощение называется *приближением ближайших соседей.* Пусть атомы могут испытывать только продольные смещения из положений равновесия. Смещение n-го атома обозначим через ξ_n. Относительное смещение соседних атомов $(\xi_n - \xi_{n-1})$ будем считать малым по сравнению с «постоянной решетки» a. При смещении n-го атома относительно $(n-1)$-го возникает сила $F_{n,n-1}$, действующая на него и направленная противоположно относительному смещению. При малых относительных смещениях ее можно считать квазиупругой, т. е. положить равной

$$F_{n,n-1} = -\varkappa(\xi_n - \xi_{n-1}),$$

где «коэффициент упругости» $\varkappa$ для рассматриваемой цепочки есть величина постоянная. Полная сила, действующая на атом, будет

$$F_{n,n-1} + F_{n,n+1} = -\varkappa(\xi_n - \xi_{n-1}) - \varkappa(\xi_n - \xi_{n+1}) = \\ = \varkappa(\xi_{n-1} - 2\xi_n + \xi_{n+1}),$$

а уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{\xi}_n = \varkappa(\xi_{n-1} - 2\xi_n + \xi_{n+1}), \tag{56.1}$$

где m — масса атома.

Нахождение общего решения уравнения (56.1) для очень большого числа атомов N — очень трудная задача. Для нахождения частного решения рассмотрим прежде всего случай, когда $N = \infty$, точнее, когда цепочка атомов бесконечно простирается в обе стороны. Цепочка обладает *трансляционной симметрией*, т. е. переходит сама в себя при сдвиге на любое целое число периодов a. Можно думать, что существует частное решение уравнения (56.1), отвечающее этому типу симметрии: все атомы совершают одинаковые гармонические колебания, но фазы этих колебаний сдвинуты на одну и ту же величину при переходе от каждого атома к соседнему с бóльшим номером. Такое решение представляется бегущей монохроматической волной постоянной амплитуды

$$\xi = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)}. \tag{56.2}$$

Особенность этой волны состоит в том, что аргумент x может принимать только дискретные значения $x_n = na$ ($n = \ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots$). Если волновое число k заменить на $k = (2\pi/a)p$, где p — любое целое число, то колебания всех атомов цепочки не изменятся. Поэтому, не нарушая общности, можно ограничить изменения k одним интервалом длины $2\pi/a$, называемым *зоной Бриллюэна.* В частности, интервал

$$-\frac{\pi}{a} \leqslant k \leqslant \frac{\pi}{a} \tag{56.3}$$

называется *основной зоной Бриллюэна* (1889–1969). При положительных k волна бежит вперед (вправо), при отрицательных — назад (вле-

во). При таких k длина волны Λ (величина существенно положительная) может изменяться в пределах

$$\infty > \Lambda \geqslant 2a. \tag{56.4}$$

Таким образом, из-за дискретности структуры не имеет смысла говорить о распространении волн, длины которых меньше $2a$. Например, если положить $\Lambda = a$, то в этом случае смещения всех атомов в каждый момент времени были бы одинаковы, т. е. цепочка перемещалась бы как целое. А это эквивалентно длине волны $\Lambda = \infty$, входящей в интервал (56.4).

Найдем теперь условие, при котором волна (56.2) будет решением уравнения (56.1). Для этого замечаем, что $\ddot{\xi}_n = -\omega^2\xi_n$. Подставляя это выражение в уравнение (56.1), найдем, что оно будет удовлетворено при условии

$$\omega^2 = \frac{\varkappa}{m}\left(2 - e^{ika} - e^{-ika}\right) = 2\frac{\varkappa}{m}\left(1 - \cos ka\right).$$

Ограничиваясь положительными значениями k, отсюда получаем

$$\omega = 2\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\sin\frac{ka}{2}, \tag{56.5}$$

так как, конечно, частота ω существенно положительна.

3. Фазовая скорость волны равна

$$c = \frac{\omega}{k} = a\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\,\frac{\sin(ka/2)}{ka/2}, \tag{56.6}$$

т. е. зависит от k, а значит, и от Λ. Следовательно, имеет место *дисперсия*, почему формула (56.5) и называется *дисперсионной*. Групповая скорость волны равна

$$u = \frac{d\omega}{dk} = a\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\cos\frac{ka}{2}. \tag{56.7}$$

При $ka = \pi$ (т. е. при $\Lambda = 2a$) она обращается в нуль. В этом случае *волна не переносит энергию*. Физическую причину этого легко уяснить при обращении к рис. 96. На нем стрелками представлены мгновенные

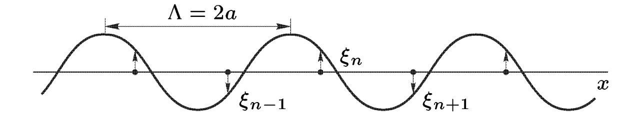


Рис. 96

смещения атомов для случая, когда $\Lambda = 2a$. В этом случае, как видно из рисунка, $\xi_{n-1} = \xi_{n+1} = -\xi_n$, так что уравнение (56.1) принимает вид

$$m\ddot{\xi}_n = -4\varkappa\xi_n.$$

Оно показывает, что в рассматриваемом случае атомы как бы не связаны, а изолированы и каждый из них совершает гармоническое колебание с частотой $\omega = 2\sqrt{\varkappa/m}$. Фазы колебаний соседних атомов сдвинуты на π. Поскольку силы взаимодействия любых двух соседних атомов, а также их смещения в любой момент времени равны и противоположны, работа атома 1 над атомом 2 в точности равна работе атома 2 над атомом 1. Это значит, что в приближении ближайших соседей передачи энергии от атома к атому не происходит. Что касается фазовой скорости c, то при $ka = \pi$ она будет

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\sqrt{\varkappa/m}}{\pi/a} = 2\,\frac{a}{\pi}\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}.$$

Зависимость угловой частоты ω, а также фазовой и групповой скоростей от волнового числа k графически представлена на рисунках 97 и 98. При малых k, т. е. для длинных волн, формула (56.5) переходит

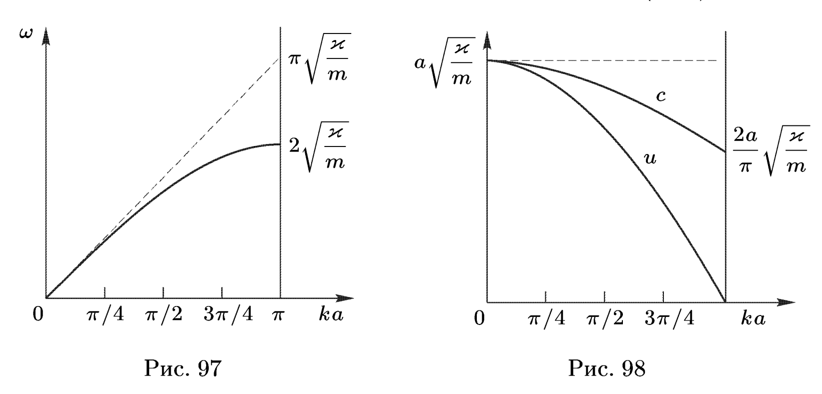


Рис. 97 Рис. 98

в $\omega = ka\sqrt{\varkappa/m} = \text{const}$, а обе предельные скорости вырождаются в $c = u = a\sqrt{\varkappa/m} = \text{const}$. В этом случае дисперсия пропадает и цепочка ведет себя как сплошная среда. Поэтому значение скорости $c = u$ может быть получено из формулы, которую дает теория упругости для скорости звука в стержне (см. т. I, § 81). Действительно, модуль Юнга E для цепочки следует определить с помощью формулы $F_{n,n-1} = E(\xi_n - \xi_{n-1})/a$, поскольку $(\xi_n - \xi_{n-1})/a$ есть относительное растяжение цепочки. А так как сила натяжения равна $F_{n,n-1} = \varkappa(\xi_n - \xi_{n-1})$, то $E = \varkappa a$. Роль же плотности играет величина $\rho = m/a$. Поэтому из формулы для скорости звука в стержне получается

$$u = c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = a\sqrt{\frac{\varkappa}{m}},$$

как это и должно быть. Таким образом, в случае длинных волн $(\Lambda \gg a)$ частота колебаний может быть вычислена по формулам, относящимся к непрерывной модели цепочки. Даже в случае самых коротких волн $(\Lambda = 2a)$ ошибка, получаемая таким путем, не так уж велика: для ω

получается величина $\pi\sqrt{\varkappa/m}$, т. е. примерно в полтора раза больше правильного значения $2\sqrt{\varkappa/m}$.

4. Движение цепочки в общем случае может быть представлено как наложение волн различных частот, распространяющихся вперед и назад. Конечно, всякая реальная цепочка ограничена. Обозначим число атомов в ней через n, тогда ее длина будет $l = (n-1)a$. Если атомы могут совершать только продольные колебания, то число степеней свободы цепочки будет n. Закрепим неподвижно крайние атомы. Этим число степеней свободы уменьшится на две и станет равным $n - 2$. Частным решением уравнения (56.1) будет волна (56.2), распространяющаяся вперед ($k \geqslant 0$). Волна той же частоты, распространяющаяся назад, также будет решением. Следовательно, частным решением будет и суперпозиция таких двух волн:

$$\xi = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} + \eta_0 e^{i(\omega t + kx)} = e^{i\omega t}(\xi_0 e^{-ikx} + \eta_0 e^{ikx}).$$

Но так как крайние атомы закреплены, то в любой момент времени их смещения должны быть равны нулю. Значит, должно быть

$$\xi_0 + \eta_0 = 0, \quad \xi_0 e^{-ikl} + \eta_0 e^{ikl} = 0.$$

Из первого соотношения следует, что $\eta_0 = -\xi_0$. С учетом этого второе соотношение дает

$$e^{ikl} - e^{-ikl} = 0,$$

или

$$\sin kl = 0 \tag{56.8}$$

Таким образом, получается стоячая волна

$$\xi = \xi_0 e^{i\omega t}(e^{-ikx} - e^{ikx}) = -2i\xi_0 \sin kx\, e^{i\omega t} = 2\xi_0 \sin kx\, \sin\omega t, \tag{56.9}$$

причем

$$kl = N\pi \quad (N = 0, 1, 2, \ldots, N_{\text{макс}}), \tag{56.10}$$

или

$$l = N\frac{\Lambda}{2},$$

т. е. *на длине цепочки должно укладываться целое число полуволн.* Каждой стоячей волне (56.9) соответствует собственное, или нормальное, колебание цепочки.

Максимальное значение N получается при максимальном значении $k = \pi/a$, т. е. $N_{\text{макс}} = l/a = n - 1$. Однако это значение, как и значение $N = 0$, следует исключить, так как им соответствуют такие значения k, при которых все атомы получают одинаковые смещения. А поскольку крайние атомы неподвижны, то и все прочие атомы были бы неподвижны. Следовательно, в цепочке с закрепленными концами может возбудиться всего $n - 2$ нормальных колебаний, что в точности равно числу степеней свободы цепочки. Общее движение цепочки с закрепленными концами может быть представлено наложением таких $n - 2$ нормальных колебаний.

Итак, *для длинных волн действительно можно пользоваться непрерывной моделью твердого тела.* Это и делается в теории Дебая

для вычисления теплоемкости твердых тел при низких температурах, когда заметной энергией обладают только длинные волны. К тому же выводу можно прийти и в общем случае, рассматривая колебания трехмерной кристаллической решетки, состоящей из одинаковых частиц (одноатомное твердое тело). Только в таком трехмерном теле, если пренебречь анизотропией, к *продольным колебаниям*, рассмотренным выше для одномерной цепочки, добавляются еще две ветви *поперечных колебаний*, т. е. колебаний, перпендикулярных к волновому вектору **k** и совершающихся во взаимно перпендикулярных плоскостях. Число нормальных колебаний, как и число степеней свободы, утраивается.

5. До сих пор предполагалось, что кристалл состоит из *одинаковых* атомов. В случае кристаллов, элементарная ячейка которых содержит несколько *различных* атомов, добавляются колебания этих атомов относительно друг друга. Для качественного решения вопроса воспользуемся опять одномерной цепочкой, но состоящей из двух разных атомов, чередующихся друг с другом (рис. 99). Массы этих атомов обозначим через M и m $(M > m)$, а их смещения из положений

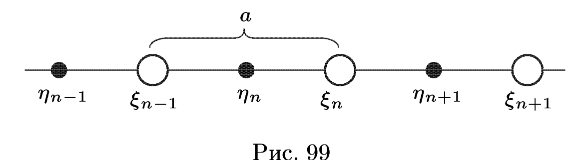


Рис. 99

равновесия — через ξ_n и η_n соответственно. Как и раньше, проведем расчет в приближении ближайших соседей, т. е. примем во внимание силы взаимодействия только соседних атомов. На рис. 99 показано расположение атомов цепочки в положении равновесия. Под каждым атомом обозначено смещение его из этого положения. Применительно к этому рисунку по аналогии с уравнением (56.1) получаем

$$\begin{aligned} M\ddot{\xi}_n &= \varkappa(\eta_{n-1} - 2\xi_n + \eta_n), \\ m\ddot{\eta}_n &= \varkappa(\xi_{n+1} - 2\eta_n + \xi_n). \end{aligned} \tag{56.11}$$

Затем ищем частное решение этой системы уравнений в виде монохроматической бегущей волны

$$\xi_n = \xi_0 e^{i(\omega t - kna)}, \quad \eta_n = \eta_0 e^{i(\omega t - kna)}, \tag{56.12}$$

предполагая, что a меняется в интервале (56.3), причем под a теперь понимается расстояние между двумя соседними одинаковыми атомами. После подстановки в (56.11) получится

$$\begin{aligned} (M\omega^2 - 2\varkappa)\xi_0 + \varkappa(1 + e^{ika})\eta_0 &= 0, \\ \varkappa(1 + e^{-ika})\xi_0 + (m\omega^2 - 2\varkappa)\eta_0 &= 0. \end{aligned} \tag{56.13}$$

Исключение ξ_0 и η_0 дает

$$Mm\omega^4 - 2\varkappa(M + m)\omega^2 + 2\varkappa^2(1 - \cos ka) = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{\varkappa}{Mm}\left(M + m \pm \sqrt{M^2 + m^2 + 2Mm\cos ka}\right). \tag{56.14}$$

Этой формулой и определяется спектр собственных частот колебаний цепочки. Из-за двойного знака перед квадратным корнем получаются две ветви частот. Знаку минус соответствует частота $\omega_1 = \omega_1(k)$, знаку плюс — частота $\omega_2 = \omega_2(k)$. Ветвь $\omega_1 = \omega_1(k)$ называется *акустической* или *дебаевской*, ветвь $\omega_2 = \omega_2(k)$ — *оптической* или *борновской.* Обе ветви представлены на рис. 100. При малых k (длинные волны) частота ω_1 также мала и меняется линейно в зависимости от k. В этом случае, как видно из (56.13), $\xi_0 = \eta_0$, а потому $\xi_n = \eta_n$. Это значит, что соседние атомы с массами M и m (и вообще все атомы, расположенные на отрезке, малом по сравнению с длиной волны) колеблются в *одинаковых фазах.* При таких колебаниях цепочка может быть аппроксимирована сплошной одномерной моделью.

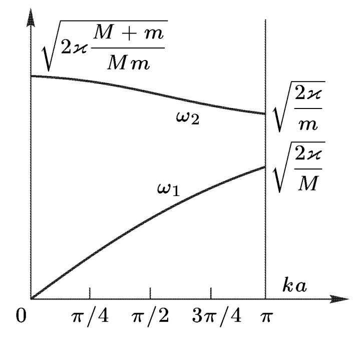


Рис. 100

Ветвь $\omega_2 = \omega_2(k)$ характеризуется тем, что для нее при $k \to 0$ ω_2 не стремится к нулю, а, наоборот, стремится к максимуму. При малых k каждое из уравнений (56.13) переходит в $M\xi_0 = -m\eta_0$, а потому $M\xi = -m\eta$. Это значит, что в этом случае соседние атомы с массами M и m колеблются в *противоположных фазах*, т. е. происходит колебание одного атома относительно другого.

6. В трехмерной кристаллической решетке, элементарная ячейка которой содержит s атомов, существуют $3s$ ветвей *нормальных колебаний.* Из них три ветви *акустические*: одной соответствуют *продольные* колебания, двум другим — *поперечные.* Остальные $3s - 3$ ветвей *оптические.* Частоты некоторых нормальных колебаний могут совпадать из-за симметрии решетки. Частоты акустических колебаний для длинных волн стремятся к нулю, для таких колебаний они пропорциональны волновому вектору. В этом случае соседние атомы элементарной ячейки движутся *синфазно*, и кристалл можно рассматривать как *сплошную среду.* Оптические колебания характеризуются высокими частотами, не обращающимися в нуль для бесконечно длинных волн. При оптических колебаниях происходят сильные смещения атомов элементарной ячейки относительно друг друга.

Рассеяние света на тепловых акустических волнах сопровождается изменением частоты, в этом состоит *явление Мандельштама–Бриллюэна* (см. т. IV, § 99, а также задачу 2 к § 57). Оптическая ветвь колебаний характеризуется частотами $\nu \equiv \omega/2\pi \sim 10^{12}$–$10^{13}$ Гц, они лежат в инфракрасной области спектра, почему и получили название оптических. Оптические колебания могут сопровождаться изменением

электрических моментов элементарной ячейки (например, в случае кристалла NaCl, когда имеет место относительное смещение ионов Na^+ и Cl^-). Тогда возникают инфракрасные полосы поглощения и соответствующая им аномальная дисперсия в оптическом спектре кристалла. С инфракрасными колебаниями связано явление *комбинационного рассеяния света* (см. т. IV, § 100).

Понятно, что ввиду дискретности пространственной решетки волновой вектор $\mathbf{k}$, как и в одномерной цепочке, определен не однозначно. К нему можно прибавить произвольный вектор $2\pi\mathbf{K}$, чтобы фаза колебаний всех атомов $\omega t - \mathbf{kr}$ изменилась на $2\pi n$, где n — произвольное целое число (положительное или отрицательное). Физически такое изменение ни в чем не проявляется. Если $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ — базисные векторы кристаллической решетки, то вектор $\mathbf{K}$ определяется выражением

$$\mathbf{K} = n_1\mathbf{a}_1^* + n_2\mathbf{a}_2^* + n_3\mathbf{a}_3^*, \tag{56.15}$$

где n_1, n_2, n_3 — произвольные целые числа (положительные и отрицательные), а $\mathbf{a}_1^*$, $\mathbf{a}_2^*$, $\mathbf{a}_3^*$ — базисные векторы обратной решетки, т. е.

$$\mathbf{a}_1^* = \frac{[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3]}{(\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3])}, \quad \mathbf{a}_2^* = \frac{[\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1]}{(\mathbf{a}_2[\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1])}, \quad \mathbf{a}_3^* = \frac{[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]}{(\mathbf{a}_3[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2])} \tag{56.16}$$

(см. т. II, § 130, а также т. I, § 7). Минимальная область изменения вектора $\mathbf{k}$, которой можно ограничиться, чтобы представить любые колебания атомов решетки, называется *зоной Бриллюэна.* В частности, можно поступить так, чтобы точка $\mathbf{k} = 0$ в пространстве волновых векторов была точкой зеркальной симметрии. Тогда зону Бриллюэна называют *основной.* Вектор $\mathbf{K}$ (56.15) при любых целых числах n_1, n_2, n_3 принято называть *вектором обратной решетки.*

ЗАДАЧА

Почему формула (56.14) не переходит в формулу (56.5) при $M = m$?

§ 57. Фононы и квазичастицы

1. Внутреннее движение покоящегося тела может быть описано указанием движения каждой индивидуальной частицы, из которых состоит тело. Такой способ может быть назван *индивидуальным* описанием движения. Но возможен и *коллективный* способ, когда движение тела в целом рассматривается как результат наложения движений, в каждом из которых участвуют все частицы тела. Второй способ может обладать преимуществом в тех случаях, когда частицы тела взаимодействуют друг с другом. Тогда разложение полного движения тела на составляющие коллективные движения может быть произведено так, чтобы каждое составляющее коллективное движение могло быть возбуждено в отдельности. Если возбужденное движение тела не очень интенсивно, то оно всегда может быть разложено на плоские монохроматические волны различных частот, распространяющиеся в теле в различных направлениях практически независимо друг от друга. При увеличении интенсивности возбуждения наступают *нелинейные* явления. Однако

если отступления от линейности не очень значительны, то по-прежнему можно пользоваться разложением на плоские монохроматические волны, но между отдельными волнами возникает взаимодействие.

Оба способа описания движения в классической физике принципиально равноправны. Но в квантовой физике преимущество отдается второму способу. Причина этого заключается в квантовании. Уже Дебай в теории теплоемкости твердого тела (см. § 54) с успехом подверг квантованию энергию стоячих монохроматических волн, на которые может быть разложено движение тела. В вопросе о теплоемкости проводить дальнейшее разложение стоячих волн на бегущие не обязательно, поскольку в этом случае интерес представляет энергия тела в состоянии статистического равновесия, а, например, не его импульс, который для покоящегося тела равен нулю в любой момент времени. Но при рассмотрении различных процессов в телах, даже при наличии локального статистического равновесия, надо перейти к разложению движения на бегущие волны и к их квантованию.

В соответствии с гипотезой де Бройля, подтвержденной опытными фактами, с каждой бегущей монохроматической волной связаны энергия и импульс, определяемые соотношениями

$$\mathscr{E} = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \tag{57.1}$$

введенными по аналогии с теорией фотонов. Волна, несущая энергию и импульс, определяемые формулами (57.1), в каком-то отношении ведет себя как частица. Частица, уподобляемая звуковой волне в вышеуказанном смысле, называется *фононом*. Не надо вкладывать в представление о фононе нечто большее, чем то, что содержится в этом определении. Фонон несет энергию и импульс, связанные с частотой волны ω и волновым вектором $\mathbf{k}$ посредством постоянной Планка $\hbar$. Но бессмысленно, например, говорить о форме и размерах фонона, представляя его каким-то маленьким шариком. Поэтому фонон называют не «частицей», а «квазичастицей», а его импульс — «квазиимпульсом». В пп. 3 и 4 будут приведены дальнейшие соображения, оправдывающие эту терминологию.

Строго определенные значения величины ω и $\mathbf{k}$ имеют только в случае неограниченных плоских волн. Реальное же существование имеют только *пространственно ограниченные* волны. Реальным образом фонона является не бесконечная, а ограниченная волна, например волновой пакет.

2. Гипотеза фононов согласуется, например, с существованием *звукового давления*. Рассмотрим ради простоты изотропную сплошную среду (изотропное твердое тело, жидкость, газ), в которой распространяется монохроматическая плоская продольная звуковая волна, нормально падающая на плоскую границу твердого тела и поглощаемая им. Такая волна ежесекундно передает единице поверхности твердого тела импульс $cN\hbar k$, где c — скорость звука, а N — число фононов в единице объема среды. Этот импульс и есть давление $\mathscr{P}$, оказываемое звуком на тело. Поскольку сплошная среда недиспергирующая, скорость звука в ней c совпадает с фазовой скоростью $c_{\text{фаз}} = \omega/k$.

Поэтому

$$\mathscr{P} = \varepsilon, \tag{57.2}$$

где $\varepsilon = N\hbar\omega$ — объемная плотность звуковой энергии, падающей на тело. Формула (57.2) справедлива и в общем случае нормального падения волны при наличии отражения и прохождения. Только в этом случае плотность энергии дается выражением $\varepsilon = (1 + r)N\hbar\omega$, где r — коэффициент отражения. Полученные результаты согласуются с опытом и с тем, что дает классическая гидродинамика.

3. В изотропных твердых сплошных телах могут возбуждаться фононы двух типов — *продольные* и *поперечные*. В случае изотропных сред частоты поперечных фононов определяются только длиной волны и не зависят от их поляризации. В кристаллах, помимо продольных и поперечных, могут возбуждаться и другие фононы, соответствующие различным частотам и типам поляризации колебаний. (Как правило, в кристаллах «продольные» и «поперечные» волны не являются строго продольными и строго поперечными.) Для всех таких фононов справедливы соотношения (57.1). Только в этих случаях частота колебаний ω связана с волновым вектором $\mathbf{k}$ не обязательно линейной однородной зависимостью, как было при отсутствии дисперсии, а зависимостью более сложного вида $\omega = \omega(\mathbf{k})$. Такого рода зависимости называются *дисперсионными соотношениями*. Они различны для различных фононов. Примерами дисперсионных соотношений могут служить формулы (56.5) или (56.14), выведенные для одномерных цепочек атомов.

Волновой вектор $\mathbf{k}$ волны в кристаллической решетке определен *не однозначно*, а с точностью до слагаемого, равного вектору обратной решетки (см. § 56, п. 6). В соответствии с этим и вектор $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ определен также *неоднозначно*. Но можно устранить эту неоднозначность, если ограничить область изменения $\mathbf{k}$ основной зоной Бриллюэна, что мы и будем делать. Так однозначно определенный вектор $\mathbf{p}$ называется *квазиимпульсом* фонона. Самый фонон, поскольку ему свойственны признаки частицы, называется *квазичастицей*, о чем уже было сказано раньше. Такой термин вводится, чтобы подчеркнуть, что квазичастица не является «настоящей» частицей.

Квазичастицы вводятся и в других разделах физики. Так, квазичастицами являются фотоны в вакууме и в особенности в среде. Представление о них согласуется с такими явлениями, как интерференция, эффект Доплера, эффект Вавилова–Черенкова, изменение частоты света при распространении в гравитационном поле. Мы уже рассматривали эти явления с точки зрения существования квазичастиц света, хотя и не пользовались самим термином «квазичастица».

4. В идеальной кристаллической решетке, свободной от посторонних примесей и лишенной различных дефектов (примесные атомы, атомы в междоузлиях, незаполненные узлы), плоская звуковая волна в линейном приближении должна распространяться *без затухания* и *рассеяния в стороны*. Линейное приближение означает, что разложение потенциальной энергии кристалла по степеням смещений атомов из положений равновесия обрывается на членах *второй* степени. Тогда

возникают волны с гармоническими колебаниями атомов, или фононы, *не взаимодействующие друг с другом.* При наличии членов высших степеней, если они достаточно малы (а это, как правило, имеет место всегда, пока решетка не разрушена, т. е. вплоть до температуры плавления), также можно говорить о распространении плоских волн, или фононов, в кристалле. Однако в этом случае наступает *взаимодействие различных волн* (*фононов*). Поскольку энергия и импульс фононов квантуются, такое взаимодействие носит характер *столкновений*, в которых происходит уничтожение старых и рождение новых фононов. Наличие в потенциальной энергии членов третьей степени приводит к столкновениям, в которых одновременно участвуют три фонона. При наличии членов четвертой степени появляются столкновения четырех фононов и т. д.

Фононы и вообще квазичастицы хорошо приспособлены для описания *слабых* коллективных возбуждений в телах. Между последовательными столкновениями фонон движется свободно, и если «длина свободного пробега» его достаточно велика по сравнению с постоянной кристаллической решетки, то возбужденное состояние кристалла можно в известном отношении рассматривать как *фононный газ.* При этом число фононов не сохраняется, что дает основание рассматривать их как *бозе-частицы* (*бозоны*).

На рис. 101 графически изображены примеры возможных взаимодействий фононов. Фононы изображены стрелками, а факты их взаимодействия — кружками. Рисунок 101 *а* соответствует распаду фонона

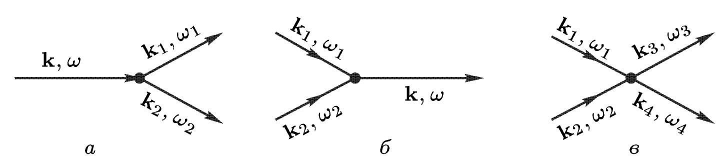


Рис. 101

$\mathbf{k}, \omega$ на два фонона $\mathbf{k}_1, \omega_1$ и $\mathbf{k}_2, \omega_2$. Рисунок 101 *б* изображает столкновение фононов $\mathbf{k}_1, \omega_1$ и $\mathbf{k}_2, \omega_2$, в результате которого возникает один фонон $\mathbf{k}, \omega$. На рис. 101 *в* изображено столкновение двух фононов $\mathbf{k}_1, \omega_1$ и $\mathbf{k}_2, \omega_2$, завершающееся возникновением двух новых фононов $\mathbf{k}_3, \omega_3$ и $\mathbf{k}_4, \omega_4$.

При взаимодействии фононов соблюдается *закон сохранения энергии.* В случае процесса, изображенного на рис. 101 *а*, он записывается в виде

$$\hbar\omega = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 \qquad (57.3)$$

и аналогично в других случаях. Однако закон сохранения квазиимпульса *может и не соблюдаться.* Причиной этого является неоднозначность волнового вектора $\mathbf{k}$, отмеченная выше. Действительно, разложим, например, вектор $\mathbf{k}$ на два вектора: $\mathbf{k} = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2$ (рис. 102). Вектор $\mathbf{k}$ предполагается лежащим в основной зоне Бриллюэна, так что при нашем ограничении $\hbar\mathbf{k}$ является квазиимпульсом. Но пред-

положим, что составляющие векторы $\mathbf{k}_1'$ и $\mathbf{k}_2'$ (или по крайней мере один из них) настолько длинны, что они не умещаются в основной зоне Бриллюэна. Тогда, при нашем ограничении, векторы $\hbar\mathbf{k}_1'$ и $\hbar\mathbf{k}_2'$ не будут квазиимпульсами. Квазиимпульсы $\hbar\mathbf{k}_1$ и $\hbar\mathbf{k}_2$ получаются из них путем прибавления векторов вида $2\pi n\mathbf{K}$, где $\mathbf{K}$ — вектор обратной решетки (56.15), а $n = 0, \pm 1, \ldots$ Например, для процесса, соответствующего рис. 101 *а*, следует писать

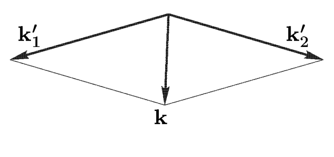


Рис. 102

$$\hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2 = \hbar\mathbf{k} + 2\pi\mathbf{K}. \qquad (57.4)$$

Если $n = 0$, то в процессе взаимодействия фононов квазиимпульс сохраняется. Такие процессы называются *нормальными*. Если же $n \neq 0$, то соответствующие процессы называются *процессами переброса*. Существование процессов переброса лишний раз оправдывает введение терминов «квазичастица» и «квазиимпульс» вместо простых терминов «частица» и «импульс».

Конечно, соотношения вида (57.3) и (57.4) справедливы не только при взаимодействии фононов между собой, но и при взаимодействии их с другими частицами и квазичастицами, например с фотонами. При переводе на классический язык эти соотношения выражают *законы интерференции волн*, *принцип Доплера* и вообще *законы изменения частоты волн при различных процессах*. Вот почему комбинационное рассеяние света, рассеяние Мандельштама–Бриллюэна, эффект Вавилова–Черенкова, изменение частоты света при распространении в гравитационном поле и другие явления могут быть истолкованы как с волновой точки зрения, так и с помощью представления о квазичастицах.

5. Воспользуемся теперь представлением о фононах для рассмотрения *теплопроводности твердых тел*. Мы имеем в виду диэлектрики, а не металлы. В диэлектриках перенос тепла осуществляется *фононами*, тогда как в металлах основную роль в этом процессе играют *электроны*. Само понятие теплопроводности относится к *локально равновесному* состоянию неподвижного тела, каждой точке которого можно приписать определенную температуру. Чтобы получить полностью равновесное состояние тела, можно, например, заключить его в жесткую оболочку, поддерживаемую при постоянной температуре. Тогда в результате теплового возбуждения фононов, их поглощения и рассеяния на других фононах, на примесях и дефектах решетки, на границах тела и окружающей оболочки, в конце концов установится *полностью термодинамически равновесное* состояние тела, однозначно определяемое только температурой оболочки. Оно характеризуется вполне определенным значением плотности энергии фононов в пространстве, вполне определенным распределением ее по спектру частот, хаотическим (в частности, изотропным) распределением направлений распространения фононов. В этом отношении равновесное состояние фононов в полости напоминает аналогичное состояние фотонов — черное излучение. Локально равновесное состояние тела отличается от

полностью равновесного тем, что температура тела меняется от точки к точке, а все прочие параметры, характеризующие состояние тела с фононами, успевают принять практически равновесные значения, соответствующие этой температуре. Локально равновесное состояние и имеется в виду при рассмотрении теплопроводности.

6. Будем сначала предполагать, что кристалл идеальный, т. е. не содержит примесей, а кристаллическая решетка лишена всех дефектов. Совокупность фононов в теле будем рассматривать как *фононный газ* и воспользуемся для его теплопроводности формулой

$$\varkappa = \frac{1}{3}\,\overline{v}C\lambda, \tag{57.5}$$

которую дает элементарная теория газов (см. т. II, § 89). Здесь C — теплоемкость единицы объема тела (в прежних обозначениях $C = nmc_v$), $\overline{v}$ — средняя скорость фонона в теле, λ — средняя длина свободного пробега фонона. Величина $\overline{v}$ имеет смысл средней скорости звука в теле, C определяется в квантовой теории теплоемкости твердого тела. Обе эти величины могут быть измерены экспериментально. Наибольшие трудности встречает определение величины λ. В гармоническом (линейном) приближении звуковые волны (фононы) распространяются в идеальном кристалле, не встречая никаких препятствий. В этом приближении нет столкновений между фононами. Если бы кристалл был безграничным, то λ, а с ней и теплопроводность $\varkappa$ были бы бесконечно большими. В следующих приближениях, когда в потенциальной энергии решетки учитываются члены третьей и высших степеней относительно смещений атомов из положений равновесия, появляются столкновения между фононами, ограничивающие их длины свободного пробега. Основное значение имеют члены третьей степени, приводящие к тройным столкновениям (см. рисунки 101 *а* и 101 *б*).

7. Однако *нормальные столкновения между фононами не влияют на теплопроводность кристалла.* Причина этого та же, что и в аналогичном случае прохождения электрического тока через металл: электрическая проводимость металлов связана с длиной свободного пробега электронов и дырок, но столкновения между самими электронами и самими дырками на нее не оказывают никакого влияния (т. III, § 42, п. 2). Действительно, при нормальных столкновениях квазиимпульс фонона совпадает с истинным импульсом, а последний при столкновениях сохраняется. Энергия при столкновениях также сохраняется. При распаде фонона прежний фонон исчезает, а вместо него появляются два новых фонона, которые и переносят через кристалл те же энергию и импульс. При столкновении двух фононов они исчезают, передавая импульс и энергию образовавшимся двум новым фононам, которые также продолжают нести их через кристалл. Так происходит при трехфононных процессах. Аналогичное имеет место в столкновениях с одновременным участием четырех, пяти и более фононов. Таким образом, нормальные столкновения между фононами не могут замедлить передачу энергии или импульса через кристалл. Если бы

все столкновения между фононами были нормальными, то теплопроводность бесконечной идеальной решетки была бы также бесконечной.

Возникает вопрос, почему приведенные рассуждения неприменимы к теплопроводности газа, состоящего из обычных частиц (атомов и молекул), хотя в этом случае при столкновениях также соблюдаются законы сохранения энергии и импульса? Дело в том, что при столкновениях частиц обычного газа они не уничтожаются и не рождаются. Налетающая частица, сама не уничтожаясь, при столкновении передает импульс и энергию уже существующим, а не рождающимся вновь частицам. При этом в газе нет переноса вещества, а передача энергии не полная. Энергия ударяющей частицы в результате столкновения может и уменьшаться, и увеличиваться Но если в газе есть градиент температуры, то энергия «горячих» частиц преимущественно уменьшается, а «холодных» увеличивается. Благодаря этому в газе и возникает поток тепла, направленный в сторону более низкой температуры.

Из приведенных рассуждений следует, что *теплопроводность идеального кристалла может быть связана только с такими столкновениями фотонов*, *которые сопровождаются процессами переброса*, так как при этих столкновениях не соблюдается закон сохранения квазиимпульса. Значит, только эти столкновения и должны быть приняты во внимание при вычислении средней длины свободного пробега фонона, входящей в формулу (57.5).

8. Впрочем, сами вычисления очень громоздки и не могут быть выполнены без подробных сведений о межатомных силах взаимодействия в кристалле, которыми для большинства кристаллов мы не располагаем. С этим связано неудовлетворительное состояние теории: есть четкие физические представления и методы расчета, которыми, однако, нельзя воспользоваться для получения окончательных количественных результатов. Мы ограничимся только краткими качественными соображениями.

Вблизи абсолютного нуля температур, когда тепловых фононов практически нет, средняя длина свободного пробега фонона ограничивается размерами кристалла. Здесь дело обстоит аналогично тому, что имеет место в случае ультраразреженных газов, когда длина свободного пробега молекулы велика по сравнению с размерами сосуда, в котором заключен газ (см. т. II, § 95). Полагая в формуле (57.5) $\lambda = l$, где l — размеры кристалла, мы получим величину $\varkappa$, которая будет характеризовать не только внутренние свойства кристалла, но будет зависеть и от его размеров. При низких температурах скорость $\overline{v}$ практически постоянна, а теплоемкость по теории Дебая пропорциональна T^3, поэтому и теплопроводность кристалла будет также пропорциональна T^3.

При повышении температуры влияние размеров кристалла отойдет на второй план. Определяющими будут *столкновения между фононами*, сопровождающиеся процессами переброса. За счет этого, а также за счет увеличения теплоемкости произойдет и быстрое увеличение теплопроводности. В этой области температур величина λ, а с ней и теплопроводность $\varkappa$ кристалла уже перестают зависеть от размеров кристалла, а становятся только его внутренними свойствами. В области

высоких температур можно ожидать зависимости $\varkappa \sim 1/T$. Действительно, в этой области справедлив классический закон равномерного распределения кинетической энергии по степеням свободы, в силу которого энергии всех фононов становятся одинаковыми (не зависящими от частоты ω). Поэтому плотность фононов N пропорциональна плотности энергии, т. е. T, а теплоемкость C достигает классического предела, который не зависит от T. Поэтому средняя длина свободного пробега фонона $\lambda \sim 1/N$, а с ней и теплопроводность $\varkappa$ становятся пропорциональными $1/T$.

Из изложенного ясно, что при повышении температуры теплопроводность диэлектрического кристалла должна проходить через максимум. Это отчетливо проявляется на рис. 103, где приведена экспериментальная кривая теплопроводности, полученная для искусственного сапфира (Al_2O_3). Максимум на кривых для различных веществ проявляется не всегда так резко. Причиной этого являются примеси и дефекты кристаллической решетки, вносящие дополнительное теплосопротивление и уменьшающие ее теплопроводность.

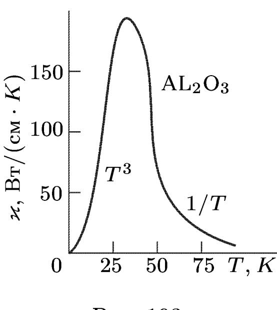


Рис. 103

ЗАДАЧИ

1. Определить давление, оказываемое звуковой волной на границу раздела двух изотропных непоглощающих сплошных сред (рис. 104).

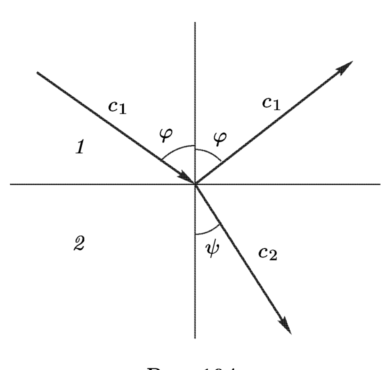


Рис. 104

Р е ш е н и е. Так как нормальные слагающие потока энергии по обе стороны границы раздела сред одинаковы, то

$$N_1\varepsilon c_1\cos\varphi - N_1'\varepsilon c_1\cos\varphi = N_2\varepsilon c_2\cos\psi,$$

где N_1, N_1' и N_2 — числа падающих, отраженных и прошедших фононов в единице объема, c_1 и c_2 — скорости звука в средах *1* и *2*, $\varepsilon = \hbar\omega$ — энергия фонона (одинаковая в обеих средах). Введя коэффициент отражения $r = N_1'/N_1$, отсюда получим

$$N_2 = \frac{c_1\cos\varphi}{c_2\cos\psi}(1-r)N_1.$$

Искомое давление $\mathscr{P}$ равно нормальной составляющей импульса, которую передает звук единице границы раздела сред:

$$\mathscr{P} = N_1p_1c_1\cos^2\varphi - (N_2p_2c_2\cos^2\psi - N_1'p_1c_1\cos^2\varphi).$$

Так как сплошная среда не обладает дисперсией, то $pc = \varepsilon$. Поэтому, используя значения N_1' и N_2, приведенные выше, и вводя плотность энергии падающей звуковой волны $\mathscr{E} = N_1\varepsilon$, получим

$$\mathscr{P} = \mathscr{E}\cos\varphi\operatorname{ctg}\psi\{(1+r)\cos\varphi\operatorname{tg}\psi - (1-r)\sin\varphi\}. \qquad (57.6)$$

2. Используя представление о фононах, получить формулу для тонкой структуры Мандельштама–Бриллюэна (см. т. IV, § 99).

Решение. Связь между энергией и импульсом для света в среде (фотона) и звука (фонона) имеет вид

$$p_{\text{фот}} = \frac{n\mathscr{E}_{\text{фот}}}{c}, \quad p_{\text{зв}} = \frac{\mathscr{E}_{\text{зв}}}{v_{\text{зв}}}, \tag{57.7}$$

где c — скорость света в вакууме, а $v_{\text{зв}}$ — скорость звука (фонона) в среде. К таким же соотношениям приводит и классическая теория. Уравнения сохранения энергии и импульса при излучении и поглощении фонона:

$$\mathscr{E}_{\text{зв}} = \pm(\mathscr{E}_{\text{фот}} - \mathscr{E}'_{\text{фот}}), \quad \mathbf{p}_{\text{зв}} = \pm(\mathbf{p}_{\text{фот}} - \mathbf{p}'_{\text{фот}}),$$

где плюс перед скобками относится к излучению, а минус — к поглощению фонона. Нештрихованными величинами обозначены энергия и импульс фотона до, а штрихованными — после излучения или поглощения фонона. Второе уравнение умножим на c/n, возведем оба уравнения в квадрат, а затем почленно вычтем. Тогда, используя связь между энергией и импульсом, получим

$$\left(\frac{c^2}{n^2 v_{\text{зв}}^2} - 1\right)\mathscr{E}_{\text{зв}}^2 = 4\mathscr{E}_{\text{фот}}\mathscr{E}'_{\text{фот}} \sin^2\frac{\theta}{2},$$

где θ — угол между направлениями падающего и рассеянного фотонов. В последнем уравнении слева единицей в скобках можно пренебречь, а справа $\mathscr{E}'_{\text{фот}}$ заменить на $\mathscr{E}_{\text{фот}}$, так как энергия фонона пренебрежимо мала. Сделав это и извлекая квадратный корень, получим

$$\mathscr{E}_{\text{зв}} = \pm 2n\frac{v_{\text{зв}}}{c}\,\mathscr{E}_{\text{фот}} \sin\frac{\theta}{2},$$

или

$$\mathscr{E}_{\text{фот}} - \mathscr{E}'_{\text{фот}} = \pm 2n\frac{v_{\text{зв}}}{c}\,\mathscr{E}_{\text{фот}} \sin\frac{\theta}{2}. \tag{57.8}$$

Это соотношение — чисто классическое. При его выводе были использованы только законы сохранения энергии и импульса, а также связь между энергией и импульсом для света и звука, которая также является классической. Переход от энергии к частоте производится уже с помощью квантовых соотношений $\mathscr{E}_{\text{фот}} = \hbar\omega$ и $\mathscr{E}_{\text{зв}} = \hbar\omega_{\text{фон}}$, причем существенно, что в обоих соотношениях постоянная $\hbar$ — одна и та же. В результате при квантовой интерпретации получается такая же формула

$$\omega - \omega' = \pm 2n\frac{v_{\text{зв}}}{c}\,\omega \sin\frac{\theta}{2}, \tag{57.9}$$

как и в классической теории. Однако окончательный результат совершенно не зависит от числового значения постоянной Планка.

§ 58. Энергетические зоны в твердых телах

1. В § 100 т. III было введено понятие об энергетических зонах в кристаллах. Это понятие существенно опирается на квантовые представления, о которых в т. III могли быть сообщены лишь предварительные сведения. Поэтому здесь мы опять вернемся к вопросу об энергетических зонах. Нас будет интересовать только принципиальная качественная сторона вопроса, а не точные количественные результаты,

требующие сложных и громоздких вычислений. К тому же для реальных кристаллов при настоящем состоянии теории провести точные вычисления невозможно. Мы вынуждены довольствоваться простейшими моделями и наглядными соображениями. Содержание этого параграфа полезно сопоставить с содержанием § 100 т. III.

Принципиально можно было бы поступить так, как это уже было намечено в т. III, § 100. Возьмем очень большое число тождественных атомов, удаленных друг от друга настолько далеко, что взаимодействие между ними очень мало и практически ни в чем не проявляется. В таком случае каждый из атомов ведет себя как изолированный. Ему свойственны определенные энергетические уровни. Система из N удаленных атомов будет иметь те же уровни энергии, но каждый уровень повторится N раз. Начнем теперь непрерывно сближать атомы. Появится взаимодействие между ними, в результате чего каждый первоначальный энергетический уровень станет как-то непрерывно смещаться. В конце концов из большого числа N атомов образуется кристалл. Проследив за эволюцией отдельных энергетических уровней, можно определить и энергетические уровни образовавшегося кристалла.

Конечно, при большом числе N атомов провести эту программу практически невозможно. Но это можно сделать для случая двух атомов. Полученные результаты можно будет использовать для выяснения вопроса, как качественно будет вести себя и система из большого числа атомов. Более того, для дальнейшего упрощения можно заменить реальный атом мысленным «одномерным атомом», проще всего — гармоническим осциллятором. Это фактически уже было сделано в § 52 при выяснении природы молекулярных сил (см. также т. III, § 137). Повторим еще раз полученные там результаты в форме, приспособленной для целей настоящего параграфа.

2. Пока осцилляторы раздвинуты достаточно далеко, гамильтониан системы обоих осцилляторов, если сохранять обозначения § 52, представится в виде

$$\widehat{H} = \widehat{H}_1 + \widehat{H}_2, \tag{58.1}$$

где

$$\widehat{H}_1 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\mu}{2}\omega_0^2 x_1^2, \quad \widehat{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\mu}{2}\omega_0^2 x_2^2. \tag{58.2}$$

Осцилляторы ведут себя независимо друг от друга. Энергия каждого из них квантуется и равна $\hbar\omega_0(n + 1/2)$. Энергия системы в целом равна сумме энергий обоих осцилляторов. Ввиду тождественности осцилляторов одна и та же энергия $\mathscr{E}$ системы может быть представлена двумя способами: либо как $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1^{\mathrm{I}} + \mathscr{E}_2^{\mathrm{II}}$, либо как $\mathscr{E} = \mathscr{E}_2^{\mathrm{I}} + \mathscr{E}_1^{\mathrm{II}}$. В первом случае осциллятор I имеет энергию $\mathscr{E}_1$, осциллятор II — энергию $\mathscr{E}_2$. Во втором случае полная энергия $\mathscr{E}$ та же, но энергией $\mathscr{E}_1$ обладает осциллятор II, а энергией $\mathscr{E}_2$ — осциллятор I. Это значит, что энергетический уровень $\mathscr{E}$ системы осцилляторов двукратно вырожден.

При сближении осцилляторов в гамильтониане системы

$$\widehat{H} = \widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 - \lambda x_1 x_2 \tag{58.3}$$

появляется член $-\lambda x_1 x_2$, учитывающий взаимодействие между ними. Чтобы выяснить влияние этого члена, проще всего ввести нормальные координаты

$$q_1 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \quad q_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}. \tag{58.4}$$

Тогда гамильтониан системы преобразуется в

$$\widehat{H} = \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\mu}{2}\omega_1^2 q_1^2\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial q_2^2} + \frac{\mu}{2}\omega_2^2 q_2^2\right), \tag{58.5}$$

где

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\lambda}{\mu}, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{\lambda}{\mu}. \tag{58.6}$$

Вид гамильтониана (58.5) показывает, что в нормальных координатах q_1 и q_2 система совершает два независимых коллективных колебания с частотами ω_1 и ω_2. Можно сказать и иначе. Введение нормальных координат формально соответствует переходу к описанию движения системы осцилляторов посредством двух квазичастиц, гармонически колеблющихся с частотами ω_1 и ω_2. Движение каждой квазичастицы описывает не движение отдельного осциллятора, а обоих осцилляторов вместе. Общее движение всей системы складывается из наложения движений обеих квазичастиц. Энергия первой квазичастицы представляется выражением $\hbar\omega_1(n_1 + 1/2)$, второй $\hbar\omega_2(n_2 + 1/2)$, причем оба эти уровня не вырождены. Таким образом, в результате взаимодействия происходит расщепление двукратно вырожденного энергетического уровня на два уровня с частотами ω_1 и ω_2. Общее число уровней остается неизменным.

Все это можно было бы повторить без существенных затруднений для системы какого угодно числа тождественных гармонических осцилляторов. Задача сводится к введению нормальных координат, в которых кинетическая и потенциальная энергии системы одновременно приводятся к суммам квадратов. Такая процедура давно разработана в линейной алгебре и широко применяется, например, в теории малых колебаний колебательных систем со многими степенями свободы. Вся система по-прежнему формально сводится к совокупности независимых квазичастиц (гармонических осцилляторов) с различными собственными частотами. Первоначально вырожденный уровень энергии расщепляется на несколько уровней, причем общее количество уровней при сближении удаленных осцилляторов остается неизменным.

3. Теперь можно вернуться к вопросу, поставленному в начале этого параграфа: что следует ожидать при сближении тождественных бесконечно удаленных атомов, если число их N не вообразимо велико? В исходном положении взаимодействия между атомами нет. Поэтому кратность вырождения каждого энергетического уровня системы громадного числа атомов чудовищно велика. Сближение атомов включает

взаимодействие между ними, и вырождение снимается. По аналогии с системой осцилляторов следует ожидать, что энергетические уровни системы атомов начинают расщепляться. В конечном положении, когда из атомов образуется кристалл, первоначально вырожденный энергетический уровень расщепляется на громадное число уровней. Вместо одного вырожденного уровня возникает громадное количество их, образующих *полосу* или *энергетическую зону*.

Изложенное наглядно поясняет, как из отдельных уровней изолированных атомов возникает зонная структура энергии кристалла. Все сказанное без существенных изменений может быть распространено и на кристаллы, состоящие не из одинаковых, а из различных атомов (например, NaCl).

4. Взаимодействие атомов при их сближении проявляется прежде всего на *электронах наружных оболочек*, волновые функции которых сильно перекрываются. На внутренних электронах, волновые функции которых перекрываются незначительно, это взаимодействие сказывается гораздо слабее. Поэтому глубоко расположенные атомные уровни переходят в твердом теле в очень узкие полосы, а высоко расположенные уровни порождают значительно более широкие энергетические зоны. Самыми широкими оказываются зоны, соответствующие уровням *валентных электронов*. По этой причине при нагревании твердых тел испускаются не линейчатые, а непрерывные оптические спектры. Действительно, испускание линий оптического спектра ввиду их длинноволновости происходит при переходах между энергетическими уровнями крайней зоны, расстояния между которыми невелики, а сами уровни расположены непрерывно. В то же время в рентгеновских трубках с антикатодами из тяжелых металлов при достаточно высоких напряжениях наряду со сплошным излучением возбуждаются тонкие линии характеристического излучения, соответствующие переходам между узкими внутренними энергетическими зонами.

Таким образом, энергетический спектр кристалла состоит из нескольких полос, называемых *энергетическими зонами*, каждая из которых возникает в результате расщепления энергетических уровней отдельных атомов из-за их взаимодействия. В этом процессе расщепления участвуют главным образом валентные электроны, т. е. электроны наружных оболочек атомов. Из-за необычайно большого числа уровней, на которые расщепляются энергетические уровни изолированных атомов, энергия кристалла в пределах каждой зоны фактически меняется непрерывно. Соседние энергетические зоны могут быть разделены промежутками конечной ширины. Энергия кристалла не может принимать значения, лежащие в этих промежутках. Они образуют «щели» в энергетическом спектре кристалла и называются *запрещенными зонами*. Все остальные зоны называются *разрешенными*. Но могут быть и такие случаи, когда соседние зоны вплотную примыкают или перекрываются друг с другом. Крайняя зона, которой соответствуют наивысшие уровни энергии, называется *зоной проводимости*. Более глубоко лежащие зоны, получающиеся из-за расщепления уровней валентных электронов, называются *валентными зонами*.

5. Напомним и расширим теперь то, что было сказано в § 100 т. III относительно механизма прохождения электрического тока через кристалл. Все кристаллы разделяются на *металлы*, *диэлектрики* и *полупроводники.* Чтобы исключить влияние теплового движения, будем сначала предполагать, что температура кристалла равна абсолютному нулю. По принципу Паули на каждом энергетическом уровне может находиться не более двух электронов с противоположно направленными спинами. В равновесном состоянии будут заполнены электронами самые низкие энергетические уровни, а все вышележащие уровни окажутся свободными.

В диэлектрике валентная зона целиком заполнена электронами, а лежащая выше зона проводимости, отделенная от нее энергетической щелью значительной ширины, совсем не содержит электронов. Поэтому в электрических полях (слабее пробойного) диэлектрик не проводит электрического тока. В самом деле, при наложении постоянного внешнего электрического поля к гамильтониану кристалла добавляется малая поправка, соответствующая энергии кристалла во внешнем электрическом поле. Уравнение Шредингера всего кристалла слегка изменяется. Но так как число энергетических уровней зоны остается прежним, это приводит только к незначительному смещению энергетических уровней, что проявляется в *поляризации кристалла.* Существенно, однако, что и после наложения электрического поля зона остается по-прежнему *полностью заполненной электронами.* Никакие изменения состояния валентной зоны происходить не могут, поскольку с квантовой точки зрения все они сводятся к переходам электронов с одних энергетических уровней на другие. А это невозможно, если все уровни в валентной зоне заняты электронами. Электрический ток есть движение электронов, при котором они непрерывно переходят из одного состояния в другое. Следовательно, электроны, пока они находятся в целиком заполненной валентной зоне, *не могут участвовать в создании тока.* Для этого в валентной зоне необходимо создать незаполненные уровни энергии, т. е. перебросить некоторые электроны из валентной зоны в зону проводимости. Электрическое поле слабее пробойного этого сделать не может (если отвлечься от туннельных переходов из валентной зоны в зону проводимости). В более сильных полях возникает *электрический пробой* диэлектриков.

6. В металлах валентная зона заполнена электронами *целиком*, а зона проводимости лишь *частично.* Не имеет значения, существует ли щель между валентной зоной и зоной проводимости. Они могут вплотную примыкать и даже перекрываться между собой. Существенно только, чтобы в зоне проводимости были состояния, *не занятые электронами.* При наложении внешнего электрического поля **E** квантовые состояния внутри зоны проводимости слегка изменяются, однако состояния, не занятые электронами, в ней остаются. У электронов имеется возможность переходить в такие незанятые состояния. Переход, связанный с движением электрона в направлении поля **E**, т. е. против действующей на него силы, сопровождается увеличением энергии кристалла. Переход, связанный с обратным направлением движения элек-

трона, наоборот, уменьшает эту энергию. Поэтому переходы электронов против поля **E** более вероятны и будут преобладать над переходами в обратном направлении. Через кристалл потечет электрический ток в направлении поля **E**, в соответствии с соглашением, принятым для определения направления тока.

Переносимые заряды, если бы они не убирались от границ кристалла, создали бы электрическое поле, противоположное по направлению приложенному полю **E**. В результате ток в конце концов прекратился бы. Чтобы этого не было, надо указанные заряды убирать и тем самым поддерживать приложенное поле **E**. Можно было бы также в кристалле создать вихревое электрическое поле, например, помещением его в переменное магнитное поле. В таком случае равновесие невозможно, и внутри кристалла все время будет циркулировать индукционный электрический ток.

7. В полупроводниках, как и в диэлектриках, валентная зона *полностью заполнена* электронами, а зона проводимости *полностью свободна*. Обе зоны отделены одна от другой щелью конечной ширины. Однако в полупроводниках эта щель значительно уже, чем в диэлектриках. При абсолютном нуле температуры это обстоятельство не играет роли, так как в этом случае переход электрона из валентной зоны в зону проводимости невозможен (если не учитывать туннельные переходы). Но если температура кристалла отлична от абсолютного нуля, то электрон в валентной зоне может получить от иона кристаллической решетки энергии порядка kT и перейти в зону проводимости. (Именно порядка kT, так как из-за малой концентрации электронов в зоне проводимости они практически подчиняются классической статистике Больцмана.) Такой переход может быть осуществлен и другим способом, например освещением кристалла. Независимо от способа перехода электронов в зону проводимости кристалл приобретает способность проводить электрический ток.

Как и в металлах, в полупроводниках проводимость создается электронами, перешедшими в зону проводимости. Но существует и другой механизм проводимости. Электрон, ушедший из валентной зоны, оставляет в ней незаполненное состояние, называемое *дыркой*. Другой электрон в валентной зоне получает возможность перейти в это незаполненное состояние. При этом в валентной зоне создается новая дырка, в которую может перейти третий электрон, и т. д. Разумеется, при наличии электрического поля **E** переходы, связанные с движением электронов против **E**, более вероятны, чем переходы, связанные с обратным движением. Это и создает ток в направлении **E**. Вместе с движением электрона происходит движение и соответствующей дырки, но в обратном направлении. Явление происходит так, как если бы ток вызывался не движением отрицательных электронов, а противоположно направленным движением положительно заряженных дырок.

Примеси, даже в ничтожных количествах, сильно повышают электрическую проводимость полупроводника. В запрещенной зоне (щели между валентной зоной и зоной проводимости) они создают добавочные энергетические уровни. Допустим, что такие уровни расположены

вблизи края зоны проводимости. Тогда создается возможность для перехода электронов с таких уровней в зону проводимости. В результате проводимость полупроводника возрастает. Соответствующие примеси называются *донорами.* Они поставляют электроны в зону проводимости и увеличивают проводимость полупроводника. Если же добавочные уровни находятся вблизи края валентной зоны, то электроны из валентной зоны получают возможность переходить на эти уровни. В валентной зоне образуются дырки. Проводимость полупроводника также увеличивается. Она называется *дырочной проводимостью*, а соответствующая примесь — *акцептором.*

8. Проводимость полупроводников сильно увеличивается с повышением температуры. В чистых полупроводниках увеличение интенсивности теплового движения электронов облегчает вероятность перехода их через энергетическую щель из валентной зоны в зону проводимости. При наличии примесей также возрастает вероятность переходов электронов с примесных уровней в зону проводимости или переходов электронов из валентной зоны на те же примесные уровни. Все эти процессы ведут к повышению в полупроводнике концентрации носителей тока: электронов и дырок. С этим и связано увеличение проводимости полупроводников с повышением температуры.

Иначе ведут себя металлы. Концентрация электронов в них почти не зависит от температуры. Проводимость определяется главным образом *длиной свободного пробега* электрона. Длина свободного пробега отчасти ограничивается примесями решетки. Соответствующая часть проводимости не зависит от температуры. В бесконечной идеальной кристаллической решетке, лишенной всяких примесей и дефектов, плоская волна де Бройля, соответствующая движению электрона, распространялась бы *без затухания и рассеяния.* Проводимость такого кристалла была бы *бесконечно велика.* В действительности свободный пробег электрона ограничен размерами кристалла (ср. с § 57, п. 4), а также тепловыми флуктуациями и дефектами кристаллической решетки. Они возрастают с температурой, уменьшая длину свободного пробега электрона. В результате *проводимость чистых металлов уменьшается с повышением температуры.* (Здесь мы исключили из рассмотрения сверхпроводники.)

§ 59. Зонная структура и волны Блоха

1. Зонную структуру энергетического спектра кристалла можно получить также из уравнения Шредингера для стационарных состояний. Однако точное уравнение Шредингера для кристалла в целом решить и исследовать невозможно из-за громадного числа частиц (электронов и атомных ядер) в кристалле. Это уравнение необходимо предварительно упростить. При таком упрощении считается, что состояние кристалла можно приближенно описать не полной волновой функцией, зависящей от координат всех электронов и атомных ядер, а *одночастичными волновыми функциями* каждого электрона. Каждая из таких волновых функций зависит уже только от координат *одного* электрона, который

находится в силовом поле, создаваемом атомными ядрами и остальными электронами кристалла. Ядра ввиду их массивности считаются при этом неподвижными, а электроны как бы «размазаны» по всему кристаллу. Таким путем многочастичное волновое уравнение Шредингера заменяется одночастичным для каждого электрона.

Необходимо отметить, что потенциальное силовое поле, в котором находится рассматриваемый электрон, не задано, а само зависит от состояний электронов. Такое поле называется *самосогласованным*. Согласование состоит в том, что, с одной стороны, одночастичные волновые функции отдельных электронов формируются самосогласованным полем; с другой стороны, самосогласованное поле само зависит от вида одночастичных волновых функций электронов. Метод самосогласованного поля находит свое оправдание в том, что большинство результатов, к которым он приводит, согласуются с опытом. Это в свою очередь связано не с явным видом самосогласованного поля, а главным образом с его *пространственной периодичностью*, определяемой периодичностью самой кристаллической решетки.

Необходимо заметить также, что волновые функции достаточно ввести не для всех, а только для внешних, т. е. *валентных электронов*, сравнительно слабо связанных с атомами решетки. Остальные электроны можно считать прочно связанными с атомными ядрами. Получается модель решетки из положительно заряженных ионов, которые рассматриваются неподвижными. Пространственно периодическое самосогласованное поле создается такими ионами и плавающими между ними валентными электронами.

2. В такой постановке рассмотрим задачу о виде стационарных одночастичных волновых функций электрона в кристалле и структуре энергетического спектра электрона, предполагая, что внешних силовых полей нет, а сама решетка простирается бесконечно во все стороны. Во избежание математических усложнений ограничимся рассмотрением *одномерного кристалла* (т. е. бесконечной прямолинейной цепочки одинаковых атомов, находящихся на постоянном расстоянии a друг от друга). Уравнение Шредингера для стационарных состояний в этом случае имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = \mathscr{E}\psi, \qquad (59.1)$$

или

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \varkappa^2(x)\psi = 0, \qquad (59.2)$$

где введено обозначение

$$\varkappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(\mathscr{E} - U). \qquad (59.3)$$

Это — линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодически меняющимися коэффициентами, поскольку из-за отсутствия внешнего поля $\varkappa^2(x+a) = \varkappa^2(x)$ для любого x. Оно называется *уравнением Хилла* (частный случай *уравнения Матьё*).

Исследуем общий вид решений уравнения Хилла, используя периодичность функции $\varkappa^2(x)$. В силу этой периодичности

$$\frac{d^2\psi(x+a)}{dx^2} + \varkappa^2(x+a)\psi(x+a) = \frac{d^2\psi(x+a)}{dx^2} + \varkappa^2(x)\psi(x+a).$$

Отсюда видно, что если функция $\psi(x)$ есть решение уравнения Хилла, то функция $\psi(x+a)$ будет также решением того же уравнения. Если $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ — какие-либо два произвольных линейно независимых решения уравнения Хилла, то общее решение его может быть представлено в виде

$$\psi(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x),$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Докажем теперь, что среди решений уравнения Хилла существует такое решение $\Phi(x)$, что для любого $x \Phi(x+a) = \lambda\Phi(x)$, где λ — постоянная. Если такое решение существует, то его, разумеется, также можно представить в виде

$$\Phi(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x).$$

Для упрощения вычислений выберем линейно независимые решения $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ так, чтобы они удовлетворяли условиям

$$\psi_1(0) = 1, \quad \psi_1'(0) = 0;$$

$$\psi_2(0) = 0, \quad \psi_2'(0) = 1.$$

(В этом случае говорят, что функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ образуют *фундаментальную систему решений.*) Тогда при $x = 0$ требования $\Phi(x+a) = \lambda\Phi(x)$ и $\Phi'(x+a) = \lambda\Phi'(x)$ запишутся в виде

$$c_1\psi_1(a) + c_2\psi_2(a) = \lambda c_1,$$

$$c_1\psi_1'(a) + c_2\psi_2'(a) = \lambda c_2,$$

или

$$[\psi_1(a) - \lambda]c_1 + \psi_2(a)c_2 = 0,$$

$$\psi_1'(a)c_1 + [\psi_2'(a) - \lambda]c_2 = 0.$$

Для совместности этих линейных однородных уравнений (относительно c_1 и c_2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\begin{vmatrix} \psi_1(a) - \lambda & \psi_2(a) \\ \psi_1'(a) & \psi_2'(a) - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{59.4}$$

или

$$\lambda^2 - [\psi_1(a) + \psi_2'(a)]\lambda + [\psi_1(a)\psi_2'(a) - \psi_1'(a)\psi_2(a)] = 0.$$

Путем дифференцирования с учетом уравнения (59.2) нетрудно убедиться, что

$$\frac{d}{dx}\left[\psi_1(x)\psi_2'(x) - \psi_1'(x)\psi_2(x)\right] = 0.$$

Следовательно, функция, стоящая в квадратных скобках, постоянна. Ее значение найдется, если положить $x = 0$. Тогда она обратится в 1. Такое же значение эта функция будет иметь и при $x = a$. Введем, далее, обозначение

$$\psi_1(a) + \psi_2'(a) = 2L.$$

Величина L, разумеется, постоянна, поскольку используется однозначно определенное (фундаментальное) решение уравнения Хилла (59.2). Она называется *постоянной Ляпунова* (1857–1918). Ее значение определяется функцией $\varkappa$, т. е. в конце концов параметром $\mathscr{E}$. Теперь для определения λ получается квадратное уравнение

$$\lambda^2 - 2L\lambda + 1 = 0. \tag{59.5}$$

Из него найдем два значения λ:

$$\lambda_{1,2} = L \pm \sqrt{L^2 - 1}. \tag{59.6}$$

Тем самым определится не одно, а даже *два* решения уравнения (59.2): $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$, обладающие требуемым свойством. (Случай равных корней мы исследовать не будем — он может быть рассмотрен предельным переходом $\lambda_1 \to \lambda_2$.) Решения $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ линейно независимы, и их удобно выбрать для представления общего решения в виде

$$\psi = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x). \tag{59.7}$$

Сами решения $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$, конечно, не могут быть найдены, пока функция $\varkappa^2(x)$ (т. е. в конце концов самосогласованное поле U) неизвестна, а параметр $\mathscr{E}$ не фиксирован. Но это не мешает оперировать функциями $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ для установления общих свойств решений уравнения Хилла (59.2). А интересующие нас свойства таких решений существенно зависят от величины постоянной Ляпунова L.

3. Допустим сначала, что постоянная L по модулю больше единицы: $|L| > 1$. Тогда оба корня λ_1 и λ_2 вещественны и по модулю один больше, а другой меньше единицы, так как $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Поэтому из уравнения $\Phi(x + a) = \lambda\Phi(x)$ следует, что при $x \to +\infty$ одна из функций $\Phi_1(x)$ или $\Phi_2(x)$ неограниченно возрастает, а при $x \to -\infty$ неограниченно возрастает другая. В силу этого при $|L| > 1$ ни одно из решений $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$, а следовательно, и произвольная линейная комбинация их с постоянными коэффициентами (59.7), не может быть волновой функцией электрона в кристалле. Это означает, что в кристалле не существует состояний с энергией $\mathscr{E}$, для которых $|L| > 1$. Такие энергии образуют *запрещенные энергетические зоны.*

Если же $|L| < 1$, то можно положить $L = \cos ka$, где k — постоянная. Тогда

$$\lambda_{1,2} = \cos ka \pm i \sin ka = e^{\pm ika}.$$

Следовательно,

$$\Phi_{1,2}(x+a) = e^{\pm ika}\Phi_{1,2}(x), \tag{59.7a}$$

т. е. при изменении x на a модуль функции $\Phi(x)$ не изменяется. Меняется только ее фаза. Обе функции $\Phi_1(x)$ или $\Phi_2(x)$, а также их произвольная линейная комбинация с постоянными коэффициентами могут быть решениями уравнения Шредингера (59.1). Поэтому возможны только такие значения энергии $\mathscr{E}$, для которых модуль постоянной Ляпунова меньше единицы. Они образуют *разрешенные энергетические зоны кристалла.*

Как и в предыдущем параграфе, мы пришли к *зонной структуре энергетического спектра электрона в кристалле.* В пределах каждой зоны энергия электрона меняется непрерывно. Это, конечно, связано с предположением о *безграничности цепочки.* Если бы цепочка была ограничена, то на ее концах должны были бы выполняться определенные граничные условия, которые бы и превратили непрерывный спектр зоны в ряд более или менее тесно расположенных линий. Для пояснения изложенного полезно рассмотреть модельную задачу 1, приводимую в конце этого параграфа.

4. Волновые функции $\Phi_1(x)$ или $\Phi_2(x)$ могут быть представлены в виде

$$\Phi_{1,2}(x) = e^{\pm ikx}P_{1,2}(x).$$

Очевидно, с одной стороны,

$$\Phi_{1,2}(x+a) = e^{\pm ik(x+a)}P_{1,2}(x+a).$$

С другой стороны, ввиду (59.7а),

$$\Phi_{1,2}(x+a) = e^{\pm ika}\Phi_{1,2}(x) = e^{\pm ik(x+a)}P_{1,2}(x).$$

Следовательно,

$$P_{1,2}(x+a) = P_{1,2}(x), \tag{59.8}$$

т. е. обе функции $P_1(x)$ и $P_2(x)$ периодичны с периодом a.

Если еще учесть временной множитель $e^{-i\omega t}$, то в отсутствие внешних силовых полей возможные полные волновые функции в кристалле можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Psi_1(x,t) &= P_1(x)e^{-i(\omega t - kx)}, \\ \Psi_2(x,t) &= P_2(x)e^{-i(\omega t + kx)}. \end{aligned} \tag{59.9}$$

Эти волны описывают «свободное движение» электрона в кристалле, когда все действующие на него силы ограничены взаимодействиями с ионами кристаллической решетки и остальными электронами, а внешних силовых полей нет. Они называются *волнами Блоха* (р. 1905). В отличие от плоских волн де Бройля, распространяющихся в свободном пространстве, в волнах Блоха величины $P_1(x)$ и $P_2(x)$ не постоянны, а *пространственно модулированы*, т. е. периодически меняются вдоль цепочки с периодом a. Из-за такой пространственной модуляции при

свободном распространении Ψ-волн в кристалле величину $\hbar k$ называют *квазиимпульсом электрона*, тогда как при движении электрона в свободном пространстве такая величина есть просто импульс. В трехмерных кристаллах плоская волна Блоха имеет тот же вид, что и (59.9). Только $P(x)$ заменяется на функцию $P(\mathbf{r})$, обладающую той же пространственной периодичностью, что и сама решетка, а волновое число k — на волновой вектор $\mathbf{k}$, которому соответствует *квазиимпульс* $\hbar\mathbf{k}$.

5. Выбором постоянной Ляпунова, а с ней и квазиимпульса $\hbar\mathbf{k}$ определяется (с точностью до постоянного множителя) волновая функция Блоха. Следовательно, определяется и энергия электрона $\mathscr{E}$, которая входит в стационарное уравнение Шредингера в качестве постоянного параметра. Таким образом, в пределах каждой зоны допустимые значения энергии электрона могут быть представлены как функции квазиимпульса:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}(p). \tag{59.10}$$

Отсюда получается

$$\omega = \omega(k), \tag{59.11}$$

так как $\mathscr{E} = \hbar\omega$. Оба эти соотношения называются *законами дисперсии* электронных волн или электрона в кристалле. Законами дисперсии описывается взаимодействие рассматриваемого электрона с ионами кристаллической решетки и со всеми остальными электронами (заряд которых «размазан» в пространстве).

В плоской волне Блоха

$$\Psi(x,t) = P(x)e^{i(kx-\omega t)} \tag{59.12}$$

волновое число k определено не однозначно. Но причина этого иная, чем в случае акустической волны в кристаллической решетке, где неоднозначность связана с *дискретностью значений, которые может принимать координата* x (см. § 56). В волне же Блоха координата x меняется *непрерывно*. Зато «амплитуда» волны $P(x)$ является функцией x. Можно всегда изменить постоянную k и функцию $P(x)$ так, чтобы при этом волновая функция (59.12) осталась неизменной. С этой целью достаточно сделать замену

$$k = k' + 2\pi p/a, \quad P'(x) = P(x)e^{i2\pi px/a},$$

где p — произвольное целое число. Тогда (59.12) преобразуется в

$$\Psi(x,t) = P'(x)e^{i(k'x-\omega t)},$$

т. е. в волну с другой периодически меняющейся амплитудой $P'(x)$ и другим волновым числом k'. От такого преобразования физически ничего не изменится.

Пользуясь указанной неоднозначностью, при рассмотрении движения электрона в какой-либо зоне волновое число k (волновой вектор $\mathbf{k}$) можно выбрать так, чтобы его модуль принял *наименьшее значение* из всех возможных. Особый интерес представляет случай, когда

$k \ll 2\pi/a$, а «амплитуда» $P(x)$ содержит постоянное слагаемое, значительно превосходящее все остальные слагаемые, быстро меняющиеся в пространстве. (Это, как будет видно из дальнейшего, имеет место при движении электрона, энергия которого находится вблизи одной из границ зоны.) В этом случае функция Ψ станет волной постоянной амплитуды, на которую накладывается мелкая рябь, периодически повторяющаяся на каждом периоде решетки. При рассмотрении усредненного движения электрона от такой ряби можно отвлечься, т. е. оперировать с электронной волной уже постоянной амплитуды, получающейся из $P(x)$ путем пространственного усреднения. Длина такой усредненной волны $\Lambda \equiv 2\pi/k$ предполагается очень большой по сравнению с периодом решетки a. Можно построить пакет таких усредненных волн в узкой области Δk. Тогда скорость *усредненного движения электрона* будет равна *групповой скорости*

$$v = \frac{d\mathscr{E}}{dp}. \tag{59.13}$$

6. Выделим какую-либо разрешенную зону и рассмотрим соотношения вблизи ее границ, за которыми следуют запрещенные зоны. На нижней границе зоны энергия $\mathscr{E}$ минимальна, а на верхней максимальна. Значит, производная $d\mathscr{E}/dp$, а с ней и усредненная скорость электрона на обеих границах зоны, обращается в нуль. Поэтому вблизи границы каждой зоны разложение $\mathscr{E}$ по степеням $p = \hbar k$ может начаться только с квадратичного члена. Если энергию отсчитывать от края зоны, а квазиимпульсы в местах максимума или минимума считать равными нулю, то получится

$$\mathscr{E} = \frac{p^2}{2m_{\text{эф}}}, \tag{59.14}$$

где

$$\frac{1}{m_{\text{эф}}} = \left(\frac{d^2\mathscr{E}}{dp^2}\right)_{p=0}. \tag{59.15}$$

Величина $m_{\text{эф}}$ называется *эффективной массой электрона.* Она, как правило, не совпадает с настоящей массой электрона m_e. На нижней границе зоны (минимум $\mathscr{E}$) эффективная масса $m_{\text{эф}}$ *положительна*, тогда как на верхней границе (максимум $\mathscr{E}$) она *отрицательна* (рис. 105). В трехмерной кристаллической решетке роль величины $1/m_{\text{эф}}$ играет тензор $\partial^2\mathscr{E}/\partial p_i \partial p_j$, но сущность явлений, связанных с понятием эффективной массы, можно уяснить на одномерной модели, где масса $m_{\text{эф}}$ является скаляром.

Связь между энергией электрона и его квазиимпульсом вблизи границы зоны формально имеет такой же вид, что и связь между энергией и импульсом свободной частицы. Это и дает основание в рассматриваемом случае называть величину $m_{\text{эф}}$ эффективной массой, а квазиимпульс $\mathbf{p}$ во многих руководствах называют просто импульсом. Специфика усредненного движения электрона в периодической

кристаллической решетке вблизи границы зоны заключается, однако, в том, что эффективная масса электрона может быть и положительной, и отрицательной. В силу этого *вблизи нижней границы зоны векторы* **v** *и* **p** *направлены одинаково, а вблизи верхней — противоположно*, как это видно из формулы (59.13) и рис. 105.

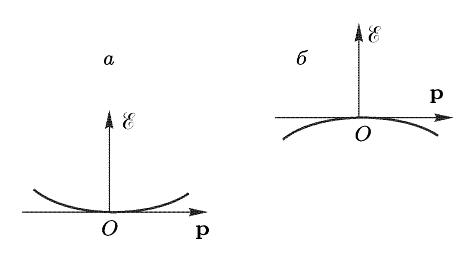


Рис. 105

7. До сих пор предполагалось, что внешнего силового поля нет. Наложим теперь на кристалл слабое постоянное электрическое поле. Оно в принципе несколько сместит энергетические уровни в кристалле. Но так как эти уровни практически непрерывны, то никакого изменения в положении уровней внутри зоны не произойдет. Могут только слегка сместиться границы самой зоны. Но в слабых полях этот эффект совсем не заметен и ни в чем не проявляется. Наложенное электрическое поле может, однако, вызвать изменения в заполнении энергетических уровней электронами. Это может произойти только тогда, когда по крайней мере некоторые энергетические уровни зоны *заполнены не целиком, а частично.* Согласно принципу Паули на одном уровне может находиться не более двух электронов, спины которых направлены противоположно. Если зона заполнена целиком, то электроны могут только обмениваться состояниями, что в силу их тождественности физически ни в чем не проявляется. Никакие движения электронов, связанные с их переходами из одного состояния в другое, невозможны. В этом случае при наложении электрического поля в кристалле и не возникнет электрического тока.

В состоянии равновесия при отсутствии внешнего поля в частично заполненной зоне будут заполнены электронами все *наиболее низкие* энергетические уровни. На каждом из них будут находиться два электрона с противоположно направленными спинами. При наложении электрического поля начнутся *переходы* из занятых состояний в свободные и *возникнет электрический ток.* Скорость усредненного движения электрона при этом определяется выражением (59.13). Влияние кристалла на движение электрона уже учтено дисперсионной формулой (59.10). Но на электрон в электрическом поле E действует еще внешняя сила $F = -eE$. Изменение энергии электрона за время dt под действием этой силы будет $d\mathcal{E} = Fv\,dt$. Но в силу (59.10) $d\mathcal{E} = (d\mathcal{E}/dp)dp = v\,dp$. Приравнивая оба выражения, получаем $dp = F\,dt$, т. е.

$$\frac{dp}{dt} = F. \tag{59.16}$$

Та же формула получается и в трехмерном случае. Только скаляры p и F следует заменить векторами **p** и **F**. Получится формула, вполне соответствующая классической. Дифференцирование же соотношения

(59.13) по времени дает $\dot{v} = (d^2\mathscr{E}/dp^2)(dp/dt)$, или на основании формул (59.15) и (59.16)

$$m_{\text{эф}}\dot{v} = F. \tag{59.17}$$

8. Рассмотрим специально случай, когда электроны заполняют *почти всю зону.* В этом случае ток связан с наличием свободных состояний вблизи верхней границы зоны (рис. 105 *б*), так что эффективная масса электрона отрицательна. Тогда согласно (59.17) ускорение электрона $\dot{v}$ направлено против действующей силы $F = eE$, т. е. по полю E $(e < 0)$. Электрон ведет себя как *отрицательно заряженная частица, но с отрицательной массой* $m_{\text{эф}}$. Но в точности *так же будет вести себя и воображаемая частица, у которой масса и заряд положительны.* Какие знаки приписать массе и заряду воображаемой частицы — не имеет значения. Существенно только, чтобы они были одинаковы. Но электрон с положительным зарядом и положительной массой ведет себя в точности так же, как «дырка», введенная в предыдущем параграфе. А так как число электронов, которые принимают участие в электрическом токе, в точности равно числу вакантных мест (дырок) в зоне, то *носителями тока формально могут считаться дырки.* Тем самым становится понятным, почему коэффициент Холла, например, может иметь не только отрицательный знак, но и положительный (см. т. III § 98).

9. Заметим в заключение, что в идеальной кристаллической решетке с неподвижными ионами плоская волна Блоха распространялась бы *без затухания.* Электрическое сопротивление кристалла в таком случае было бы равно нулю. Тепловые колебания, дефекты и примеси приводят к рассеянию электронных волн, т. е. ограничивают длины свободного пробега электрона, с чем и связано возникновение электрического сопротивления.

ЗАДАЧИ

1. Рассмотреть одномерную прямолинейную бесконечную кристаллическую решетку, моделируя потенциальную энергию $U(x)$ ступенчатой функцией, изображенной на рис. 106. Найти разрешенные и запрещенные зоны для такой цепочки, задав значения a и U, характерные для атомных размеров.

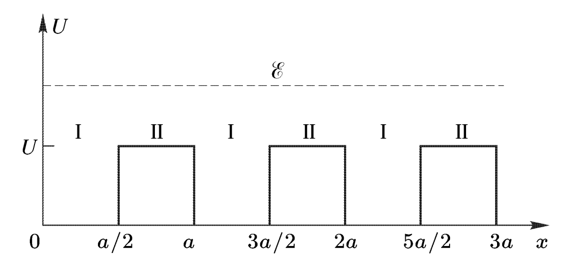


Рис. 106

Р е ш е н и е. На участках I примем потенциальную энергию равной нулю, а на участках II — постоянному значению U. Стационарное уравнение Шредингера с постоянной энергией $\mathscr{E}$ на участках I будет

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \varkappa_1^2\psi = 0, \tag{59.18}$$

а на участках II

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \varkappa_2^2\psi = 0, \tag{59.19}$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — постоянные:

$$\varkappa_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\,\mathscr{E}, \quad \varkappa_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\,(\mathscr{E} - U).$$

Будем сначала предполагать, что $\mathscr{E} > 0$ и $\mathscr{E} - U > 0$. Тогда $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ будут вещественными. Без нарушения общности их можно считать положительными. В интервале $(0, a/2)$ система фундаментальных решений представится функциями

$$\psi_1 = \cos\varkappa_1 x, \quad \psi_2 = \frac{1}{\varkappa_1}\sin\varkappa_1 x.$$

Найдем теперь эти функции в интервале $(a/2, a)$. В этом интервале представим первую функцию в виде

$$\psi_1 = A\cos\varkappa_2\left(x - \frac{a}{2}\right) + B\sin\varkappa_2\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

Неизвестные коэффициенты A и B найдутся из условий непрерывности функции $\psi_1(x)$ и ее производной $\psi_1'(x)$ на границе интервала $x = a/2$. Таким путем получаем, что в интервале $(a/2, a)$

$$\psi_1(x) = \cos\frac{\varkappa_1 a}{2}\cos\varkappa_2\left(x - \frac{a}{2}\right) - \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\sin\frac{\varkappa_1 a}{2}\sin\varkappa_2\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

Аналогично находим, что в том же интервале

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\varkappa_1}\sin\frac{\varkappa_1 a}{2}\cos\varkappa_2\left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{1}{\varkappa_2}\cos\frac{\varkappa_1 a}{2}\sin\varkappa_2\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

Для постоянной Ляпунова получается

$$L = \frac{1}{2}\left[\psi_1(a) + \psi_2'(a)\right] = \cos\frac{\varkappa_1 a}{2}\cos\frac{\varkappa_2 a}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)\sin\frac{\varkappa_1 a}{2}\sin\frac{\varkappa_2 a}{2}. \tag{59.20}$$

В случае, когда $\mathscr{E} > 0$, но $\mathscr{E} - U < 0$, изменим обозначения, заменив прежнее $\varkappa_2$ на мнимую величину $i\varkappa_2$, т. е. положим $\varkappa_2^2 = 2m(U - \mathscr{E})/\hbar^2$. Тригонометрические функции от мнимого аргумента следует заменить на гиперболические функции. Тогда формула (59.20) преобразуется:

$$L = \cos\frac{\varkappa_1 a}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\varkappa_2 a}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} - \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)\sin\frac{\varkappa_1 a}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\varkappa_2 a}{2}. \tag{59.21}$$

Наконец, когда $\mathscr{E} < 0$ и $\mathscr{E} - U < 0$, надо сделать вторую замену $\varkappa_1 \to i\varkappa_1$ (т. е. положить $\varkappa_1^2 = -2m\mathscr{E}/\hbar^2$). Тогда

$$L = \operatorname{ch}\frac{\varkappa_1 a}{2}\operatorname{ch}\frac{\varkappa_2 a}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)\operatorname{sh}\frac{\varkappa_1 a}{2}\operatorname{sh}\frac{\varkappa_2 a}{2}. \qquad (59.22)$$

Формулы (59.20)–(59.22) имеют довольно сложный вид. Их исследование удобно проводить только графически на примерах. Приведем числовой пример, полагая ориентировочно $a = 2 \cdot 10^{-8}$ см, $U = 5$ эВ. Соответствующая кривая для $L = L(\mathscr{E})$ приведена на рис. 107. На заштрихованных участках величина $|L|$ меньше единицы. Эти участки в нашей модели являются разрешенными зонами. Светлые участки, где $|L| > 1$, соответствуют запрещенным зонам.

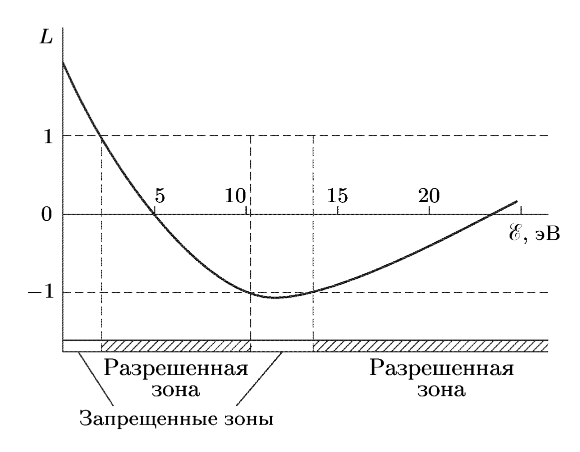


Рис. 107

2. Полюсы батареи соединены кристаллом, зона проводимости которого почти доверху заполнена электронами. В таком случае эффективная масса электрона отрицательна, и он движется через кристалл с ускорением в направлении электрического поля. Туда же будет направлена и средняя скорость электрона, так как до наложения поля средняя скорость была равна нулю. Иными словами, электрон движется через кристалл от анода к катоду. Следовательно, внутри батареи движение электрона происходит от катода к аноду, а ток внутри батареи в соответствии с принятым соглашением течет и противоположном направлении — от анода к катоду. Но такой ток заряжает батарею, а это противоречит закону сохранения энергии. Разрешить этот парадокс.

Решение. Все дело в том, что в этом рассуждении не учтено перераспределение электронов по возможным состояниям зоны при наложении электрического поля. На рис. 108 изображен участок дисперсионной кривой для рассматриваемого кристалла. При отсутствии внешнего поля штриховая горизонтальная прямая AB отсекает от этой кривой верхнюю часть, не заполненную электронами. В заполненных же частях столько же электронов движется направо, сколько и налево. Поэтому ток через кристалл не идет. При наложении электрического поля на электрон начинает действовать сила $F = eE$, направленная противоположно $\mathbf{E}$, так как заряд электрона отрицательный. Для конкретности примем, что поле направлено налево, а следова-

тельно, сила направо. В соответствии с (59.16) импульсы электронов справа по абсолютной величине должны увеличиваться, а слева уменьшаться. Это значит, что конец B незаполненного участка дисперсионной кривой должен опускаться, переходя в B', а конец A подниматься, переходя в A'. Скорость электронов направлена против $\mathbf{p}$, т. е. на нашем рисунке в левой половине направо, а в правой налево. Но в левой половине электронов больше, чем в правой. Поэтому через кристалл поток электронов будет идти слева направо, т. е. в направлении действующей силы $\mathbf{F}$(или против поля $\mathbf{E}$). Такой ток будет разряжать, а не заряжать батарею.

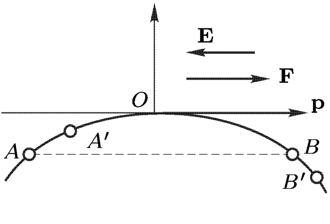


Рис. 108

Аналогичное рассуждение можно провести и в том случае, когда электронами заполнена небольшая нижняя часть зоны проводимости.

§ 60. Сверхтекучесть. Опытные факты

1. Кристаллизация (затвердевание) вещества происходит под действием сил притяжения между атомами (молекулами). Ей препятствует беспорядочное движение этих частиц. С классической точки зрения это движение только тепловое и полностью прекращается при абсолютном нуле температур. Поэтому с этой точки зрения при приближении к абсолютному нулю всякое вещество в конце концов должно перейти в твердое состояние. Не совсем так обстоит дело с точки зрения квантовой механики. Помимо теплового движения атомы совершают *нулевые колебания*, не прекращающиеся и при температуре абсолютного нуля. Их частота ω (а с ней и нулевая энергия $\hbar\omega/2$ тем больше, чем меньше масса атома ($\omega \sim 1/\sqrt{m}$). Если силы притяжения между атомами недостаточны, чтобы противостоять нулевым колебаниям, то даже при температуре абсолютного нуля тело не перейдет в твердое состояние, а останется жидким, если только давление не очень велико. Именно так обстоит дело с гелием. Причина этого двоякая. Во-первых, из всех инертных газов массы атомов гелия минимальны. Во-вторых, инертные газы имеют замкнутые (застроенные) наружные оболочки, характеризующиеся сферической симметрией. Такова и единственная K-оболочка атома гелия, состоящая всего из двух электронов. Из-за этого силы притяжения между атомами He относительно слабы, а плотность жидкого гелия мала (при температуре 2,20 K и давлении насыщенных паров она равна около 0,146 г/см^3). Поэтому при нормальном давлении гелий остается жидким и при температуре абсолютного нуля. В этом прежде всего проявляются *квантовые свойства* жидкого гелия, благодаря чему его называют *квантовой жидкостью*. Из всех известных веществ свойством оставаться жидким вплоть до температуры абсолютного нуля обладает только гелий. Но гелий можно получить и в твердом состоянии. Для этого надо повысить внешнее давление до 25,3 атм или выше. Повышение давления как бы эквивалентно усилению сил притяжения между атомами гелия.

Существуют два стабильных изотопа гелия — ${}^4_2$He и ${}^3_2$He. В воздухе содержится 0,0005 % He по объему. Природный гелий состоит почти исключительно из ${}^4_2$He и содержит только ничтожную часть ${}^3_2$He. Например, в смеси с ${}^4_2$He, полученной из воздуха, компонент ${}^3_2$He составляет всего 10^{-7} % общей массы газа. Детальное изучение свойств ${}^3_2$He стало возможным лишь после получения его в макроскопических количествах искусственными способами. Образуется ${}^3_2$He в результате β-распада трития:

$$ {}^3_1\mathrm{H} \to {}^3_2\mathrm{He} + e^- . $$

Сам же тритий ${}^3_1$H получают с помощью другой ядерной реакции:

$$ {}^6_3\mathrm{Li} + {}^1_0\mathrm{n} \to {}^3_1\mathrm{H} + {}^4_2\mathrm{He}, $$

происходящей при бомбардировке ядер ${}^6_3$Li нейтронами. Существуют и другие ядерные реакции, в которых выделяется ${}^3_2$He.

2. Ожижение природного гелия было произведено в 1908 г. Камерлинг-Оннесом (1853–1926) в Лейденской лаборатории. Только после этого открылась возможность исследования свойств веществ вблизи абсолютного нуля температур. Критическая температура ${}^4_2$He составляет $T_\text{к} = 5{,}25$ K, так что в жидком состоянии он может существовать только ниже этой температуры. Под давлением в 1 атм ${}^4_2$He кипит при температуре 4,21 K. Еще более низкую критическую температуру (3,35 K) имеет более легкий изотоп ${}^3_2$He. Под давлением в 1 атм жидкий ${}^3_2$He кипит при температуре 3,195 K. Естественный гелий был получен в твердом состоянии в 1926 г. Кеезомом (1876–1956), сменившим Камерлинг-Оннеса (после его смерти) на посту директора Лейденской лаборатории. Для получения твердого гелия при абсолютном нуле температур требуется давление не менее 25,3 атм, а при 60 K — порядка 10 000 атм. Твердый гелий — совершенно прозрачное и бесцветное вещество. В дальнейшем, где говорится о свойствах жидкого гелия, имеется в виду тяжелый изотоп ${}^4_2$He. Только в следующем параграфе затрагиваются свойства легкого изотопа ${}^3_2$He. Диаграмма состояния ${}^4_2$He приведена на рис. 109.

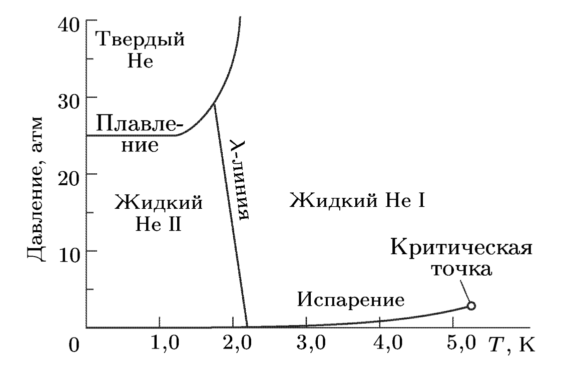


Рис. 109

При понижении температуры жидкий гелий претерпевает обратимое фазовое превращение второго рода, т. е. такое превращение, при котором не происходит выделения или поглощения тепла, а удельный объем жидкости остается неизменным (см. т. II, § 120). Температура перехода T_λ понижается с повышением давления по линейному закону от максимального значения 2,17 K при давлении насыщенных паров гелия (37,80 мм рт. ст.) до минимального значения 1,77 K при давлении 30 атм. На диаграмме состояния (T, p) точки, в которых совершается указанный фазовый переход, располагаются вдоль прямой, называемой *λ-линией.* Жидкость, температура которой (при одном и том же давлении) выше T_λ, называется *гелием-I*, а жидкость, температура которой ниже T_λ — *гелием-II.* Фазовый переход проявляется, во-первых, в *скачке теплоемкости* при температуре T_λ. По обе стороны от этой температуры теплоемкость гелия обращается в бесконечность по логарифмическому закону $C = \mathrm{const} \cdot \ln\left(|T - T_\lambda|^{-1}\right)$, но с различными коэффициентами пропорциональности (рис. 110). Кривая теплоемкости напоминает греческую букву λ. Отсюда и произошли названия *λ-точка* и *λ-линия.* Во-вторых, при переходе He I $\rightleftarrows$ He II скачкообразно меняется *температурный коэффициент расширения*, который для He II оказывается даже отрицательным.

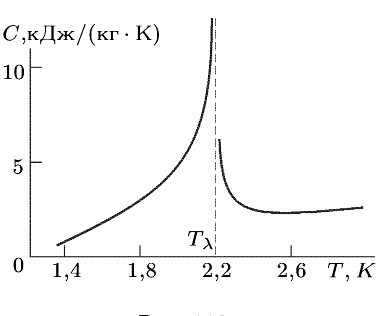


Рис. 110

Гелий-I ведет себя как обычная жидкость и обладает конечными значениями вязкости и теплопроводности. Гелий же II обладает рядом специфических свойств, совершенно непонятных с классической точки зрения и истолкованных только на основе квантовых представлений. В этом состоит вторая причина, почему его называют *квантовой жидкостью* (первая — уже упомянутое выше свойство гелия оставаться жидким при абсолютном нуле). Эти свойства являются проявлением одного — *сверхтекучести* гелия-II, открытой П. Л. Капицей (1894–1984) в 1937 г. Исследования течения жидкого гелия-II через узкие каналы и щели, производившиеся до Капицы, приводили к несогласованным результатам в отношении вязкости He II. Капица показал, что причина несогласованности состояла в том, что каналы и щели были *слишком широки.* Если оценить числа Рейнольдса, пользуясь полученными значениями вязкости He II, то они оказываются *очень большими.* При таких больших числах Рейнольдса течение He II было бы *турбулентным*, тогда как его считали ламинарным. Капица добился ламинарности, исследуя течение гелия-II через очень узкие капилляры (диаметром около 10^{-5} см и меньше) и щели. Оказалось, что при этих условиях жидкий гелий-II протекает через капилляры, *не испытывая сил вязкости.* Это явление исчезновения вязкости и было названо *сверхтекучестью.* С другой стороны, как показали измерения Кеезома и Мак Вуда в 1938 г., вязкость He II,

измеренная по методу затухания крутильных колебаний диска, погруженного в He II, оказалась конечной и вблизи λ-точки мало отличной от вязкости He I.

3. Ниже описываются некоторые явления, наблюдающиеся в He II. Однако для сокращения изложения мы сразу же даем и их толкование, основанное на так называемой *двухжидкостной модели* He II, предложенной в 1938 г. Л. Тиссой (р. 1907), а затем обоснованной и усовершенствованной Л. Д. Ландау (1908–1968) в 1941 г.

В основе этой модели лежит предположение, что He II состоит из двух компонентов: нормального (n) и сверхтекучего (s), каждый из которых характеризуется своей плотностью (так что полная плотность жидкости равна $\rho = \rho_n + \rho_s$) и своими гидродинамическими скоростями $\mathbf{v}_n$ и $\mathbf{v}_s$. Полная плотность потока импульса жидкости равна $\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s$. Плотность ρ_n нормального компонента стремится к нулю при $T \to 0$, когда гелий становится полностью сверхтекучим, а плотность ρ_s сверхтекучего компонента обращается в нуль при $T > T_\lambda$, когда весь гелий превращается в He I.

Впрочем, двухжидкостная модель является не более как только *способом выражения*, удобным для описания явлений, происходящих в He II. Как и всякое описание квантовых явлений в классических терминах, двухжидкостная модель при буквальном ее понимании *не является адекватной*. Нельзя сказать, что гелий-II состоит из нормальных и сверхтекучих атомов. Разделить его на такие атомы невозможно уже потому, что атомы гелия совершенно тождественны. При перестановке местами «нормального» и «сверхтекучего» атомов, если бы гелий-II состоял из таковых, его состояние осталось бы в точности таким же, каким оно было до перестановки. В § 61 (п. 4) будет приведена другая аргументация, почему о реальном различении He II на нормальный и сверхтекучий компоненты и их фактическом отделении друг от друга не может быть речи. Кроме того, в покоящемся He II различие между нормальным и сверхтекучим компонентами не обнаруживается. Точнее, надо было бы говорить не о существовании двух компонентов в He II, а *об одновременном сосуществовании двух движений — нормального и сверхтекучего*. Плотности ρ_n и ρ_s играют при этом просто роль *коэффициентов*, показывающих вклад каждого из этих движений в тот или иной эффект. При использовании двухжидкостной модели надо всегда иметь в виду сделанную оговорку.

Нормальное движение обладает всеми свойствами вязкого течения жидкости, тогда как сверхтекучее движение приводит к явлению сверхтекучести. Двухжидкостная модель предполагает также, что сверхтекучее движение в гелии-II не только не сопровождается вязкостью, но и *не принимает участия в переносе тепла*.

4. С изложенной точки зрения понятно исчезновение вязкости He II при течении через очень узкие капилляры. Нормальное (вязкое) течение He II через узкий капилляр просто не происходит. Совершается только сверхтекучее течение, лишенное вязкости. Эффект выражен тем лучше, чем уже капилляр, так как в широких капиллярах течение становится турбулентным.

Прямой опыт Э. Л. Андроникашвили (р. 1910) в 1946 г. подтвердил справедливость двухжидкостной модели. Схема этого опыта представлена на рис. 111. Стопка очень тонких дисков из алюминиевой фольги (толщина 0,0015 см), расположенных на одной оси на равных расстояниях друг от друга (0,021 см), подвешивалась на упругой нити и совершала крутильные колебания в He II. При колебаниях дисков увлекался только нормальный компонент He II, тогда как сверхтекучий не оказывал никакого влияния на эти колебания. При $T > T_\lambda$ в колебаниях принимала участие вся жидкость. При переходе через λ-точку период колебаний резко уменьшался, что объясняется появлением в He II сверхтекучего компонента. Уменьшение периода колебаний непрерывно продолжалось и при дальнейшем понижении температуры. Измеряя периоды колебаний, можно было определить относительные содержания ρ_n/ρ и ρ_s/ρ нормального и сверхтекучего компонентов при различных температурах.

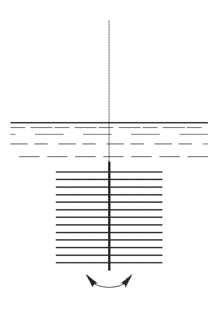


Рис. 111

Результаты графически представлены на рис. 112. Из него видно, что при абсолютном нуле содержится только сверхтекучий компонент. При повышении температуры его содержание уменьшается. Температура, при которой ρ_s/ρ обращается в нуль, и представляет собой точку перехода гелия-II в гелий-I. Таким образом, фазовый переход в жидком гелии связан с исчезновением (или появлением) сверхтекучей части жидкости. Это исчезновение (или появление) происходит постепенно, т. е. в λ-точке ρ_n/ρ принимает предельное значение $\rho_n/\rho = 1$ *непрерывным образом*, без скачка. Поэтому-то переход и является фазовым переходом второго рода.

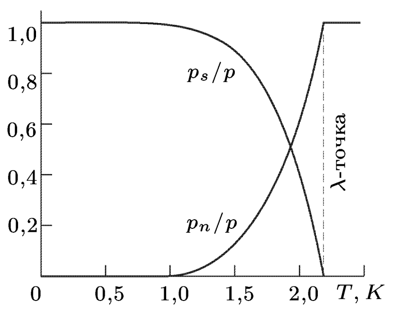


Рис. 112

С изложенной точки зрения понятно, почему при вытекании He II из сосуда через узкий капилляр или щель он не обнаруживает вязкости. Это связано с тем, что из сосуда вытекает сверхтекучая часть жидкости, не обнаруживающая трения, а нормальная часть задерживается в сосуде, протекая через капилляр несравненно медленнее, со скоростью, свойственной ее вязкости и толщине капилляра. Диск же, совершающий крутильные колебания в He II, тормозится трением о нормальную часть жидкости. Благодаря этому и получается конечное значение вязкости. Таким образом, в опытах с протеканием по капилляру обнаруживается наличие сверхтекучей части He II, а в опытах с колебаниями диска — нормальной.

5. Обратимся теперь к рассмотрению некоторых явлений, наблюдающихся в He II.

Пусть два сосуда, наполненные He II, соединены друг с другом узким капилляром. Практически роль капилляра может выполнять трубка, плотно забитая мелким порошком (например, наждачным). Между частицами порошка образуются извилистые каналы различной толщины (~ 100 нм), по которым и может течь сверхтекучая часть гелия. Если первоначально температуры He II в сосудах были одинаковы, а уровни жидкости различны, то начнется перетекание сверхтекучей части гелия из одного сосуда в другой. Оказывается, что при этом температура He II будет повышаться в сосуде, из которого гелий вытекает, и понижаться в сосуде, куда он втекает. Это явление называется *механотермическим* или *механокалорическим эффектом*. Оно объясняется тем, что сверхтекучая часть He II, с помощью которой только и осуществляется перетекание, не переносит никакого тепла. Поэтому внутренняя энергия в сосуде, откуда вытекает He II, не изменяется, а общее количество жидкости в нем уменьшается. На единицу массы приходится все большая и большая внутренняя энергия, что и приводит к повышению температуры. Напротив, из-за втекания сверхтекучей части во второй сосуд удельная внутренняя энергия He II в нем уменьшается, а поэтому температура понижается.

6. Существует обратный эффект, называемый *термомеханическим*. Допустим опять, что два сосуда с He II сообщаются между собой узким капилляром. Пусть теперь в начальный момент температуры и уровни жидкости в обоих сосудах одинаковы. Нагреем один из сосудов. Тогда в нем содержание сверхтекучего компонента уменьшится, а нормального увеличится. Термодинамическое равновесие нарушится. Механическое равновесие будет быстро восстанавливаться путем перетекания сверхтекучего компонента из более холодного в более теплый сосуд. Такой процесс из-за механотермического эффекта будет только увеличивать разность температур в обоих сосудах. Нормальный компонент практически не участвует в перетекании. Выравнивание температур происходит несравненно более медленно, чем установление механического равновесия. В результате, пока температуры не выравняются, уровень гелия в менее нагретом сосуде окажется ниже, чем в более нагретом. Таким образом, при наличии в He II градиента температуры возникает течение сверхтекучей части в направлении против этого градиента. Это и есть термомеханический эффект.

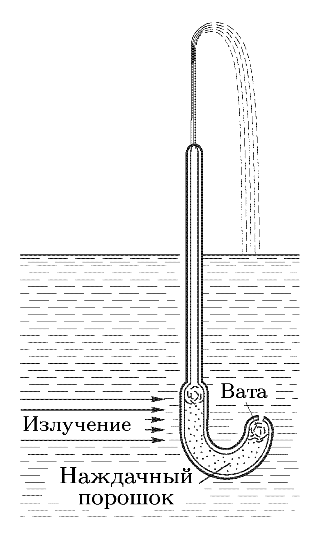


Рис. 113

Яркой демонстрацией термомеханического эффекта может служить так называемое *фонтанирование гелия*, впервые наблюдавшееся в 1938 г. Алленом (р. 1908) и Джонсом. Один конец широкой трубки (рис. 113), плотно заполненной наждачным порошком,

погружался в гелиевую ванну, а к другому был приделан вертикальный капилляр. При освещении наждачного порошка (достаточно было света от карманного фонарика) он нагревался, и сверхтекучий поток устремлялся из ванны в трубку с такой скоростью, что из капилляра била струя He II, достигавшая высоты 30–40 см.

7. На поверхности тел, погруженных в жидкий гелий, образуются тонкие пленки, толщина которых при давлении насыщенных паров составляет около 30 нм, или 100 атомных слоев. Образование аналогичных пленок происходит и в случае других жидкостей (например, керосина). Но из-за отсутствия вязкости He II его сверхтекучая часть течет внутри пленки, как по узкому каналу, — явление, наблюдавшееся Камерлинг-Оннесом еще в 1922 г. Благодаря этому пустая пробирка, опущенная в ванну с He II, начинает наполняться жидкостью, даже если ее верхний конец расположен выше уровня He II (рис. 114 *а*). Наполнение продолжается до тех пор, пока уровни жидкости в пробирке и в ванне не сравняются. Если после этого пробирку приподнять, то она опустошается (рис. 114 *б*). Опустошение продолжается и в том случае, когда пробирка приподнята над уровнем жидкости в ванне целиком. В последнем случае образуются капли, падающие в ванну с наружной

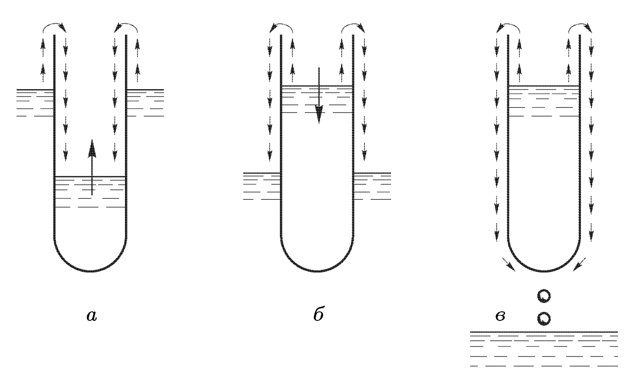


Рис. 114

поверхности дна пробирки (рис. 114 *в*). В этих опытах пленка He II работает как сифон, причем движущую силу для сверхтекучей части создает главным образом разность гравитационных потенциалов между концами пленки. Типичное значение для скорости сверхтекучей части He II составляет около 20 см/с. Нормальная часть жидкости, из-за своей вязкости, остается в пленке практически неподвижной.

8. Уже в ранних исследованиях (1935 г.) В. Кеезом и его дочь А. Кеезом обнаружили, что переход He I в He II сопровождается *резким возрастанием теплопроводности* (примерно в 10^6 раз). Теплопроводность He II в сотни раз больше, чем у лучших металлических проводников тепла. Кроме того, оказалось, что поток тепла в He II не пропорционален градиенту температуры, так что невозможно говорить о «коэффициенте теплопроводности» He II в обычном смысле слова.

Как доказал П. Л. Капица, аномалии в передаче тепла в He II являются следствием его сверхтекучести. Теплопередача в He II носит *конвективный* характер. Действительно, допустим, что He II как целое покоится и что между двумя точками его возникла разность температур. Тогда из-за термомеханического эффекта сверхтекучая часть He II начнет двигаться в сторону более высокой температуры. Возникнет и обратное движение нормальной части He II, так как полный импульс жидкости должен оставаться равным нулю. Сверхтекучая и нормальная части движутся «одна сквозь другую», не испытывая трения. Сверхтекучая часть не переносит тепла. Все тепло связано с движением нормальной части. Таким движением и объясняется аномально высокая теплопередача в He II.

Из-за аномально высокой теплопередачи фактически невозможно создать в толще He II температурный градиент. С этим связано *внезапное прекращение кипения* при охлаждении жидкого гелия. Выше температуры λ-точки He I при откачке ведет себя как всякая обыкновенная жидкость и бурно кипит. При переходе же через λ-точку кипение внезапно прекращается. В обыкновенной жидкости пузырьки, необходимые для парообразования внутри жидкости, образуются, когда локальная температура внутри жидкости существенно выше температуры свободной поверхности. Если бы в He II возникла подобная разность температур, то она исчезла бы столь быстро, что пузырьки не могли бы образоваться. Таким образом, в He II парообразование происходит только на *свободной поверхности*, а не внутри жидкости, с чем и связана невозможность кипения.

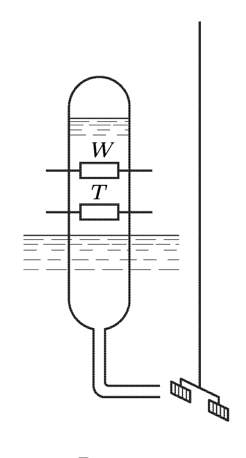


Рис. 115

9. Наличие сосуществующих сверхтекучего и нормального потоков в He II экспериментально наблюдал П. Л. Капица. В одном из его опытов (1941 г.), схематически показанном на рис. 115, небольшая стеклянная бульбочка (выполненная в виде миниатюрного сосуда Дьюара) оканчивалась в нижней части изогнутой стеклянной трубочкой (длиной 6 мм и внутренним диаметром 0,5 мм). Внутри бульбочки помещались константановый нагреватель W и бронзовый термометр T. Бульбочка погружалась в сосуд Дьюара с He II. Перед концом трубочки на коромысле, подвешенном на тонкой кварцевой нити, помещалось легкое крылышко, уравновешенное зеркальцем. Поворот коромысла можно было наблюдать по отклонению светового луча, отраженного от зеркальца. При включении нагревателя коромысло поворачивалось, а крылышко удалялось от конца трубочки. При этом, однако, уровень жидкости в бульбочке не изменялся. Явление объясняется тем, что при включении нагревателя сверхтекучая часть He II втекала внутрь трубочки, двигаясь в сторону повышения температуры. В противоположном направлении из трубочки устремлялся поток нормальной части жидкости. Происходило течение сверхтекучей и нормальной

частей друг через друга, так что жидкость в целом представлялась неподвижной. Нормальный поток, обладая вязкостью, оказывал давление на крылышко и вызывал его отклонение. Сверхтекучий же поток в силу парадокса Даламбера (см. т. I, § 100) на крылышко не действовал. Таким образом, наблюдалось своеобразное явление: на покоящееся тело, погруженное в He II, действовала сила, в то время как сам He II представлялся *неподвижным.*

10. Тисса на основе двухжидкостной модели предсказал существование в He II так называемого *второго звука.* Его теория была подробно разработана Ландау, а экспериментально явление впервые наблюдалось в 1946 г. В.П. Пешковым (1913–1980). В обычной жидкости звук представляет собой волны распространяющихся колебаний плотности. Такие волны могут распространяться и в He II. Они называются *первым звуком.* Скорость первого звука в He II при $T = 0$ составляет около 239 м/с, а с повышением температуры несколько уменьшается. В волне первого звука сверхтекучая и нормальная части в каждый момент времени смещаются в одну сторону, т. е. движутся в одинаковых фазах. Однако если в He II создать разность температур, то она начнет выравниваться не обычным механизмом теплопроводности, а быстрой конвекцией, при которой сверхтекучая и нормальная части движутся противоположно. Если в He II возбудить колебание температуры, то из-за движения сверхтекучей и нормальной частей в противоположных направлениях полная плотность He II останется неизменной, а полный поток импульса $\mathbf{j} = \rho_s\mathbf{v}_s + \rho_n\mathbf{v}_n$ будет равен нулю. Сверхтекучая и нормальная части колеблются *в противоположных фазах.* Однако нормальная часть несет тепло, а сверхтекучая не несет. Поэтому в рассматриваемом случае получается *температурная волна*, в которой меняется не плотность, а температура. Это и есть второй звук.

Скорость второго звука в He II сильно зависит от температуры. При $T = 0$ она составляет около 139 м/с, а при $T = T_\lambda$ обращается в нуль. По теории Ландау при $T = 0$ скорость второго звука, в согласии с опытом, в $\sqrt{3}$ раз меньше скорости первого звука.

ЗАДАЧА

Показать, что тепло, потребное для нагревания гелия от t до $t + dt$, стремится к нулю при $dt \to 0$ даже тогда, когда в рассматриваемом температурном интервале находится λ-точка, в которой теплоемкость гелия обращается в бесконечность.

§ 61. Понятие о теории сверхтекучести

1. Двухжидкостная модель He II, конечно, только *описывает*, но отнюдь *не объясняет* явление сверхтекучести. Природа этого явления в основном была понята, а двухжидкостная модель обоснована Л.Д. Ландау в 1941 г. Ниже дается качественное представление о теории Ландау. Прежде всего в этой теории принимается, что жидкий гелий-II при температуре абсолютного нуля находится *в основном*, т. е. наинизшем (невозбужденном), квантовом состоянии. При движении

тела в He II оно совсем не испытывает трения, если при этом жидкость остается в основном состоянии. Для возникновения трения необходимо, чтобы He II при движении тела переходил *в возбужденные* состояния. А так как между атомами жидкого гелия существует сильное взаимодействие, то возбужденные состояния должны быть *коллективными* (т. е. относиться ко всему гелию), а не возбуждениями изолированных атомов. Такие возбуждения носят квантовый характер. Кванты возбуждения в He II называются *элементарными возбуждениями* и характеризуются определенными значениями импульса и энергии, т. е. ведут себя как квазичастицы. Коллективный характер элементарных возмущений — существенный пункт в теории Ландау.

Теория прежде всего должна определить *закон дисперсии* или энергетический спектр элементарных возбуждений, т. е. зависимость энергии $\mathscr{E}$ от импульса $\mathbf{p}$ или, точнее, от модуля p импульса, поскольку жидкий гелий — изотропная среда. Эта часть задачи была решена Ландау *постулативно* с использованием эмпирических данных. Окончательная кривая $\mathscr{E} = \mathscr{E}(p)$, принятая Ландау (1947 г.), изображена на рис. 116. На начальном участке кривой $\mathscr{E}$ растет линейно с импульсом: $\mathscr{E} = c_{зв}p$, совершенно так же, как в случае возбуждения звуковых волн в кристаллической решетке. На этом участке в He II возбуждаются *фононы*, а постоянная $c_{зв}$ является фазовой скоростью звука в He II. Такой фононный спектр элементарных возбуждений предопределяет температурную зависимость теплоемкости He II вблизи абсолютного нуля: как и в случае твердых тел, теплоемкость пропорциональна кубу температуры T.

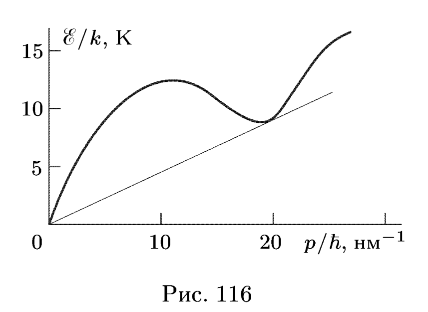


Рис. 116

При возрастании p кривая $\mathscr{E} = \mathscr{E}(p)$ загибается вниз, а в точке p_0 проходит через минимум. В окрестности самого минимума энергия может быть аппроксимирована формулой

$$\mathscr{E} = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2m^*}, \tag{61.1}$$

причем постоянная m^* играет роль *эффективной массы*. Элементарные возбуждения, соответствующие этой части кривой, были названы *ротонами*.

Следует подчеркнуть, что в законе дисперсии $\mathscr{E} = \mathscr{E}(p)$ всюду имеется в виду *истинный импульс*, а не квазиимпульс, как это было в случае кристаллической решетки. Причина этого в том, что жидкий гелий — *изотропная среда*, не обладающая кристаллической структурой.

Позднее кривая $\mathscr{E} = \mathscr{E}(p)$, постулированная Ландау, была подтверждена экспериментально. Исследовалось рассеяние пучка монохроматических нейтронов в He II. Этот процесс можно рассматривать

как столкновение нейтронов с квазичастицами в He II, при котором соблюдаются законы сохранения энергии и импульса. Зная начальную энергию и направление падающих нейтронов и измеряя энергию рассеянных нейтронов при различных углах рассеяния (относительно исходного направления нейтронов), можно было рассчитать энергию и импульс квазичастиц, т. е. определить весь энергетический спектр элементарных возбуждений. Экспериментальная кривая $\mathscr{E} = \mathscr{E}(p)$, полученная таким образом, воспроизведена на рис. 117. Числовые значения постоянных (экстраполированные к нулевому давлению при плотности $\rho = 0{,}145$ г/см^3), полученные таким путем, а также из термодинамических данных, оказались равными

$$\begin{aligned} c_{\text{зв}} &= 2{,}4 \cdot 10^4 \text{ см/с}, \quad \Delta/k = 8{,}7 \text{ K}, \\ p_0/\hbar &= 1{,}9 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}, \quad m^* = 0{,}16 m_{^4\text{He}}. \end{aligned} \tag{61.2}$$

2. Несмотря на экспериментальное подтверждение, постулативный характер энергетического спектра в теории Ландау оставляет чувство неудовлетворенности. Однако установление такого спектра расчетным

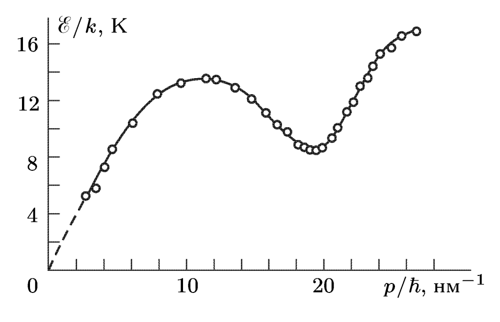


Рис. 117

путем совершенно безнадежно для жидкости с сильным взаимодействием между ее частицами, какой является He II. Позднее (1946 г.) Н. Н. Боголюбов (р. 1908) решил такую задачу для газа *слабо взаимодействующих* бозе-частиц (оказалось необходимым предположить, что силы отталкивания между такими частицами преобладают над силами притяжения). Спектр элементарных возбуждений при малых p оказался фононного типа, как и постулировал Ландау.

Нет никакой возможности излагать здесь теорию Боголюбова. Можно только отметить, что (как и во всех теориях сверхтекучести) необходимо принять, что газ состоит *из бозе-, а не из ферми-частиц*. В случае бозе-частиц имеет место конденсация Бозе–Эйнштейна (что в случае ферми-частиц невозможно из-за принципа Паули). Сущность этого явления (см. т. II, § 82) состоит в том, что, начиная с некоторой температуры T_0, называемой *температурой вырождения*, частицы бозе-газа начинают накапливаться на нижнем энергетическом уровне, а при температуре абсолютного нуля на этом уровне оказываются все частицы. Бозе-частицы, скопившиеся на нижнем энергетическом уровне,

образуют так называемый *конденсат.* Боголюбову удалось показать, что при определенных допущениях о силах взаимодействия между частицами образование конденсата в слабо неидеальном газе бозе-частиц можно рассматривать как фазовый переход второго рода, а движение конденсата обладает свойством сверхтекучести. Аналогия этого явления с наблюдаемой сверхтекучестью жидкого He II проявляется в том, что вычисленная температура вырождения бозе-газа оказалась равной $T_0 = 3{,}14$ К, что весьма близко к значению $T_\lambda = 2{,}17$ К — температуре фазового превращения He I в He II. Однако результаты Боголюбова относятся к *газу* со слабо взаимодействующими частицами, *а не к жидкому* He II, где взаимодействие велико. Заманчивой является перспектива построить на тех же основах теорию сверхтекучести и для жидкости, но до настоящего времени это сделать не удалось.

3. Покажем теперь, что при энергетическом спектре элементарных возбуждений, постулированном Ландау, жидкость должна обладать свойством сверхтекучести. Рассмотрим сначала He II при температуре абсолютного нуля, когда никаких возбуждений в нем нет. Пусть жидкость течет в капилляре с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Определим, при каких скоростях $\mathbf{v}$ не могут появляться элементарные возбуждения и, следовательно, гелий не будет испытывать трения, а при каких скоростях элементарные возбуждения появятся и возникнет трение жидкости о стенки капилляра. Для наших целей удобно перейти в систему отсчета, в которой жидкость покоится, а капилляр движется со скоростью $-\mathbf{v}$. Целесообразность этого обусловлена тем, что закон дисперсии (рис. 117) относится именно к системе отсчета, в которой *жидкость неподвижна.*

Допустим теперь, что в жидкости появилось элементарное возбуждение — квазичастица с энергией $\mathscr{E}$ и импульсом $\mathbf{p}$. Из-за отдачи скорость капилляра изменится и станет равной $-\mathbf{v}_1$. На основании закона сохранения энергии можно написать

$$\mathscr{E} + \frac{M}{2}\,\mathbf{v}_1^2 - \frac{M}{2}\,\mathbf{v}^2 = 0,$$

где M — масса капилляра. Так как она велика, то изменение скорости капилляра незначительно, в силу чего сумму $\mathbf{v} + \mathbf{v}_1$ можно заменить на $2\mathbf{v}$. Это дает

$$\mathscr{E} = \frac{M}{2}\,(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1)(\mathbf{v} + \mathbf{v}_1) = M\mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1).$$

В силу закона сохранения импульса

$$\mathbf{p} + M\mathbf{v}_1 = M\mathbf{v},$$

так что окончательно

$$\mathscr{E} = \mathbf{p}\mathbf{v}. \tag{61.3}$$

Отсюда во всяком случае следует, что $\mathscr{E} \leqslant pv$, т. е. $v \geqslant \mathscr{E}/p$. Таким образом, для появления элементарного возбуждения необходимо, чтобы

скорость жидкости v превышала минимальное значение $\mathscr{E}/p$:

$$v \geqslant \min \frac{\mathscr{E}}{p}. \tag{61.4}$$

Минимум $\mathscr{E}/p$ на кривой дисперсии получится в точке, где производная $\frac{d}{dp}\frac{\mathscr{E}}{p}$ обращается в нуль, т. е. в точке

$$\frac{d\mathscr{E}}{dp} = \frac{\mathscr{E}}{p}, \tag{61.5}$$

где прямая $\mathscr{E}/p = \text{const}$, проходящая через начало координат, касается дисперсионной кривой $\mathscr{E} = \mathscr{E}(p)$. На фононной ветви $\mathscr{E} = c_{\text{зв}}p$, так что для возбуждения фононов требуются скорости $v \geqslant c_{\text{зв}}$.

Этот результат не является неожиданным. При равномерном движении тела в жидкости, как известно, оно начинает генерировать *звуковые волны Маха* (1838–1916), когда скорость тела превышает фазовую скорость звука в жидкости. Аналогично ведет себя заряд, движущийся в среде со скоростью, превышающей фазовую скорость света в рассматриваемой фазе (*явление Вавилова–Черенкова*).Таким образом, скорость звука играет роль *критической скорости* $v_{\text{кр}}$, в том смысле, что генерация звука движущимся телом появляется, когда его скорость превышает критическую.

Критическая скорость для генерации ротонов в теории Ландау найдется, если из начала координат (рис. 116) провести касательную к ротонной части кривой $\mathscr{E} = \mathscr{E}(p)$. Она, очевидно, равна $v_{\text{кр}} = \mathscr{E}/p$, где $\mathscr{E}$ и p — энергия и импульс ротона в точке касания. Таким путем для ротонов получается $v_{\text{кр}} = 60$ м/с.

4. Допустим теперь, что температура жидкости, текущей через капилляр, отлична от абсолютного нуля, но близка к нему. Тогда даже в покоящейся жидкости появятся слабые возбуждения. Они ведут себя как *идеальный газ независимых квазичастиц*. Формула (61.4), полученная выше, остается в силе, поскольку она выражает условие рождения элементарных возбуждений из-за движения жидкости относительно стенок капилляра. При ее выводе предположение о равенстве абсолютному нулю температуры жидкости не использовалось.

В покоящейся жидкости квазичастицы, имеющиеся в ней при $T \neq 0$, движутся беспорядочно, так что в среднем газ квазичастиц не несет никакого импульса. Если же жидкость течет, то возникает преимущественное направление движения квазичастиц — в сторону течения жидкости. Средний импульс газа квазичастиц становится отличным от нуля и переносится в том же направлении. При столкновениях квазичастиц со стенками капилляра происходит передача этого импульса, по крайней мере частичная, из-за чего возникает трение. В результате часть жидкости, несущая газ элементарных возбуждений, течет через капилляр, как обычная нормальная жидкость, обладающая вязкостью. Остальная часть жидкости ведет себя как сверхтекучая, так как при скорости течения меньше критической рождения новых квазичастиц в результате движения жидкости относительно стенок капилляра не

происходит. Эта часть жидкости при течении не обменивается энергией и импульсом со стенками капилляра и с газом квазичастиц. Таким образом, в теории Ландау находят обоснование представления, введенные в двухжидкостной модели. Вместе с тем становится понятной невозможность реального отделения сверхтекучей части жидкости от нормальной. Причина этого в том, что элементарные возбуждения являются *коллективными*, а не возбуждениями индивидуальных частиц.

5. Критическая скорость течения ($v_{\text{кр}} \approx 60$ м/с), вычисленная в теории Ландау из кривой дисперсии, не согласуется с опытом. Опыт показывает, что критическая скорость сильно зависит от температуры и от радиуса капилляра или ширины щели, по которым течет He II. Она примерно на два-три порядка меньше того значения, которое дает теория Ландау. На этом основании следует заключить, что теория Ландау недостаточна. В ней не все принято во внимание. В действительности формула Ландау (61.4) определяет лишь *верхний предел* скорости течения, выше которого сверхтекучесть заведомо невозможна.

Прогресс в понимании указанного расхождения был достигнут при исследовании свойств вращающегося He II. Согласно двухжидкостной модели при вращении цилиндра с He II сверхтекучая часть жидкости не должна была бы вовлекаться во вращение. В действительности опыты показали, что при достаточно больших угловых скоростях цилиндра во вращении принимает участие не только нормальная, но и *сверхтекучая часть* жидкости. Тем не менее во вращающемся как целое He II наблюдаются такие специфические для сверхтекучести явления, как термомеханический эффект и распространение второго звука.

Онзагер (р. 1903) в 1949 г. для объяснения этого явления выдвинул гипотезу, позднее подтвержденную экспериментально, что ввиду *квантовой природы* сверхтекучего состояния He II вращения в ней должны возбуждаться, но они должны быть квантованы. Позднее (1955 г.) эта гипотеза была развита Фейнманом (р. 1918). Если атом гелия вращается вокруг оси цилиндра по окружности радиуса r, то его момент количества движения должен быть равен $n\hbar$, т. е.

$$m_{\text{He}} r v_s = n\hbar,$$

где v_s — скорость сверхтекучего движения, а n — целое число. Эта формула справедлива лишь для расстояний r, значительно превышающих среднее межатомное расстояние в ^{4}He, т. е. примерно $4 \cdot 10^{-8}$ см, так как только на таких расстояниях гелий можно рассматривать как сплошную жидкость. Радиус окружности r может принимать очень большие значения, вплоть до размеров цилиндра, так что речь идет о *квантовании макроскопических вращений.*

Линия, вокруг которой происходит вращение He II, называется *вихревой нитью.* При вращении вокруг оси цилиндра она, очевидно, совпадает с этой осью, заканчиваясь на дне цилиндра и на поверхности жидкости. Жидкость, вращающаяся вокруг вихревой нити, называется *квантовым вихрем.* Квантовый вихрь может появиться лишь при некоторой минимальной скорости вращения цилиндра $\Omega_{\text{кр}}$, так как для его образования требуется затрата энергии. При этом фактически

образуются только вихри с $n = 1$, так как кинетическая энергия пропорциональна $v_s^2 \sim n^2$, и поэтому энергетически более выгодно образование двух квантовых вихрей с $n = 1$, чем одного с $n = 2$. Таким образом, скорость движения сверхтекучей жидкости v_s при вращении вокруг вихревой нити определяется формулой

$$v_s = \frac{\hbar}{m_{\text{He}} r}. \tag{61.6}$$

Когда скорость вращения цилиндра достигает критического значения $\Omega_{\text{кр}}$, то образуется только один квантовый вихрь с вихревой нитью вдоль оси цилиндра. При увеличении Ω число квантовых вихрей растет, причем их вихревые нити параллельны оси цилиндра. При больших Ω вихревые нити практически равномерно пронизывают объем жидкости.

Элементарные возбуждения, соответствующие нормальной части He II, могут сталкиваться с квантовыми вихрями сверхтекучей части и обмениваться с ними энергией и импульсом. Это и вызывает возникновение вращения сверхтекучей части при вращении цилиндра.

6. При течении He II по капилляру с большими скоростями вихревые нити могут искривляться и даже замыкаться, образуя так называемые *вихревые кольца.* Последние обладают определенной энергией и импульсом и могут передвигаться по всему объему жидкого гелия. Можно сказать, что вихревые кольца представляют собой особого рода *элементарные возбуждения*, возникающие, когда скорость течения сверхтекучего гелия превосходит некоторое критическое значение $v_{\text{кр}}$. Критическая скорость $v_{\text{кр}}$ определяется энергией, необходимой для образования квантового вихревого кольца, и зависит от условий течения He II, в частности от радиуса капилляра, при увеличении которого критическая скорость быстро уменьшается. При радиусах капилляра порядка 10^{-5} см, когда и наблюдается сверхтекучесть, критическая скорость значительно меньше теоретического верхнего предела, даваемого формулой Ландау (61.4). Если скорость течения v меньше критической, то образование квантовых вихревых колец еще не происходит и наблюдается сверхтекучесть. Если же скорость течения превосходит критическую (хотя бы и остается меньше верхнего предела, даваемого теорией Ландау), то сверхтекучее течение He II становится неустойчивым к образованию квантовых вихревых колец. Квантовые вихревые кольца, возникающие в сверхтекучем компоненте He II, могут обмениваться энергией и импульсом с квазичастицами нормального компонента, что приводит к появлению трения между этими компонентами и к исчезновению сверхтекучести.

7. Рассмотрим коротко вопрос о сверхтекучести ${}_2^3$He. Атом ${}_2^3$He содержит нечетное число нуклонов (два протона и один нейтрон) и четное число (2) электронов. Каждая из этих частиц обладает спином 1/2. Поэтому спин атома ${}_2^3$He во всяком случае полуцелый, так что атомы ${}_2^3$He подчиняются статистике Ферми–Дирака. В этом отношении они отличаются от атомов ${}_2^{04}$He, для которых спин целый, а статистика Бозе–Эйнштейна. Образование конденсата и появление сверхтекучести

возможны только в системах частиц с бозе-эйнштейновской статистикой. Поэтому сначала казалось, что сверхтекучесть $^3_2$He невозможна. Это мнение изменилось в 1974 г. после создания теории сверхпроводимости (см. § 62). Дело в том, что между атомами $^3_2$He действуют силы притяжения Ван-дер-Ваальса, которые на больших расстояниях убывают обратно пропорционально седьмой степени расстояния. При наличии таких сил атомам $^3_2$He энергетически выгодно кооперироваться в пары, что и проявляется при достаточно низких температурах. Спин такой пары всегда целый. Поэтому пары подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна, и можно ожидать появления сверхтекучести у $^3_2$He. Действительно, сверхтекучесть $^3_2$He была открыта в 1974 г. Она обнаруживается при температуре ниже 0,00265 К (при давлении около 34 атм). При уменьшении давления до 21 атм температура перехода жидкого $^3_2$He в сверхтекучее состояние понижается до 0,0024 К.

8. В заключение остановимся на возможности макроскопических квантовых явлений у водорода, аналогичных сверхтекучести. Квантовое поведение гелия, в частности свойство оставаться жидким вблизи абсолютного нуля, существенно обусловлено *нулевыми колебаниями.* Массы атомов и молекул водорода еще меньше, чем масса атома гелия, а потому у водорода нулевые колебания еще сильнее. С другой стороны, атом водорода состоит из двух частиц (протона и электрона), спин каждой из которых равен 1/2, а потому он является *бозе-частицей.* Молекула водорода также *бозе-частица.* Казалось бы, что и водород вблизи абсолютного нуля температуры должен обладать сверхтекучестью. В действительности газ двухатомного водорода, хотя и обладает некоторыми квантовыми свойствами, но при охлаждении сжижается, а вблизи абсолютного нуля становится твердым.

Причина этого в том, что частицы водорода *взаимодействуют между собой.* В частности, гомеополярные химические силы, действующие между атомами, приводят к образованию связанного состояния — молекулы водорода H_2. А между молекулами водорода в свою очередь действуют силы, значительно превосходящие силы взаимодействия между симметричными инертными атомами гелия.

Однако следует принять во внимание, что силы взаимодействия нейтральных атомов водорода между собой на некотором расстоянии, превосходящем какое-то определенное значение, являются силами притяжения только в том случае, когда спины электронов атомов *антипараллельны* (синглетное состояние). Если же спины электронов атомов водорода *параллельны* (триплетное состояние), то силы взаимодействия всегда отталкивательные. В этом случае образование молекулы невозможно (см. § 50).

Однако можно получить атомарный водород, все атомы которого имеют параллельные спины. Тогда молекулы образовываться не будут. Для этого на диссоциированный водород надо воздействовать сильным ($\sim 10^5$ Гс) и резко неоднородным магнитным полем. Тогда произойдет пространственное разделение атомов с противоположно направленными спинами, подобно тому как это имеет место в классических опытах Штерна и Герлаха. При этом надо иметь в виду, что магнитный момент

ядра (протона) примерно в тысячу раз меньше магнитного момента электрона. Поэтому силой, действующей со стороны магнитного поля на ядро, можно полностью пренебречь по сравнению с силой, действующей на электрон.

Такой метод получения атомарного водорода с одинаково ориентированными спинами электронов был применен голландскими физиками Сильвера и Валравеном в Амстердаме (1980 г.). Экспериментальные трудности, которые удалось им преодолеть, очень значительны, но о них мы говорить не будем. Теоретически можно ожидать, что такой атомарный водород будет оставаться газообразным вблизи абсолютного нуля, не переходя даже в жидкое состояние. Указанным физикам удалось сохранить газ в атомарном состоянии в течение нескольких часов при предельно низкой температуре в сильном магнитном поле. Атомарный водород оставался газообразным вплоть до 0,08 К — низшей температуры, при которой производились исследования.

§ 62. Понятие о теории сверхпроводимости

1. Прежде чем читать настоящий параграф, необходимо обратиться к § 80 т. III, где были приведены основные опытные факты о сверхпроводимости и истории открытия этого явления. Здесь будет дано краткое представление о теории сверхпроводимости, в той мере, как это возможно сделать в рамках общего курса физики.

После создания теории сверхтекучести естественно было думать, что сверхпроводимость является сверхтекучестью «электронной жидкости», образованной валентными электронами в металле. Эта правильная мысль встретила, однако, серьезное затруднение. Электроны имеют спин 1/2. На их состояния наложен запрет Паули, а потому они подчиняются статистике Ферми–Дирака, т. е. являются фермионами. Напротив, на атомы ${}^4_2$He, с которыми имеет дело теория сверхтекучести, запрет Паули не распространяется, поскольку спин этих атомов целочисленный. В отличие от электронов, атомы ${}^4_2$He подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна, т. е. являются бозонами. С этим связано глубокое различие между основными состояниями атомов ${}^4_2$He и электронов. В частности, для атомов ${}^4_2$He имеет место бозе-эйнштейновская конденсация, а для электронов, казалось бы, это явление невозможно.

2. Важным моментом на пути преодоления указанной трудности оказалось открытие *изотопического эффекта*, экспериментально обнаруженного в 1950 г. на изотопах ртути и олова. Этот эффект наблюдается у чистых сверхпроводников, имеющих несколько изотопов. Оказалось, что для кристаллических решеток, построенных из различных изотопов одного и того же элемента, выполняется соотношение $T_к\sqrt{M} = C = \text{const}$. Здесь $T_к$ — критическая температура перехода в сверхпроводящее состояние, а M — массовое число атомов, из которых построена кристаллическая решетка. Постоянная C одинакова для всех изотопов элемента, меняясь при переходе от одного элемента к другому. Но масса M определяет частоту колебаний решетки,

$\omega \sim \sqrt{1/M}$. Поэтому изотопический эффект заставляет ожидать, что сверхпроводимость обусловлена взаимодействием электронов с колебаниями кристаллической решетки.

На это указывает также то обстоятельство, что сверхпроводимость не обнаружена у чистых металлов с хорошей проводимостью (сюда относятся, например, элементы первой группы периодической системы Li, Na, K, Cu, Ag, Au). Дело в том, что у хороших проводников велика длина свободного пробега электронов, обусловленная их взаимодействием с кристаллической решеткой. Это значит, что взаимодействие электронов с колебаниями решетки слабое. У плохих проводников, наоборот, длина свободного пробега электронов мала, т. е. взаимодействие электронов с колебаниями решетки сильное, а это, согласно ожиданию, как раз и требуется для возникновения сверхпроводимости.

Открытие изотопического эффекта позволило выбрать правильное направление в построении микроскопической теории сверхпроводимости. Начало было положено в 1950 г. Фрёлихом (р. 1905), теоретически предсказавшим изотопический эффект практически одновременно с его экспериментальным обнаружением. После основополагающей работы Купера (р. 1930) последовательная микроскопическая теория сверхпроводимости была создана в 1957 г. Бардином (р. 1908), Купером и Шриффером (р. 1931). По имени авторов она сокращенно называется теорией БКШ. Более совершенный метод в теории сверхпроводимости был разработан Н.Н. Боголюбовым примерно в то же время. Предсказание Купера о спаривании электронов (см. ниже п. 4) позволило Боголюбову распространить и развить метод, предложенный им ранее в теории сверхтекучести. Другой метод в теории сверхпроводимости был разработан Л.П. Горьковым (р. 1929) и Намбу (р. 1921).

3. Колебания кристаллической решетки, как известно, квантованы и могут рассматриваться как квазичастицы — фононы. Электроны проводимости в металле могут непрерывно обмениваться фононами. Один электрон излучает, а другой поглощает фонон. Эти фононы называются *виртуальными*, так как они существуют в течение короткого времени жизни, а поэтому их энергия не фиксирована, а удовлетворяет принципу неопределенности время — энергия. Это позволяет не принимать во внимание закон сохранения энергии во время процесса взаимодействия виртуального фонона с электроном. Электрон, излучивший виртуальный фонон, испытывает отдачу, т. е. меняет свой импульс. Импульс другого электрона, поглотившего тот же фонон, также изменяется. Явление происходит так, как если бы между электронами, помимо кулоновского отталкивания, существовало дополнительное взаимодействие. Это дополнительное взаимодействие может проявиться в притяжении или отталкивании электронов.

Следующая классическая аналогия может служить иллюстрацией этого эффекта. Два конькобежца на льду непрерывно перекидывают друг другу мяч. Из-за отдачи между ними возникает отталкивание. Но оно может перейти в притяжение, если мяч заменить бумерангом. Для этого конькобежцы должны встать спиной друг к другу и каждый

из них должен бросать бумеранг в сторону, противоположную своему партнеру. Поведение бумеранга, конечно, определяется воздушной средой, в которой он летит. В случае фонона роль такой среды играет кристаллическая решетка.

4. В теории металлов, развитой Блохом (см. § 59), состояние электронов характеризуется *одночастичными* волновыми функциями. Это означает, что электроны рассматриваются независимыми. Явление сверхпроводимости не укладывается в эту схему. Благодаря электрон-фононному взаимодействию между электронами существуют корреляции, которые должны быть учтены. В теории БКШ учитываются только *парные корреляции*, что оказалось достаточным по крайней мере для качественного понимания основных свойств сверхпроводников. Силы электрон-фононного притяжения между парой скоррелированных электронов должны превышать силы кулоновского отталкивания, чтобы в целом между электронами действовало притяжение. Принято говорить, что такие спаренные электроны образуют *куперовскую пару* (в честь Купера, предсказавшего явление спаривания в 1956 г.). Куперовские пары являются бозонами — на них запрет Паули не распространяется. Поэтому-то они и могут совершать сверхтекучее движение.

Для выяснения свойств куперовских пар допустим сначала, что металл находится при температуре абсолютного нуля. Кроме того, допустим, что через металл не течет электрический ток. Так как электроны подчиняются принципу Паули, то в каждом квантовом состоянии может находиться не более одного электрона. Поэтому будут заполнены все состояния ниже некоторой определенной энергии $\mathscr{E}_F$, называемой *энергией Ферми*, а все состояния с большей энергией будут полностью свободны. Энергия $\mathscr{E}$ есть функция импульса: $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{p})$. В частности, уравнение $\mathscr{E}_F = \mathscr{E}(\mathbf{p})$ определяет в пространстве импульсов некоторую поверхность, называемую *поверхностью Ферми*. Для простоты будем считать металл изотропным. Тогда поверхность Ферми вырождается в сферу $\mathscr{E}_F = p^2/2m$, радиус которой мы обозначим через p_F. Когда температура металла повышается, но остается ниже $T_к$, электроны начинают выходить за пределы сферы Ферми, заполняя частично энергетически более высокие квантовые состояния. В результате по обе стороны сферы Ферми образуется тонкий слой, ограниченный сферами с радиусами $p_F - \Delta p/2$ и $p_F + \Delta p/2$, заполненный электронами не полностью, а только частично. Энергии электронов на границах этого слоя вблизи критической температуры $T_к$ отличаются друг от друга на величину порядка $kT_к$. Легко вычислить, что эта величина примерно в 10^4–10^5 раз меньше средней кинетической энергии, приходящейся на один валентный электрон в металле при фермиевском распределении (см. т. III, § 99).

Допустим теперь, что два электрона, образующие куперовскую пару, с импульсами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ сталкиваются между собой и переходят в состояние с импульсами $\mathbf{p}_1'$ и $\mathbf{p}_2'$. Ясно, что перед столкновением состояния с импульсами $\mathbf{p}_1'$ и $\mathbf{p}_2'$ должны быть вакантными, т. е. находиться в пределах указанного выше тонкого сферического слоя. То

же самое относится к исходным векторам $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$. В противном случае после столкновения состояние с импульсами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ оказалось бы незаполненным, а это было бы невозможно, если бы это состояние лежало в импульсном пространстве, ограниченном внутренней сферой слоя. В силу закона сохранения импульса $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathscr{P} = \text{const}$, где $\mathscr{P}$ — результирующий импульс обоих электронов, не меняющийся при столкновении. Процесс столкновения изображен на рис. 118. Конец вектора $\mathbf{p}_1$ и начало вектора $\mathbf{p}_2$ должны лежать в верхнем заштрихованном четырехугольнике, получающемся в результате пересечения двух сферических слоев со средними радиусами p_1 и p_2. Аналогично, в нижнем заштрихованном четырехугольнике должны лежать конец вектора $\mathbf{p}'_1$ и начало вектора $\mathbf{p}'_2$. Ясно, что столкновения будут происходить тем чаще, чем короче вектор $\mathscr{P}$. Практически будут происходить только такие столкновения, когда оба сферических слоя совпадают, т. е. когда $\mathscr{P} = 0$. Это значит, что должно быть $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2$. Таким образом, в отсутствие тока импульсы электронов, образующих куперовскую пару, равны по величине и противоположны по направлению.

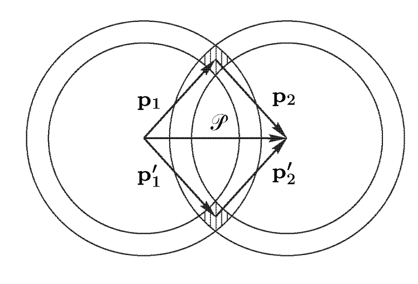


Рис. 118

Как уже было сказано выше, при температурах порядка $T_к$ энергия электронов в сферическом слое отличается от энергии Ферми на величину порядка $kT_к$ так что

$$kT_к \approx \frac{p^2}{2m} - \frac{p_F^2}{2m} \approx \frac{p + p_F}{2m}\,\Delta p,$$

где $\Delta p = p - p_F$. Таким образом, неопределенность в положении электронов $\Delta x \approx \hbar/\Delta p \approx \hbar p_F/(mkT_к)$. По порядку величины (при $T \sim 10$ K) неопределенность Δx обычно составляет 10^{-4} см. Величина Δx характеризует размеры области, в которой локализованы электроны, образующие куперовскую пару, т. е. «пространственные размеры» этой пары. Они, как видим, примерно в 10 000 раз превосходят среднее расстояние между электронами проводимости в металле (порядка 10^{-8} см). Значит, между электронами, связанными в пару, находится очень много других электронов. На этом основании говорят, что состояния электронов в куперовской паре *слабо коррелированы по координатам* обычного пространства. Сама эта корреляция на расстояниях такого порядка не может быть понята с классической точки зрения и является сугубо квантовым свойством. Напротив, *по импульсам корреляция сильная*, поскольку $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$.

5. Существование спаривания электронов в сверхпроводнике (при $T < T_к$) было доказано прямыми опытами по *квантованию магнитного потока*. Рассмотрим сверхпроводящее кольцо, по которому циркулирует сверхпроводящий ток. Пусть электроны движутся по окружности

радиуса r со скоростью v. Энергия тока представляется выражением $\mathscr{E} = (1/2c)I\Phi$, где I — сила тока, а Φ — магнитный поток через рассматриваемую окружность, создаваемый этим током. Если N — полное число электронов в кольце, а T — период обращения, то $I = Ne/T = Nev/(2\pi r)$. Таким образом, $\mathscr{E} = Nev\Phi/(4\pi rc)$. С другой стороны, та же энергия равна $\mathscr{E} = Nmv^2/2$. Приравнивая оба выражения, получим $\Phi = 2\pi rcmv/e$. Если электроны движутся куперовскими парами, то импульс каждой такой пары равен $p = 2mv$, так что $\Phi = \pi rcp/e$. Но импульс куперовской пары может принимать только квантованные значения согласно соотношению $pr = n\hbar = nh/2\pi$, где n — целое число. Следовательно,

$$\Phi = \frac{hc}{2e}\,n. \tag{62.1}$$

Эта формула выражает *квантование магнитного потока* в сверхпроводниках, причем *квант магнитного потока* определяется выражением

$$\Phi_0 = \frac{hc}{2e} = 2{,}07\cdot 10^{-7}\ \text{Гс}\cdot\text{см}^2. \tag{62.2}$$

Формула такого вида была получена в 1950 г. Ф. Лондоном (1900–1954) еще до создания теории сверхпроводимости. Однако Лондон получил для Φ_0 вдвое большее значение по сравнению с тем, что дает формула (62.2). Это объясняется тем, что в 1950 г. явление спаривания электронов еще не было известно. Поэтому для импульса Лондон пользовался выражением $p = mv$, а не выражением $p = 2mv$, как делали мы. Опыт показал правильность формул (62.1) и (62.2) и тем самым подтвердил существование явления спаривания электронов. В одном из таких опытов сверхпроводящий ток возбуждался в оловянной трубочке с длиной 1 см и внутренним диаметром $2R = 1{,}5\cdot 10^{-3}$ см. Благодаря малости диаметра при возбуждении всего одного кванта магнитного потока $\Phi_0 = \pi R^2 H$ получается уже макроскопически измеримое магнитное поле $H = 0{,}117$ Гс, которое слабее магнитного поля Земли примерно всего в 5 раз. Таким образом, квантование магнитного потока в подобных опытах проявляется уже *в макроскопических масштабах.*

В связи с изложенным отметим следующее обстоятельство. Известно, что в сверхпроводящем кольце можно возбудить незатухающий электрический ток. Например, один из опытов такого рода длился 2,5 года, и все же никакого затухания тока обнаружено не было. На первый взгляд в этом нет ничего удивительного, поскольку в сверхпроводнике не выделяется джоулево тепло, а потому и нет затухания. На самом деле вопрос сложнее. Электроны в сверхпроводящем кольце движутся ускоренно и *должны излучать*, а это должно привести к затуханию тока. Опыт же показывает, что затухания нет. Противоречие устраняется совершенно так же, как и соответствующее противоречие с излучением в классической теории атома. Чтобы не было излучения, Бор ввел *квантовый постулат* о стационарных состояниях атома. Так, и в сверхпроводящем кольце с током излучение не появляется из-за

квантования электрического тока. Но это квантование наблюдается уже в макроскопическом масштабе.

6. Электроны в куперовской паре обладают одинаковыми по величине, но противоположными по направлению импульсами. Их спины в принципе могут быть параллельны или антипараллельны. В обоих случаях полный спин куперовской пары получается целым, так что куперовская пара будет бозоном, а не фермионом. Более того, спин куперовской пары будет равен нулю, так как состояние с параллельными спинами электронов неустойчиво. Устойчивым является состояние с антипараллельными спинами электронов, которое и реализуется в действительности. Таким образом, *куперовские пары являются бозонами, а не фермионами.* На них запрет Паули не распространяется. Этим устраняется трудность, о которой говорилось в самом начале этого параграфа. Куперовские пары образуют «жидкость», которая может совершать сверхтекучее движение между ионами кристаллической решетки. Это и есть сверхпроводимость. Остановимся на этом вопросе несколько подробнее.

При $T = 0$ все куперовские пары находятся в основном состоянии с нулевыми импульсами. При $T < T_к$ в основном состоянии будет находиться большинство куперовских пар. Они образуют *связанный коллектив* и, как бозе-частицы, все находятся в *одном и том же квантовом состоянии.* Если разорвать куперовскую пару и удалить из этого коллектива образовавшийся электрон, то возникнет возбужденное состояние, энергия которого выше энергии исходного состояния коллектива. Существенно, что эти два состояния отделены одно от другого *энергетической щелью* конечной ширины, в которой нет квантовых состояний системы. Хотя ширина щели и очень мала (при $T = 0$ всего порядка 10^{-3}–10^{-4} эВ), она приводит к качественному изменению поведения всей системы электронов. В самом деле, из-за взаимодействия куперовских пар с колебаниями решетки хотя и происходят разрывы этих пар, но при $T < T_к$ образовавшиеся электроны не могут преодолеть энергетическую щель, так как их энергии недостаточно для этого. Освободившийся электрон «ищет» себе партнера среди других освободившихся электронов, чтобы образовать с ним новую куперовскую пару с нулевыми импульсом и спином. Но такой процесс смены партнеров» ввиду тождественности электронов не приводит к новому состоянию, т. е. к разрушению коллектива. При $T < T_к$ коллектив ведет себя и движется как целое. Если же $T > T_к$, то электроны, образующиеся при разрыве куперовских пар, преодолевают энергетическую щель и выбывают из коллектива, что приводит к разрушению последнего.

Наличие в энергетическом спектре сверхпроводящего состояния щели конечной ширины и объясняет исчезновение сопротивления электрическому току. В отсутствие электрического тока импульсы всех куперовских пар равны нулю: импульс одного электрона равен $+\mathbf{p}$, а другого $-\mathbf{p}$. При наложении электрического поля $\mathbf{E}$ оба электрона пары получают один и тот же дополнительный импульс $\mathbf{p}'$. Их полные импульсы становятся равными соответственно $\mathbf{p} + \mathbf{p}'$ и $-\mathbf{p} + \mathbf{p}'$, а импульс всей пары $2\mathbf{p}'$. Связанный коллектив куперовских пар начинает

двигаться как целое с определенной скоростью, соответствующей этому значению импульса, в результате чего возникает электрический ток. Пока последний недостаточно силен, связанный коллектив куперовских пар не разрушается из-за наличия энергетической щели, а потому ток не встречает сопротивления. Возникает *токовое состояние* коллектива куперовских пар, причем к моменту установления постоянного тока поле E в сверхпроводнике обращается в нуль. В движущемся коллективе куперовских пар, понятно, продолжают происходить процессы электрон-фононного взаимодействия, обеспечивающие устойчивость токового состояния коллектива куперовских пар. При токах достаточно большой силы коллектив распадается и сверхпроводимость исчезает.

При температуре абсолютного нуля все электроны сверхпроводника связаны в куперовские пары. При повышении температуры число куперовских пар уменьшается. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, с повышением температуры увеличивается вероятность отрыва электрона от куперовской пары и перескока его через щель. Во-вторых, уменьшается число процессов образования пар из-за уменьшения актов обмена фононами между электронами, приводящими к притяжению между ними. В результате энергетическая щель становится у́же, что еще более ускоряет процесс уменьшения числа куперовских пар. При $T = T_к$ ширина щели, а с ней и число куперовских пар сокращаются до нуля. Связанный коллектив таких пар распадается. Вместе с ним исчезает и сверхпроводимость — при $T > T_к$ металл становится нормальным проводником.

7. Родственность явлений сверхпроводимости и сверхтекучести проявляется и в предсказании сверхтекучести $^3_2$He. Поскольку атомы этого изотопа имеют полуцелый спин, сначала предполагали, что $^3_2$He не обладает сверхтекучестью. Лишь после создания теории сверхпроводимости обратили внимание на возможность объединения атомов $^3_2$He в пары, аналогичные куперовским. Такие пары, обладая целым спином, являются бозонами, на основании чего была предсказана сверхтекучесть жидкого $^3_2$He, которая и была обнаружена экспериментально (см. § 61).

8. Теория объясняет и эффект Мейсснера–Оксенфельда (см. т. III, § 80). Как известно, этот эффект состоит в том, что магнитное поле не проникает внутрь массивного сверхпроводника или вытесняется из последнего. Наиболее просто дать объяснение для сверхпроводника цилиндрической формы, предполагая его достаточно длинным, чтобы исключить влияние краевых эффектов. Если магнитное поле параллельно оси цилиндра, то достаточно принять во внимание, что сверхпроводящий ток не встречает сопротивления, даже если он течет по поверхности тела (точнее, вдоль тонкого поверхностного слоя его). Кроме того, надо учесть, что из всех мыслимых состояний сверхпроводника в действительности реализуется состояние наименьшей энергии.

Предположим, что $T < T_к$. Пусть сверхпроводник помещен в постоянное однородное магнитное поле $\mathbf{H}$. Логически допустимо, что это поле проникнет в сверхпроводник, заполняя весь объем его и оставаясь однородным. В силу граничных условий напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ внутри и вне цилиндра должны быть одинаковыми. Магнитная

энергия системы будет равна

$$\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_e + \mathscr{E}_i,$$

где $\mathscr{E}_e$ — магнитная энергия, локализованная вне, а $\mathscr{E}_i = (1/8\pi)\mu V\mathbf{H}^2$ — внутри цилиндра (V — объем цилиндра, μ — магнитная проницаемость сверхпроводника). Допустим теперь, что по поверхности цилиндра циркулируют круговые токи, создающие внутри цилиндра однородное поле $\mathbf{H}_i$. Поле, создаваемое ими вне цилиндра, как известно, равно нулю. Поэтому для магнитной энергии можно написать:

$$\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_e + \frac{\mu}{8\pi} V(\mathbf{H} + \mathbf{H}_i)^2,$$

причем энергия $\mathscr{E}_e$, локализованная во внешнем пространстве, будет такой же, что и в предыдущем случае. Энергия $\mathscr{E}_2$ обращается в минимум $\mathscr{E}_{2\text{ мин}} = \mathscr{E}_e$, когда $\mathbf{H} + \mathbf{H}_i = 0$. Состояние с такой минимальной энергией и должно реализоваться в действительности, а не состояние с энергией $\mathscr{E}_1$, так как нет никаких препятствий для тока перераспределяться по объему сверхпроводника. Таким образом, при внесении цилиндра в однородное магнитное поле появляются сверхпроводящие круговые поверхностные токи, уничтожающие магнитное поле в объеме цилиндра. Это и есть эффект Мейсснера–Оксенфельда. Очевидно, он имеет место только при $T < T_\text{к}$, так как в противном случае сверхпроводящий поверхностный ток невозможен.

9. В приведенном доказательстве не учтена *поверхностная энергия*, существующая на границе раздела сверхпроводящей фазы с нормальной. Она определяется конечной глубиной проникновения магнитного поля из нормальной в сверхпроводящую фазу, притяжением между электронами куперовских пар, наличием энергетической щели между сверхпроводящей и нормальной фазами и пр. Эта энергия может быть как положительной, так и отрицательной. На это обстоятельство в 1957 г. обратил внимание А.А. Абрикосов (р. 1928), который ввел деление сверхпроводников на *сверхпроводники первого* и *второго рода.* Для первых поверхностная энергия положительна, для вторые отрицательна. К сверхпроводникам первого рода относится большинство чистых металлов, а второго рода — подавляющее число сплавов, а также многие чистые металлы с примесями. В сверхпроводниках первого рода наблюдается эффект Мейсснера–Оксенфельда, в сверхпроводниках второго рода — не всегда. Сверхпроводник второго рода может находиться в *сверхпроводящем* и *смешанном состояниях.* В сверхпроводящем состоянии имеет место эффект Мейсснера–Оксенфельда, в смешанном — нет.

На рис. 119 кривая $H = H_{\text{к}1}(T)$ определяет напряженность критического поля, при которой находятся в равновесии сверхпроводящая и смешанная фазы. Аналогично, кривая $H = H_{\text{к}2}(T)$ соответствует равновесию между сверхпроводящей и нормальной фазами. Область температур и магнитных полей, при которых металл находится в сверхпроводящем состоянии, обозначена двойной штриховкой, область смешанного состояния — простой штриховкой, а область нормального

состояния не заштрихована. Для сверхпроводников первого рода смешанного состояния не существует.

Понятно, что в сверхпроводнике должно реализоваться состояние *минимума* полной энергии, включающей поверхностную. По этой причине и возникает смешанное состояние. В сверхпроводник в смешанном состоянии внешнее магнитное поле проникает через *нити конечного поперечного сечения*. Конечное сечение получается потому, что из области, занятой магнитным полем, происходит его проникновение в окружающее пространство, находящееся в сверхпроводящем состоянии, причем этот процесс характеризуется конечной глубиной проникновения. Тело пронизано нитями, через которые проходят магнитные потоки, а сами нити отделены, одна от другой промежутками, сохраняющими сверхпроводимость, если только расстояние между соседними нитями превышает примерно удвоенную глубину проникновения магнитного поля в сверхпроводник.

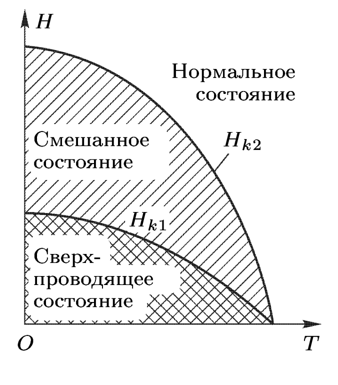


Рис. 119

Существенно, что магнитный поток через поперечное сечение нити *квантуется*. Энергетически выгодно, чтобы через каждую нить проходил *один квант* магнитного потока. Действительно, рассмотрим две нити радиуса r, через каждую из которых проходит один квант магнитного потока. Суммарный магнитный поток через обе нити равен $2\pi r^2 H$. Пусть обе нити сливаются в одну радиуса R. Тогда тот же магнитный поток будет $\pi R^2 H$. Сравнивая оба выражения, находим $R = r\sqrt{2}$. Поэтому длина окружности поперечного сечения нити, образовавшейся в результате слияния, будет $2\pi R = 2\pi r\sqrt{2}$, тогда как сумма длин окружностей поперечных сечений первоначальных двух нитей больше, так как она равна $2\pi r \cdot 2$. Таким образом, слияние двух нитей *уменьшает боковую поверхность*, по которой нити граничат с окружающим пространством. Это ведет к энергетически невыгодному увеличению поверхностной энергии, поскольку она отрицательна. Итак, через тело проходит магнитное поле, но оно сохраняет сверхпроводимость благодаря наличию сверхпроводящих промежутков между нитями. При усилении магнитного поля число нитей в теле увеличивается, а сверхпроводящие промежутки между ними сокращаются. В конце концов магнитное поле начинает пронизывать все тело, и сверхпроводимость исчезает.

Сверхпроводящие сплавы благодаря высоким значениям критических магнитных полей $H_{к2}$ нашли широкое применение при изготовлении обмоток соленоидов, предназначенных для получения сверхсильных магнитных полей (100 000 Гс и больше).

Глава VIII
СТАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АТОМНОГО ЯДРА

§ 63. Введение

1. Первое явление из области ядерной физики было открыто в 1896 г. Анри Беккерелем (1852–1908). Это — *естественная радиоактивность* солей урана, проявляющаяся в самопроизвольном испускании невидимых лучей, способных вызывать ионизацию воздуха и почернение фотоэмульсий. Через два года Пьер Кюри (1859–1906) и Мария Склодовская-Кюри (1867–1934) открыли радиоактивность тория и выделили из солей урана полоний и радий, радиоактивность которых оказалась в миллионы раз сильнее радиоактивности урана и тория.

Детальное экспериментальное изучение радиоактивных излучений было произведено Резерфордом. Он показал, что радиоактивные излучения состоят из трех типов лучей, названных соответственно α-, β- и γ-лучами. Бета-лучи состоят из отрицательных электронов, движущихся значительно быстрее, чем электроны в катодных лучах, α-лучи — из положительно заряженных частиц (α-частиц, масса которых равна массе ядра гелия), γ-лучи аналогичны лучам Рентгена, только значительно более жесткие. В соответствии с этим α- и β-лучи отклоняются магнитным полем, и притом в противоположные стороны, а на γ-лучи магнитное поле не действует.

Наименьшей проникающей способностью и наибольшим ионизующим действием обладают α-лучи. Они поглощаются слоем алюминия толщиной всего в несколько микрометров. Для поглощения β-лучей требуется слой алюминия в среднем толщиной 1 мм. Ионизующая способность β-лучей много меньше, чем α-лучей. Наибольшей проникающей способностью и наименьшим ионизующим действием обладают γ-лучи. Для защиты от них применяются свинцовые листы толщиной, зависящей от интенсивности излучения.

Ядерная природа радиоактивности была понята Резерфордом после того, как в 1911 г. он предложил ядерную модель атома (см. § 9) и установил, что радиоактивные излучения возникают в результате процессов, происходящих внутри атомного ядра. С этого момента и ведет свое начало ядерная физика.

2. Долгое время предполагалось, что само атомное ядро состоит из протонов и электронов. Однако такая гипотеза находилась в противоречии с экспериментальными фактами, относящимися к спинам и магнитным моментам ядер (см. § 68). Кроме того, присутствие электронов внутри ядра оказалось невозможным совместить с принципом неопределенности Гейзенберга (см. § 65, п. 10). В 1932 г. после открытия Чедвиком (1891–1974) нейтрона было установлено, что *ядро состоит*

из протонов и нейтронов (эти частицы получили общее наименование *нуклонов*). Такая модель ядра была предложена в том же году независимо друг от друга Д. Д. Иваненко (р. 1904) и Гейзенбергом. Свободный протон — стабильная частица. Масса нейтрона больше массы протона на 0,14 % или 2,5 электронных масс. В соответствии с этим в свободном состоянии нейтрон распадается на протон, электрон и электронное антинейтрино:

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}. \tag{63.1}$$

Среднее время жизни нейтрона близко к 15,3 мин. Казалось бы, нет смысла говорить о нейтроне как об «элементарной» частице, а следует рассматривать его как «составную» частицу. Однако внутри ядра протон не свободен и ведет себя так же, как составная частица, распадающаяся на нейтрон, позитрон и электронное нейтрино:

$$\mathrm{p} \to \mathrm{n} + \mathrm{e}^+ + \overline{\nu}_\mathrm{e}. \tag{63.2}$$

Поэтому с тем же основанием протон можно считать «сложной» частицей, превращающейся в более «простую» — нейтрон. Это означает, что вопрос о том, какая частица — протон или нейтрон — более элементарна, лишен физического смысла. В этом отношении обе частицы равноправны. Какая из них распадается, зависит от энергетических соотношений. В свободном состоянии нейтрон радиоактивен, а протон стабилен, т. е. идет процесс (63.1). Внутри же ядра возможны оба процесса (63.1) и (63.2). Тип распада определяется массами рассматриваемого ядра и возможных продуктов распада. Это обстоятельство и дает возможность рассматривать обе частицы — протон и нейтрон — как *элементарные*, взаимно превращающиеся друг в друга.

Число протонов в ядре (*зарядовое число*) принято обозначать через Z, число нейтронов — через N. Их сумма $A = Z + N$ называется *массовым числом ядра*; число Z называют также *порядковым номером элемента.* Атомы с одинаковыми Z (т. е. атомы одного и того же элемента), но различными N называются *изотопами*, с одинаковыми A, но различными Z — *изобарами*, с одинаковыми N, но различными Z — *изотонами.* Наряду с термином *ядро атома* используется также термин *нуклид.*

3. Основное различие между протоном и нейтроном состоит в том, что протон — *заряженная* частица, заряд которой $e = 4{,}803$ СГСЭ $= 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл. Это *элементарный заряд*, численно равный заряду электрона. Нейтрон же, как показывает уже его название, *электрически нейтрален.* Спины протона и нейтрона одинаковы и равны спину электрона, т. е. 1/2 (в единицах $\hbar$), — обе частицы являются *фермионами* и подчиняются статистике Ферми–Дирака. Массы протона и нейтрона почти равны: масса протона $m_\mathrm{p} = 1836{,}15 m_\mathrm{e}$, масса нейтрона $m_\mathrm{n} = 1838{,}68 m_\mathrm{e}$, где m_e — масса электрона; $m_\mathrm{e} = 9{,}1095 \cdot 10^{-28}$ г.

Масса частицы связана с ее полной энергией соотношением Эйнштейна $\mathscr{E}_{\text{пол}} = mc^2$. Поэтому в ядерной физике и физике элементарных частиц массу принято измерять в единицах энергии, причем за единицу энергии принимается *мегаэлектронвольт* (МэВ). В этих

единицах $m_e = 0{,}511$ МэВ, $m_p = 938{,}3$ МэВ, $m_n = 939{,}6$ МэВ. При этом в указанных разделах физики под m понимается всегда *масса покоя* частицы (обозначение m_0 не применяется). Принято также массу частицы измерять в так называемых атомных единицах массы (а. е. м). За *атомную единицу массы* принимается 1/12 часть массы нейтрального атома углерода ^{12}C. Нетрудно подсчитать, что 1 а. е. м. = 931,502 МэВ.

4. Малое различие в массах и совпадение спинов протона и нейтрона является проявлением общего свойства этих частиц — если отвлечься от различия, связанного с наличием у протона электрического заряда, и от различия в значениях магнитных моментов, то во всех остальных отношениях протон и нейтрон весьма сходны между собой. Это сходство, имеющее фундаментальное значение в ядерной физике, с особой отчетливостью проявляется в свойствах «зеркальных» ядер. Зеркальными называются два ядра с одинаковыми массовыми числами A каждое из которых получается из другого заменой всех протонов нейтронами, а всех нейтронов — протонами. Примером такой пары могут служить сами протон и нейтрон. Другими примерами являются $^3_1$H и $^3_2$He, $^7_4$Be и $^7_3$Li, $^{11}_5$B и $^{11}_6$C, $^{13}_6$C и $^{13}_7$N, $^{15}_7$N и $^{15}_8$O, $^{17}_8$O и $^{17}_9$F, $^{29}_{14}$Si и $^{29}_{15}$P и т. д. (более тяжелое ядро в каждой из этих пар радиоактивно). Как показывает опыт, оба зеркальных ядра имеют почти одинаковые энергии связи, сходное строение спектра возбужденных уровней энергии, одинаковые спины и пр. Это указывает на сходство сил, действующих между двумя протонами и двумя нейтронами.

На малых расстояниях (например, внутри ядра) между этими частицами действуют мощные ядерные силы, по сравнению с которыми электромагнитные силы в сотни раз слабее. В пренебрежении электромагнитными силами протон и нейтрон обладают одинаковыми свойствами: при прочих равных условиях ядерные силы, действующие между двумя протонами, равны ядерным силам, действующим между двумя нейтронами, а также между нейтроном и протоном. Это свойство называется *зарядовой симметрией ядерных сил.* Оно является проявлением еще более глубокой закономерности, называемой *изотопической инвариантностью.*

5. В настоящее время еще не создана последовательная законченная теория атомного ядра. Причина этого заключается прежде всего в том, что до сих пор неизвестна аналитическая зависимость ядерных сил от определяющих их параметров. Поэтому в отношении ядерных сил приходится вводить различные заведомо упрощенные и ограниченно применимые предположения, подобранные так, чтобы в определенной области явлений достигнуть согласия с экспериментальными данными.

В атомной физике, даже не зная закона Кулона, можно было бы в значительной степени восстановить его, изучая энергетический спектр атома водорода, поскольку последний содержит очень много уровней. В физике же ядра из-за короткодействующего характера ядерных сил такой возможности нет, так как имеется всего одно связанное состояние из двух нуклонов — дейтрон, состоящий из протона и нейтрона. Дейтрон же имеет всего *один* энергетический уровень (см. задачу

к § 26), а этого, конечно, мало для суждения о силах, действующих между протоном и нейтроном. Положение осложняется тем, что силы взаимодействия нуклонов зависят не только от *расстояния между ними*, но и от их *скоростей*, а также от *ориентации спинов.*

6. Если бы даже силы взаимодействия между нуклонами были полностью известны, то в теории ядра надо было бы еще решить квантовомеханическую *задачу многих тел.* Она много сложнее аналогичной классической задачи, с которой не может справиться современная математика (даже в случае трех взаимодействующих тел). Например, если ядро состоит из A нуклонов, то в пренебрежении их спинами его состояние определяется волновой функцией $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_A)$, зависящей от $3A$ пространственных координат. Эта функция должна быть определена из уравнения Шредингера с $3A$ независимыми переменными. Учет спинов нуклонов невообразимо усложняет эту задачу. С учетом спинов состояние ядра определяется волновой функцией $\psi(s_1, s_2, \ldots, s_A; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_A)$, зависящей не только от пространственных координат, но и от спиновых переменных (т. е. от квантовых чисел, определяющих проекции спина на выделенное направление), каждая из которых может принимать два значения: $-1/2$ и $+1/2$. Ее нахождение эквивалентно определению 2^A функций только от $3A$ пространственных координат. Например, при $A = 100$ число таких функций равно $2^{100} \approx 1{,}27{\cdot}10^{30}$. Ясно, что решение такой задачи абсолютно непосильно даже для самых мощных вычислительных машин.

В теории атома для преодоления аналогичной трудности разработаны превосходные приближенные методы — метод Хартри (1897–1958) и еще более точный метод Фока (1898–1974). Они используют то обстоятельство, что атом практически пуст — расстояния между электронами атомной оболочки, а также между последними и ядром атома очень велики по сравнению с размерами этих частиц. В случае ядер такой возможности нет, так как расстояния между нуклонами ядра того же порядка, что и размеры самих нуклонов. Поэтому указанные методы в случае ядра неприменимы.

Число нуклонов в ядре (за исключением только протона и дейтрона — ядер атомов водорода и дейтерия) всегда больше двух. Поэтому ядро следует рассматривать как систему многих частиц. Если бы число частиц в системе было очень велико, то надежное и даже единственно возможное описание ее состояния давал бы *статистический метод.* Но это условие совсем не выполняется для легких ядер. Для них статистический метод неприменим. Им можно пользоваться для средних и в особенности для тяжелых ядер. Но и здесь применимость статистического метода ограничена, так как число нуклонов даже в тяжелых ядрах все же недостаточно велико.

7. Сказанное делает понятным, почему мы не располагаем последовательной законченной теорией ядра, которая бы единым образом объясняла все его свойства. Вместо такой теории в ядерной физике используются различные *модели ядра*, каждая из которых охватывает

лишь ограниченный круг явлений [1]. Ядерные модели не дают истинной теории явлений, но позволяют систематизировать явления из различных областей ядерной физики, а главное предсказывать новые. В этом и заключается их польза. Достойно удивления, что на этом пути достигнуто так много в понимании известных из опыта ядерных явлений и предсказании новых.

8. Атомные ядра условно принято делить на *стабильные* и *радиоактивные.* Условность такого деления состоит в том, что в сущности все ядра подвергаются радиоактивному распаду, но с различной скоростью. Стабильными называют ядра, распадающиеся достаточно медленно. А понятие медленности зависит от конкретно поставленной задачи. Обычно ядра принято считать стабильными, если со времени образования видимой части Вселенной (порядка 10^{10} лет), т. е. со времени образования химических элементов, распалась ничтожная часть их. Ядра, распадающиеся более быстро, считаются радиоактивными.

Физические величины, характеризующие свойства атомных ядер, можно разделить на *статические* и *динамические.* Статические характеристики относятся к определенному, обычно невозбужденному состоянию ядра; динамические проявляются при возбуждениях и распадах ядра и в ядерных реакциях. Статические характеристики обычно называют свойствами стабильных ядер. Изменение терминологии, которому мы следуем, предложено Ю. М. Широковым и П. П. Юдиным в их известном учебнике «Ядерная физика» (М.: Наука, 1980). Оно оправдано тем, что между стабильными и радиоактивными ядрами, как уже указывалось выше, нет резкой границы. Статические же свойства присущи но только стабильным, но и радиоактивным ядрам и даже ядрам в возбужденных состояниях.

Важнейшими статическими характеристиками ядра являются: зарядовое число (атомный номер) Z, масса ядра M, энергия связи $\mathscr{E}_{\text{св}}$, спин $\mathbf{I}$, магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$, электрический квадрупольный момент $\mathbf{Q}$, радиус R и несферичность ядра $\delta R/R$, четность P волновой функции ψ, изотопический спин T, спектр возбужденных состояний.

Радиоактивные ядра дополнительно характеризуются типом радиоактивного превращения (α- или β-распад, спонтанное деление и пр.), временем жизни τ (или периодом полураспада $T_{1/2}$), энергией испускаемых частиц и т. п.

9. В настоящее время в природе известны четыре вида фундаментальных взаимодействий: *сильное*, *электромагнитное*, *слабое*, *гравитационное.* Сильное взаимодействие удерживает нуклоны в атомных ядрах и присуще также большинству элементарных частиц, так называемых *адронов* (протон, нейтрон, гипероны, мезоны и др.). К электромагнитным взаимодействиям сводятся непосредственно воспринимаемые нами силы природы (за исключением тяготения): упругие, вязкие, молекулярные, химические и пр. Слабые взаимодействия вызывают

[1] Краткое описание некоторых моделей ядра дано в гл. X.

β-распад радиоактивных ядер (см. § 74) и наряду с электромагнитными силами управляют поведением *лептонов* — элементарных частиц, не участвующих в сильных взаимодействиях и обладающих спином $1/2$ (электрон, мюон, нейтрино и др.). Нейтральные лептоны (все нейтрино и антинейтрино) не участвуют и в электромагнитных взаимодействиях. Гравитационное взаимодействие присуще всем частицам.

Об интенсивности перечисленных взаимодействий можно судить по скорости процессов, вызываемых ими. Обычно для сравнения берут скорости процессов при кинетических энергиях: сталкивающихся частиц около 1 ГэВ; такие энергии характерны для физики элементарных частиц. При таких энергиях процессы, вызываемые сильными взаимодействиями, совершаются за времена порядка 10^{-23} с, электромагнитными — за времена порядка 10^{20} с, слабыми — за времена порядка 10^{9} с. Другой величиной, характеризующей интенсивность взаимодействия, является длина свободного пробега частицы в веществе. Сильновзаимодействующие частицы при энергии около 1 ГэВ можно задержать железной плитой толщиной в несколько десятков сантиметров. Нейтрино же с энергией 10 МэВ (такова энергия антинейтрино, образующихся в ядерных реакторах), которым свойственно только слабое взаимодействие, для своего задержания потребовали бы слоя железа толщиной не менее 10^{9} км.

Сильные и слабые взаимодействия проявляются только на *коротких расстояниях.* Радиус действии сильных взаимодействий составляет примерно 10^{-13} см (1 ферми), а слабых — $2 \cdot 10^{-16}$ см (0,002 ферми). Электромагнитные силы, напротив, являются *дальнодействующими*; они убывают обратно пропорционально квадрату расстояния между взаимодействующими частицами. По тому же закону убывают с расстоянием и гравитационные силы. Поэтому отношение электромагнитных и гравитационных сил не зависит от расстояния между взаимодействующими частицами. При одном и том же расстоянии оно равно $F_{\text{эл}}/F_{\text{гр}} = e_1 e_2/(G m_1 m_2)$, где G — гравитационная постоянная, m_1 и m_2 — массы частиц, e_1 и e_2 — их электрические заряды. Для взаимодействия двух протонов эта формула дает $F_{\text{эл}}/F_{\text{гр}} \approx 1{,}23 \cdot 10^{36}$.

Таким образом, в области, где проявляются слабые силы, гравитационное взаимодействие частиц на много порядков меньше даже слабого. Поэтому в физике микромира при современном ее состоянии гравитационное взаимодействие не учитывается. Но в макромире при рассмотрении движения больших масс: галактик, звезд, планет и пр., а также при рассмотрении движения небольших макроскопических тел в поле таких масс гравитационное взаимодействие становится определяющим. Особенно существенную, пожалуй, главную роль оно играет в процессах образования и эволюции звезд (см. гл. XV). Обусловлено это двумя обстоятельствами: во-первых, дальнодействующим характером гравитационных сил, во-вторых, положительностью масс всех тел. В силу второго обстоятельства гравитационные силы всегда являются силами притяжения. При увеличении масс взаимодействующих тел гравитационное взаимодействие между ними *усиливается* и притом

пропорционально массам обоих тел. Этого не происходит в случае электрического взаимодействия макроскопических тел, так как положительные и отрицательные заряды составляющих их частиц в высокой степени *нейтрализуют* друг друга. Вот почему электрические силы не оказывают существенного влияния на движение больших масс, хотя в случае взаимодействия тел, состоящих только из положительных или только отрицательных частиц, они значительно больше гравитационных и также являются дальнодействующими.

10. Классическая физика принимала, что взаимодействие между телами передается с конечной скоростью посредством силовых полей. Так, электрический заряд создает вокруг себя электрическое поле, которое в месте нахождения другого электрического заряда воздействует на него с некоторой силой (см. т. III, § 1). Так же, но уже посредством других силовых полей, осуществляются все взаимодействия в природе, например гравитационное. Квантовая физика не изменила такое представление, но учла *квантовые свойства самого поля.* Из-за корпускулярно-волнового дуализма всякому полю должна соответствовать определенная частица (*квант поля*), которая и является переносчиком взаимодействия. Одна из взаимодействующих частиц испускает квант поля, другая его поглощает. В этом и состоит механизм взаимодействия частиц. В случае электромагнитных взаимодействий квантами поля — переносчиками взаимодействия — являются *фотоны.* Сильные взаимодействия переносятся *глюонами*, слабые — $W^{\pm}$- и Z^0-*промежуточными векторными бозонами*, предсказанными в теории электрослабого взаимодействия и открытыми экспериментально в 1983 г., гравитационное — гипотетическими *гравитонами.* В настоящее время электромагнитное и слабое взаимодействия рассматриваются как различные проявления единого *электрослабого взаимодействия*, подобно тому как электрическое и магнитное поля объединены в единое *электромагнитное поле.* Слабые силы на малых расстояниях (порядка радиуса их действия) одного порядка с электромагнитными. Но они экспоненциально убывают с расстоянием, так что на больших расстояниях слабые силы исчезающе малы по сравнению с электромагнитными.

Против представления взаимодействия посредством обмена квантами поля можно выдвинуть следующее возражение. Пока частица свободна, она не может испустить или поглотить квант поля. Для испускания и поглощения фотона это утверждение уже было доказано в § 1. Повторим его еще раз в измененной форме, не предполагая, что масса покоя кванта поля равна нулю.

Рассмотрим сначала процесс испускания кванта и применим доказательство от противного. Пусть масса покоя частицы до испускания кванта равна m. После испускания кванта масса покоя может измениться, обозначим ее через m'. При испускании частица может получить импульс отдачи $\mathbf{p}$. В системе, в которой частица покоилась до испускания кванта поля, закон сохранения энергии записывается

в виде

$$mc^2 = \sqrt{(m'c^2)^2 + (pc)^2} + \mathscr{E}_{\text{кв}}, \tag{63.3}$$

где $\mathscr{E}_{\text{кв}}$ — энергия испущенного кванта. Если импульс кванта $\mathbf{\Pi}$, то, очевидно, $p+\Pi = 0$. Из написанного уравнения видно, что $m'c^2 \leqslant mc^2$. Если частица стабильна, а это надо предполагать, то ее энергия минимальна и не может дальше уменьшаться. Поэтому должно быть $m = m'$, $p = \Pi = 0$, $\mathscr{E}_{\text{кв}} = 0$. Итак, испущенный квант поля не обладает ни энергией, ни импульсом. А это значит, что такого кванта вообще нет. Доказательство, по существу, предполагает, что при испускании кванта поля внутреннее квантовое состояние частицы *не изменяется.* Если то же самое имеет место и при поглощении, то не составит труда распространить доказательство и на поглощение. Это предлагается сделать читателю.

Квантовая теория снимает выдвинутое возражение, используя принцип неопределенности Гейзенберга. Если квант поля существует в течение короткого промежутка времени Δt, необходимого для переноса взаимодействия, то его энергия $\mathscr{E}$ не может быть точно определенной. Ее неопределенность $\Delta\mathscr{E}$ удовлетворяет соотношению Гейзенберга $\Delta\mathscr{E} \cdot \Delta t \approx \hbar$. Формально это означает, что для таких промежутков времени *закон сохранения энергии нарушается.* Иначе можно сказать, что *для частиц, переносящих взаимодействие, нарушается обычная связь между энергией и импульсом.* Поэтому их называют не просто частицами, а *виртуальными частицами* или *виртуальными квантами поля.* Из таких виртуальных квантов, испускаемых и поглощаемых действительными частицами, и состоит силовое поле, их окружающее. В частности, электромагнитное поле, окружающее электрический заряд, состоит из испускаемых и поглощаемых виртуальных фотонов. Процессы испускания и поглощения виртуальных частиц называют также *виртуальными.*

11. Определенная трудность возникает, если механизм взаимодействия частиц микромира пытаться представить наглядно. Вообразим, например, двух людей A и B, которые стоят в разных местах и перекидываются мячом. Бросив мяч в направлении к B, A испытывает толчок в обратном направлении. Дополнительный толчок в том же направлении он получает, когда ловит мяч, брошенный B. В результате между A и B возникает сила отталкивания. Можно ли придумать классический пример, когда в результате перекидывания каким-либо предметом между A и B возникает притяжение? Можно. Для этого мяч надо заменить бумерангом и поставить A и B спиной друг к другу. A бросает бумеранг в направлении от B и при этом испытывает силу, направленную к B. Бумеранг, изменив направление полета, пролетает за B а затем возвращается к B. B ловит его и посылает в сторону, противоположную A. В результате возникает сила, направленная к A, и т. д. Таким образом, осуществляется притяжение между A и B. Очевидно, в этом примере существенную роль играет среда (воздух), в которой летит бумеранг. Без такой среды бумеранг летел бы по инерции — прямолинейно. Все это является только наглядной иллюстрацией

и не претендует на истинное объяснение механизма взаимодействия. Взаимодействие посредством обмена виртуальными частицами не имеет наглядного объяснения.

12. Виртуальные частицы непосредственно не воспринимаются. Каждая частица является источником какого-то поля (например, электрон — источником электромагнитного поля). Согласно корпускулярно-волновому дуализму всякому полю соответствуют частицы, являющиеся квантами этого поля. Масса этих частиц m может быть равна нулю (как у фотонов), но может быть и отличной от нуля. Свободная частица, ввиду законов сохранения энергии и импульса, не может испустить реальный квант поля, так как для этого необходима энергия, не меньшая mc^2. С точки зрения классической физики такой процесс невозможен без поступления энергии извне. Но квантовая физика с ее принципом неопределенности $\Delta\mathscr{E}\cdot\Delta t\approx\hbar$ допускает нарушение закона сохранепия энергии в течение малых промежутков времени Δt, необходимых для передачи взаимодействия. Чтобы получить требуемую энергию $\Delta\mathscr{E}=mc^2$, необходимо время $\Delta t\approx\hbar/mc^2$. За это время виртуальная частица не может уйти дальше чем на расстояние

$$R=c\Delta t=\frac{\hbar}{mc}, \qquad (63.4)$$

т. е. на расстояние, равное комптоновской длине волны частицы массой m. Эта длина и может быть принята за радиус действия, переносимого виртуальной частицей. Чем меньше масса m, тем больше радиус действия, переносимого виртуальной частицей.

Электромагнитные взаимодействия осуществляются обменом фотонами. Масса фотона $m=0$, поэтому радиус действия электромагнитных сил $R=\infty$, т. е. эти силы являются дальнодействующими. Дальнодействующими являются и гравитационные силы, перенос которых осуществляется гипотетическими гравитонами. Гравитоны из-за исключительной слабости гравитационного взаимодействия не наблюдались на опыте и, по-видимому, еще очень долго не будут наблюдаться, но теоретики не сомневаются в их существовании. На основании дальнодействующего характера гравитационных сил следует заключить, что масса гравитона должна равняться нулю.

13. В 1934 г. Таммом (1895–1971) и Иваненко была развита теория ядерных сил, согласно которой переносчиками этих сил являются легкие частицы — электрон и позитрон, нейтрино и антинейтрино (частицы промежуточной массы — мюоны и пионы — в то время еще не были известны). Протон, например, испустив позитрон и нейтрино, превращается в нейтрон. Нейтрон же, поглотив те же частицы, превращается в протон. В результате этих процессов и возникают силы притяжения между протоном и нейтроном. В количественном отношении теория Тамма и Иваненко оказалась несостоятельной, так как она приводила к ядерному взаимодействию, которое было примерно в 10^{11}–10^{13} раз слабее требуемого. Но основные идеи этой теории сохранили свое значение и впервые были использованы в 1935 г. японским физиком Юкава (1907–1981).

Юкава в 1935 г. высказал предположение о существовании особого поля ядерных сил. Квантами этого поля являются частицы, которые, согласно гипотезе Юкавы, и осуществляют взаимодействие между нуклонами. По экспериментальным данным радиус действия ядерных сил равен $1{,}2 \cdot 10^{-13}$ см. Исходя из этого, можно оценить с помощью формулы (63.4) массу гипотетической частицы Юкавы. Она оказалась равной $270m_e$ (около 140 МэВ). Вскоре в 1937 г. Неддермайер (р. 1907) и Андерсон (р. 1905) открыли в космических лучах положительные и отрицательные частицы ($\mu^\pm$) массой $207m_e$ (106 МэВ), называемые теперь *мюонами* (первоначальное название — *мезоны*). Естественно было предположить, что мюоны и являются частицами Юкавы. Однако это предположение сразу же пришлось отвергнуть, так как мюоны очень слабо взаимодействуют с веществом и поэтому не могут быть переносчиками ядерного взаимодействия. (Время жизни мюона в системе отсчета, где он покоится, $\tau_\mu = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ с, так что релятивистские мюоны, образующиеся в верхних слоях атмосферы, могут доходить и действительно доходят до поверхности Земли.)

Лишь через 10 лет в 1947 г. Пауэлл (1903–1969), Оккиалини (р. 1907) и Латтес (р. 1924) в фотоэмульсиях, облученных космическими лучами в верхних слоях атмосферы, открыли следы заряженных частиц, названных *пионами* ($\pi^\pm$), которые распадаются на мюоны и нейтрино. В 1950 г. был открыт и нейтральный пион π^0. Пионы сильно взаимодействуют с веществом (время жизни $\tau_{\pi^\pm} = 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ с, а $\tau_{\pi^0} = 0{,}83 \cdot 10^{-16}$ с). Поэтому пионы удовлетворяют требованиям, предъявляемым к частицам, переносящим ядерное взаимодействие. До недавнего времени считали, что пионы осуществляют сильные взаимодействия. Сейчас эта роль отводится глюонам.

Как было указано выше, слабые взаимодействия переносятся $W^\pm$- и Z^0-промежуточными бозонами. По экспериментальным данным массы $W^\pm$- и Z^0-бозонов соответственно приближенно равны 80 и 90 ГэВ. Эти данные с помощью формулы (63.4) позволяют оценить радиус действия R слабых сил. Для оценки возьмем $W^\pm$-бозоны, поскольку им соответствуют меньшая масса и, следовательно, больший радиус действия. Полагая $mc^2 = 80$ ГэВ, $\hbar c = 1{,}973 \cdot 10^{-14}$ ГэВ · см, получим

$$R = \frac{\hbar c}{mc^2} = 2{,}5 \cdot 10^{-16} \text{ см}.$$

14. Со времени возникновения *кварковой модели* принято считать, что основное взаимодействие между нуклонами осуществляется не мюонами, а сводится к взаимодействию кварков. Кварки — это гипотетические частицы, из которых состоят адроны, в том числе протоны и нейтроны. Предполагается, что кварки несут дробные заряды $\pm(2/3)e$ и $\pm(1/3)e$ и обладают спином 1/2. Всего в настоящее время различают шесть кварков (и соответствующих им антикварков), которые группируются в три дублета. Взаимодействие между кварками осуществляется путем обмена безмассовыми частицами со спином 1 — *глюонами.* Кварки в свободном состоянии не удалось наблюдать в природе, в космических лучах и получить на ускорителях. Это привело к

гипотезе пленения кварков, согласно которой они существуют только внутри адронов и не могут существовать в свободном состоянии. Это объясняется тем, что силы взаимодействия между кварками убывают с уменьшением расстояния между ними и растут с увеличением расстояния. Благодаря этому на малых расстояниях кварки внутри адронов ведут себя как свободные частицы, называемые *партонами.* Гипотеза кварков, поскольку она объяснила множество фактов в поведении элементарных частиц и предсказала существование новых, в настоящее время считается общепринятой (см. гл. XVI).

§ 64. Энергия связи ядра

1. *Энергия связи ядра (относительно всех нуклонов) $\mathscr{E}_{\text{св}}$ есть мера его прочности, измеряемая минимальной работой, которую надо произвести, чтобы полностью расщепить ядро на составляющие его протоны и нейтроны.* Энергию связи ядра надо отличать от его *внутренней энергии*, т. е. от *энергии* образования ядра $\mathscr{E}_{\text{об}}$. Если энергию полностью расщепленного ядра принять за нуль, то, очевидно, $\mathscr{E}_{\text{об}} = -\mathscr{E}_{\text{св}}$. Через величину $\mathscr{E}_{\text{св}}$ определится и *энергия связи ядра по отношению к разделению его на любые две части, состоящие из протонов и нейтронов, т. е. минимальная работа, необходимая для разделения ядра на эти две части.* Например, энергия связи протона в ядре, иначе называемая *энергией отделения протона* от ядра, есть минимальная работа, которую надо произвести, чтобы удалить протон из ядра. Она определяется формулой

$$\mathscr{E}_{\text{p}} = \mathscr{E}_{\text{св}}(Z, A) - \mathscr{E}_{\text{св}}(Z-1, A-1), \tag{64.1}$$

т. е. равна разности энергий связи исходного и конечного ядра. Аналогично энергия связи нейтрона в ядре (иначе, *энергия отделения нейтрона от ядра*)

$$\mathscr{E}_{\text{n}} = \mathscr{E}_{\text{св}}(Z, A) - \mathscr{E}_{\text{св}}(Z, A-1), \tag{64.2}$$

а энергия связи α-частицы в ядре (или энергия отделения ее)

$$\mathscr{E}_{\alpha} = \mathscr{E}_{\text{св}}(Z, A) - \mathscr{E}_{\text{св}}(Z-2, A-4) - \mathscr{E}_{\text{св}}(\alpha), \tag{64.3}$$

где $\mathscr{E}_{\text{св}}(\alpha)$ — энергия связи α-частицы.

Понятно, что исходное ядро в этих формулах не может быть соответственно протоном, нейтроном или α-частицей. Иначе $\mathscr{E}_{\text{p}}$, например, означала бы энергию отделения протона от ядра, которое само состоит только из одного протона, а такая постановка вопроса лишена смысла.

В силу соотношения между массой и энергией энергия связи ядра может быть вычислена по формуле

$$\mathscr{E}_{\text{св}}(Z, A) = ZM_{\text{p}} + NM_{\text{n}} - M(Z, A), \tag{64.4}$$

если массы выражены в энергетических единицах. Предполагается, что массы всех частиц в формуле (64.4) — *массы покоя* (индекс нуль опущен, как это принято в ядерной физике и физике элементарных

частиц). Массу заряженной частицы можно измерить масс-спектрографическим методом, основанным на измерении отклонений заряженных частиц в статических магнитных и электрических полях. Если же частица не заряжена (например, нейтрон), то измерение ее массы может быть сведено к измерению масс заряженных частиц.

2. Существенно заметить, что в таблицах приводятся не массы ядер, а величины, выражающиеся через массы *нейтральных атомов.* Поэтому для удобства вычислений формулу (64.4) целесообразно преобразовать так, чтобы в нее входили массы атомов, а не ядер. С этой целью в правой части формулы (64.4) прибавим и вычтем массу Z электронов. Пренебрежем далее разницей энергий связи этих электронов в Z атомах водорода, с одной стороны, и в атоме (Z, A) — с другой (такая разница только за последнее время стала доступной измерениям). Тогда формула (64.4) перейдет в

$$\mathscr{E}_{\text{св}}(Z, A) = ZM_{\text{ат}}({}_1^1H) + NM_{\text{n}} - M_{\text{ат}}(Z, A), \tag{64.4а}$$

где $M_{\text{ат}}({}_1^1H)$ — масса атома водорода, а $M_{\text{ат}}(Z, A)$ — масса атома с порядковым номером Z и массовым числом A.

Полезным понятием в ядерной физике является *дефект массы ядра*, связанный с его энергией связи. Дефектом массы ядра называется разность между массой рассматриваемого ядра, выраженной в атомных единицах массы (см. § 63, п. 3), и соответствующим массовым числом A:

$$\Delta(Z, A) = M_{\text{яд}}(Z, A) - A. \tag{64.5}$$

Для установления зависимости между дефектом массы и энергией связи ядра используем формулу (64.4), считая, что вся масса в ней выражена в атомных единицах массы (а. е. м.). Далее, учтем, что из формулы (64.5) следует, что $M_{\text{яд}} = \Delta + A$. В частности, для нейтрона $M_{\text{n}} = \Delta_{\text{n}} + 1$, а для протона $M_{\text{p}} = \Delta_{\text{p}} + 1$. Подставив эти значения в (64.4), получим

$$\mathscr{E}_{\text{св}} = Z(\Delta_{\text{p}} + 1) + N(\Delta_{\text{n}} + 1) - (\Delta + A),$$

или

$$\mathscr{E}_{\text{св}} = Z\Delta_{\text{p}} + N\Delta_{\text{n}} - \Delta(Z, A), \tag{64.4б}$$

так как $Z + N = A$. Отсюда видно, что при надлежащем сдвиге начала отсчета энергии (зависящем только от Z и N) дефект массы отличается от энергии связи ядра только знаком. Применим (64.4б) к расчету энергии связи ядра атома ${}_2^4\text{He}$.

Масса протона M_{p} = 938,2796 МэВ = 1,0072764 а. е. м., масса нейтрона M_{n} = 939,5731 МэВ = 1,008665, масса α-частицы (ядра ${}^4\text{He}$) M_α = 4,001506 а. е. м. Следовательно, для соответствующих дефектов масс получаем Δ_{p} = 0,007276, Δ_{n} = 0,008665, Δ_α = 0,001506, а для энергии связи α-частицы $\mathscr{E}_{\text{св}}$ = 2(0,007276 + 0,008665) − 0,001506 = = 0,030 а. е. м. = 28,38 МэВ.

Дефект массы, определяемый формулой (64.5), есть величина безразмерная. Но ему искусственно можно приписать размерность массы (энергии), если условиться, что формула (64.5) определяет Δ только

в атомных единицах массы. После этого простым пересчетом определится значение Δ в мегаэлектронвольтах (или в других единицах массы). В результате получится, например, $\Delta_p = 6{,}77761$ МэВ, $\Delta_n = 8{,}07146$ МэВ, $\Delta_\alpha = 1{,}4028414$ МэВ.

Как уже отмечалось выше, в таблицах обычно приводятся не массы ядер, а массы нейтральных атомов. Последние больше масс ядер на массы электронных оболочек. В соответствии с этим вместо дефектов масс ядер приводятся дефекты масс также *нейтральных атомов*, т. е. величины

$$\delta(Z, A) = M_{ат}(Z, A) - A. \tag{64.5а}$$

Например, дефект массы атома ${}^4_2$He получится, если к дефекту массы α-частицы добавить массу двух электронов: $2 \cdot 0{,}511003 = 1{,}022006$ МэВ. Таким путем для дефекта массы атома ${}^4_2$He получится $1{,}4028414 + 1{,}022006 = 2{,}42485$ МэВ. Очевидно, формула (64.4б) остается справедливой, если дефекты масс ядер заменить на дефекты масс нейтральных атомов, т. е.

$$\mathscr{E}_{св} = Z\delta_p + N\delta_n - \delta(Z, A). \tag{64.4в}$$

Интересно сравнить энергию связи α-частицы с относительным изменением массы вещества при химических реакциях. Например, в реакции $H_2 + O \rightarrow H_2O$ достигается температура порядка 1000 °C = 1273 K, что соответствует средней энергии $3 \cdot (3/2)kT = (9/2) \times 1{,}38 \cdot 10^{-16} \cdot 1273 \approx 7{,}9 \cdot 10^{-13}$ эрг $\approx 0{,}5$ эВ на одну молекулу воды (молекула воды состоит из трех атомов: двух атомов водорода и одного атома кислорода). Так как молекула воды содержит 18 нуклонов, а масса нуклона равна 931 МэВ, то собственная энергия молекулы воды равна $18 \cdot 931 = 16{,}8 \cdot 10^3$ МэВ $= 16{,}8 \cdot 10^9$ эВ. Относительное изменение массы вещества при этой химической реакции составляет примерно $3 \cdot 10^{-11} = 3 \cdot 10^{-9}$ %, что недоступно измерению даже масс-спектрографическими методами. Этот пример делает понятным, почему экспериментальная проверка формулы Эйнштейна $\Delta m = \Delta\mathscr{E}/c^2$ на химических реакциях оказалась безнадежной, а стала возможной только на ядерных реакциях.

Отношение $\mathscr{E}_{св}/A$, т. е. средняя энергия связи, приходящаяся на один нуклон, называется *удельной энергией связи*, а дефект массы, отнесенный к одному нуклону, $f = \Delta/A$, — *упаковочным коэффициентом.*

3. Отметим некоторые свойства атомных ядер, установленные экспериментально, и посмотрим, какие выводы следует сделать из них относительно строения ядра. Оказывается, что для стабильных не слишком легких ядер ($A \gtrsim 20$) удельная энергия связи в грубом приближении постоянна и составляет около 8 МэВ на нуклон. Этот факт определенно свидетельствует о том, что ядерные силы являются *короткодействующими* — их радиус действия порядка размеров самих нуклонов и даже меньше. Такая особенность ядерных сил проявляется в их *насыщении.* Насыщение означает, что каждый нуклон в ядре взаимодействует только с несколькими соседними нуклонами. В этом

отношении ядерные силы аналогичны химическим силам, обусловливающим валентность химических элементов.

Насыщением ядерных сил объясняется, почему энергия связи не слишком легких стабильных ядер в грубом приближении пропорциональна массовому числу A. Если бы насыщения не было, а каждый нуклон эффективно взаимодействовал с остальными $A-1$ нуклонами, то энергия связи ядра оказалась бы пропорциональной $A(A-1)/2$, т. е. при больших A возрастала приблизительно пропорционально второй, а не первой степени A. С насыщением ядерных сил связано и то обстоятельство, что плотность ядерного вещества для не слишком легких ядер приблизительно постоянна, т. е. не зависит от A. Благодаря этому радиус ядра R оказывается пропорциональным $A^{1/3}$. Это дает основание рассматривать атомное ядро как *каплю несжимаемой жидкости*, заряженной положительным электричеством; такое предположение вводится в так называемой *капельной модели ядра.* Такая классическая модель представляется наиболее обоснованной для ядер с большими массовыми числами A.

4. С точки зрения капельной модели следует ожидать уменьшения удельной энергии связи ядра по сравнению с той, какой она была бы, если бы нуклоны в ядре подвергались действию только *насыщенных* ядерных сил притяжения. Такое уменьшение действительно наблюдается. Оно связано, во-первых, с влиянием поверхностных нуклонов. Если нуклон находится вблизи поверхности ядра, то уменьшается число нуклонов, удерживающих его в ядре, т. е. не все связи в этом случае будут действовать полностью. Этот эффект особенно существен для легких ядер, так как его влияние тем больше, чем больше отношение поверхности ядра к его объему (пропорциональное $R^{-1} \sim A^{-1/3}$). Удельные энергии связи для легких ядер, вычисленные по формуле (64.4а), приведены в табл. 7. Разумеется, для легких ядер нет оснований ожидать согласия экспериментальных данных с вычисленными по капельной модели.

Таблица 7

Ядро	${}^2_1$H	${}^3_2$He	${}^4_2$He	${}^6_3$Li	${}^7_3$Li	${}^{14}_7$N	${}^{16}_8$O	${}^{19}_9$F
$\mathscr{E}_{\text{св}}/A$, МэВ	1,112	2,573	7,074	5,332	5,606	7,476	7,976	7,632

Во-вторых, энергия связи уменьшается из-за кулоновского отталкивания между протонами. Для легких ядер этот эффект не играет существенной роли, поскольку в этом случае ядерные силы превосходят кулоновские примерно на два порядка. Однако кулоновские силы являются дальнодействующими, их энергия пропорциональна $Z(Z-1)$, или при больших Z приблизительно пропорциональна Z^2, тогда как энергия ядерного взаимодействия пропорциональна Z. Поэтому при больших Z роль кулоновской энергии увеличивается. Этим объясняется уменьшение удельной энергии связи тяжелых ядер с возрастанием Z.

5. Помимо объемной, поверхностной и кулоновской энергий, энергия связи ядра содержит еще два члена. Первый учитывает установлен-

ную на опыте для легких ядер повышенную стабильность ядра с равными числами протонов и нейтронов ($Z = N$) по сравнению с другими ядрами того же массового числа $A = Z + N$. Нарушение такой стабильности для тяжелых ядер связано с кулоновским отталкиванием протонов, которое уже было учтено выше. Поэтому мы примем в качестве обобщения опытных фактов, что указанная тенденция к стабильности сохранится и для тяжелых ядер, если «выключено» электрическое взаимодействие. При отклонении чисел Z и N от равенства в энергии связи ядра, помимо поверхностной и кулоновской энергий, появится еще одна отрицательная добавка, называемая *энергией симметрии.* Физическая природа энергии симметрии не ясна. Однако ее наличие, несомненно, свидетельствует о том, что протон отличается от нейтрона не только электрическим зарядом. Между ними имеются и другие, хотя и менее существенные различия. Оставляя в стороне вопрос о физической природе энергии симметрии, поставим более скромную задачу: на основе эмпирических фактов получить приближенное выражение для энергии симметрии.

Допустим, что в ядре «выключено» электромагнитное взаимодействие, а осталось только ядерное взаимодействие. Если теперь в ядре заменить все протоны нейтронами, а все нейтроны — протонами, то от этого энергия связи не изменится. Это утверждение является обобщением опытных фактов и подтверждается, в частности, существованием зеркальных ядер. Математически оно выражается уравнением

$$\mathscr{E}_{\text{св}}(Z, N) = \mathscr{E}_{\text{св}}(N, Z).$$

Введем в это уравнение новую переменную $\varepsilon = N - Z$. С использованием соотношения $A = Z + N$ находим

$$N = \frac{A+\varepsilon}{2}, \quad Z = \frac{A-\varepsilon}{2},$$

так что

$$\mathscr{E}_{\text{св}}\left(\frac{A-\varepsilon}{2}, \frac{A+\varepsilon}{2}\right) = \mathscr{E}_{\text{св}}\left(\frac{A+\varepsilon}{2}, \frac{A-\varepsilon}{2}\right).$$

Отсюда видно, что при постоянном A энергия связи ядра является четной функцией параметра ε. Считая величину ε малой по сравнению с A, разложим функцию $\mathscr{E}_{\text{св}}$ по степеням ε и оборвем это разложение на квадратичном члене:

$$\mathscr{E}_{\text{св}} = F(A) + f(A)\varepsilon^2 = F(A) + f(A)(N - Z)^2.$$

Опытные факты вынуждают признать, что функция $F(A) \propto A$, о чем уже было сказано выше, а $f(A) \propto A^{-1}$, причем функция $f(A)$ должна быть отрицательной, о чем также было сказано выше.

6. Второй из упомянутых в начале п. 5 членов не может быть истолкован классически и учитывает экспериментально установленный факт систематического изменения энергии связи ядра в зависимости от того, четны или нечетны Z и A. Ядра с четными Z и N называются *четно-четными*, с четными Z и нечетными N — *четно-нечетными*,

с нечетными Z и четными N — *нечетно-четными*, с нечетными Z и нечетными N — *нечетно-нечетными.* Энергия связи максимальна для четно-четных ядер, минимальна для нечетно-нечетных и принимает промежуточные значения для остальных ядер. Этот факт с определенностью свидетельствует о *спаривании* одинаковых нуклонов в ядре, т. е. в каком-то смысле объединении в пары как протонов, так и нейтронов. Спаривание увеличивает энергию связи ядра. Соответствующая поправка в энергии связи называется *энергией спаривания.* При четных Z и N все протоны и все нейтроны ядра спарены. При нечетном A остается один неспаренный протон или один неспаренный нейтрон. Наконец, при нечетных Z и N получится один неспаренный протон и одни неспаренный нейтрон.

Экспериментальные факты удовлетворительно описываются, если при нечетном A энергию спаривания включить в объемный член, т. е. принять ее равной пулю. Тогда для четно-четных ядер энергия спаривания будет положительна, а для нечетно-нечетных отрицательна, причем по абсолютной величине обе энергии практически одинаковы.

7. Таким образом, на основании сказанного для энергии связи ядра можно написать

$$\mathscr{E}_{\text{св}} = C_{\text{об}}A - C_{\text{пов}}A^{2/3} - C_{\text{кул}}Z^2A^{-1/3} - C_{\text{сим}}(A-2Z)^2A^{-1} + C_{\text{спар}}A^{-\varepsilon}\delta. \tag{64.6}$$

Эта полуэмпирическая формула называется *формулой Вейцзеккера* (р. 1912). Последний член установлен на основании эмпирических данных, причем для показателя ε разные авторы приводят различные значения от $+1/3$ до 1. В настоящей книге принимается $\varepsilon = 3/4$. Значение δ равно

$$\delta = \begin{cases} +1 & \text{для четно-четных ядер,} \\ \;\;0 & \text{для ядер с нечетным } A, \\ -1 & \text{для нечетно-нечетных ядер.} \end{cases}$$

Коэффициенты в формуле (64.6) подбираются так, чтобы получилось наилучшее согласие с опытом. В настоящее время приняты следующие значения:

$$\begin{gathered} C_{\text{об}} = 15{,}75\ \text{МэВ}, \quad C_{\text{пов}} = 17{,}8\ \text{МэВ}, \quad C_{\text{кул}} = 0{,}710\ \text{МэВ}, \\ C_{\text{сим}} = 23{,}7\ \text{МэВ}, \quad C_{\text{спар}} = 34\ \text{МэВ}, \quad \varepsilon = 3/4. \end{gathered} \tag{64.7}$$

Формула Вейцзеккера для энергии связи в большинстве случаев справедлива с точностью до нескольких мегаэлектронвольт и чрезвычайно полезна при выяснении всех существенных общих свойств ядер (легкие ядра исключаются из рассмотрения). Однако некоторые детали не отражаются этой формулой должным образом. Сюда относятся, например, особая устойчивость «магических» ядер и флуктуации энергии спаривания.

Магическими называются ядра, у которых число протонов или нейтронов равно одному из чисел 2, 8, 20, (28), 50, 82, 126 (в последнем

случае только для нейтронов). Сами эти числа называются также *магическими.* Если у ядра одновременно являются магическими как число протонов, так и число нейтронов, то такое ядро называется *дважды магическим.* Таких ядер всего пять: ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$, ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$, ${}^{40}_{20}\mathrm{Ca}$, ${}^{48}_{20}\mathrm{Ca}$, ${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$. Магические и в особенности дважды магические ядра отличаются *повышенной устойчивостью* (т. е. обладают большими удельными энергиями связи) и большей распространенностью в природе по сравнению с другими ядрами. Существование магических чисел объясняется оболочечной моделью ядра (см. § 78).

8. Применим формулу Вейцзеккера для определения наиболее стабильного изобара при заданном массовом числе A. Изобары отличаются друг от друга значениями Z. Поэтому задача сводится к определению зарядового числа Z, при котором энергия связи ядра максимальна. Продифференцируем (64.6) по Z при постоянном A и приравняем производную нулю. Разумеется при этом достаточно принять во внимание только третий и четвертый члены формулы (64.6), так как остальные члены от Z не зависят. В результате получим

$$Z = \frac{A}{2 + (C_{\text{кул}}/2C_{\text{сим}})\,A^{2/3}} = \frac{A}{2 + 0{,}0150\,A^{2/3}}. \tag{64.8}$$

Формула Вейцзеккера не учитывает различия масс нейтрона и протона: $m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{p}} = 1{,}29343$ МэВ. Действительно, масса ядра должна содержать член $Zm_{\mathrm{p}} + (A - Z)m_{\mathrm{n}} = Am_{\mathrm{n}} - Z(m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{p}})$. Поэтому в формулу для энергии связи должно входить слагаемое $Z(m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{p}})$. С учетом этого слагаемого получится

$$Z = \frac{[1 + (m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{p}})/4C_{\text{сим}}]\,A}{2 + (C_{\text{кул}}/2C_{\text{сим}})\,A^{2/3}} = \frac{A}{1{,}97 + 0{,}0150\,A^{2/3}}, \tag{64.8a}$$

что отличается от (64.8) примерно на 1%. Такое различие вряд ли реально ощутимо при той точности, на которую может претендовать полуэмпирическая формула Вейцзеккера.

Ядра, не испытывающие β-распада, называются *β-стабильными ядрами.* Числа нейтронов N и протонов Z в них определяются формулами (64.8) или (64.8а). Эти формулы дают только средние или сглаженные значения N и Z для β-стабильных ядер. На плавный ход изменения, соответствующего формулам (64.8) и (64.8а), накладывается ряд *локальных искажений.* Для $A \lesssim 40$ число Z примерно вдвое меньше A, т. е. числа нейтронов и протонов в ядре примерно равны. При больших A из-за кулоновского отталкивания в ядре содержится больше нейтронов, чем протонов.

На рис. 120 на осях координат отложены числа N и Z. Здесь известные β-стабильные ядра изображены прямоугольниками в функции N и Z. Темные квадратики относятся к ядрам, полупериод α-распада которых больше 10^9 лет, а светлые — к ядрам, у которых этот полупериод меньше. Ядра с избыточным числом нейтронов или протонов β-радиоактивны. От избытка протонов ядро освобождается

путем испускания *позитронов*, а от избытка нейтронов — путем испускания *электронов* (см. § 74). Когда избыток протонов становится столь большим, что энергия отделения протона обращается в нуль, то ядро существовать не может и распадается. Аналогичное заключение относится к нейтронам.

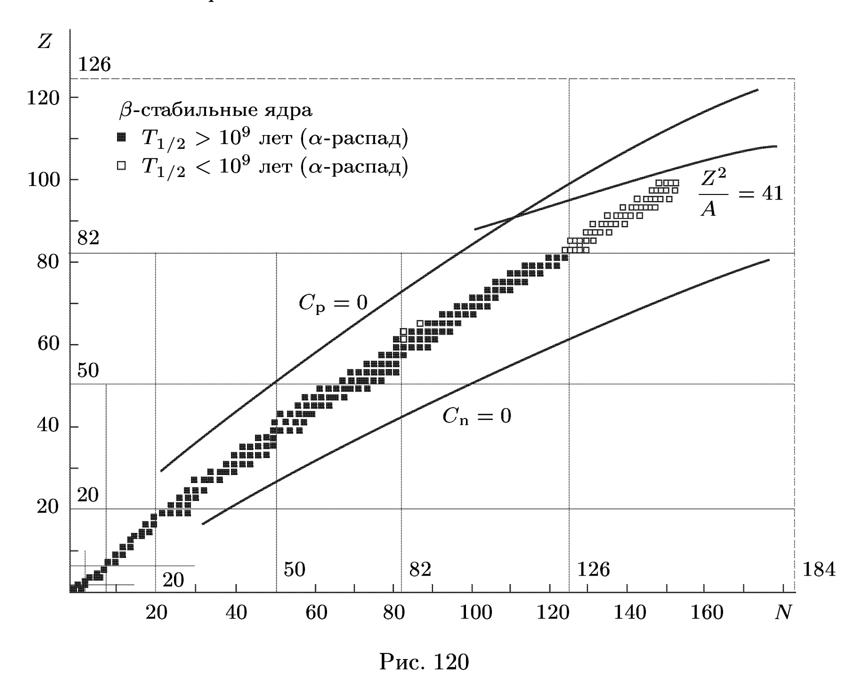


Рис. 120

Соответствующие теоретические границы существования ядер изображены кривыми C_p и C_n на рис. 120. Их можно приближенно получить, приравнивая нулю частные производные по Z (при $N = \text{const}$) и по N (при $Z = \text{const}$). О кривой $Z^2/A = 41$ будет сказано при рассмотрении вопроса о делении ядра (см. § 93).

9. Зависимость энергии связи ядра от числа нейтронов N и числа протонов Z можно изобразить графически, откладывая на горизонтальных осях значения N и Z, а на вертикальной оси энергии связи $\mathscr{E}_{\text{св}}$. Так как числа N и Z целые, то таким путем получится конечная система точек, каждая из которых соответствует определенному ядру. Если их соединить поверхностью, та она отнюдь не будет гладкой, а получится зубчатой. Положение здесь напоминает то, что получилось бы, если бы подобным образом изобразить зависимость энергии ионизации атома от порядкового номера элемента. Энергия ионизации менялась бы скачкообразно при переходе от одного элемента к соседнему. Особенно велики были бы эти скачки при переходах от соседних атомов к атомам благородных газов, у которых полностью застроены наружные электронные оболочки и именно благодаря этому энергии

ионизации особенно велики. Аналогичное увеличение удельной энергии связи наблюдается и в ядерной физике при переходе к *магическим ядрам.* Этот эффект связан с оболочечной структурой ядра (см. § 78).

Но особенно сильно удельная энергия связи меняется при изменении *четности ядра.* При переходе же от ядер к соседним ядрам той же четности скачки удельной энергии связи относительно меньше. Именно в этом проявляется *энергия спаривания.* Благодаря наличию энергии спаривания поверхность $\mathscr{E}_{\text{св}} = \mathscr{E}_{\text{св}}(N, Z)$ отчетливо расщепляется на три поверхности. Выше всех располагается поверхность для четно-четных ядер, ниже всех — для нечетно-нечетных. Посередине между ними располагается поверхность с нечетными числами A, соответствующая четно-нечетным и нечетно-четным ядрам. Все три поверхности можно аппроксимировать гладкими поверхностями, используя для этого, например, формулу Вейцзеккера. Расстояние между этими поверхностями при $Z \approx 10$–20 и $N \approx 10$–20 составляет примерно 3–2 МэВ, а затем монотонно убывает до 1 МэВ в области самых тяжелых ядер ($Z \approx 100$, $N \approx 150$).

10. На рис. 121 представлена экспериментальная зависимость удельной энергии связи ядра от массового числа A для наиболее стабильных изобаров при всех четных значениях A. Нечетно-нечетных стабильных ядер известно всего пять: это легкие ядра ${}^2_1\text{D}$, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{Be}$, ${}^{14}_7\text{N}$, а также ${}^{50}_{23}\text{V}$. Они на рис. 121 не представлены. Не представлены и ядра с нечетными значениями A. Тем самым исключены систематические нечетно-четные поправки, связанные с эффектом спаривания нуклонов. Плавная кривая соответствует полуэмпирической формуле Вейцзеккера (64.6). Если исключить из рассмотрения самые легкие ядра, то в грубом приближении, как уже указывалось в п. 3, удельная энергия связи слабо меняется при переходе от ядра к ядру и равна приблизительно 8 МэВ. Удельная энергия связи обращается в максимум при $A \approx 56$ (железо). Этот максимум равен приблизительно 8,8 МэВ. Замедление роста удельной энергии связи с последующим падением ее, как уже указывалось выше (см. п. 3), сначала связано с влиянием поверхностной энергии, а затем с кулоновским отталкиванием. Из рассмотрения кривой видно, что для легких ядер энергетически возможен процесс *слияния* их с выделением ядерной энергии синтеза. Напротив, для тяжелых ядер энергетически выгоден процесс *деления*, сопровождающийся также выделением энергии. На этих процессах основана вся ядерная энергетика.

ЗАДАЧИ

1. Дефект массы атома ${}^9_4\text{Be}$ равен 11,3484 МэВ. Определить энергию связи ядра ${}^9_4\text{Be}$ относительно распада его на две α-частицы ${}^4_2\text{He}$ и нейтрон.

Решение. Воспользовавшись значениями дефектов масс нейтрона и атома ${}^2_4\text{He}$, приведенными в тексте, получим для искомой энергии связи

$$\mathscr{E}_{\text{св}} = 2\Delta(2{,}4) + \Delta_{\text{n}} - \Delta(4{,}9) = 2 \cdot 2{,}42485 + 8{,}07162 - 11{,}3484 = 1{,}5729 \text{ МэВ}.$$

Столь малая энергия связи ядра $^9_4$Be относительно распада его на две α-частицы и нейтрон позволяет выбивать из этого ядра нейтрон путем облучения его α-частицами. Именно таким путем был открыт нейтрон (см. § 92).

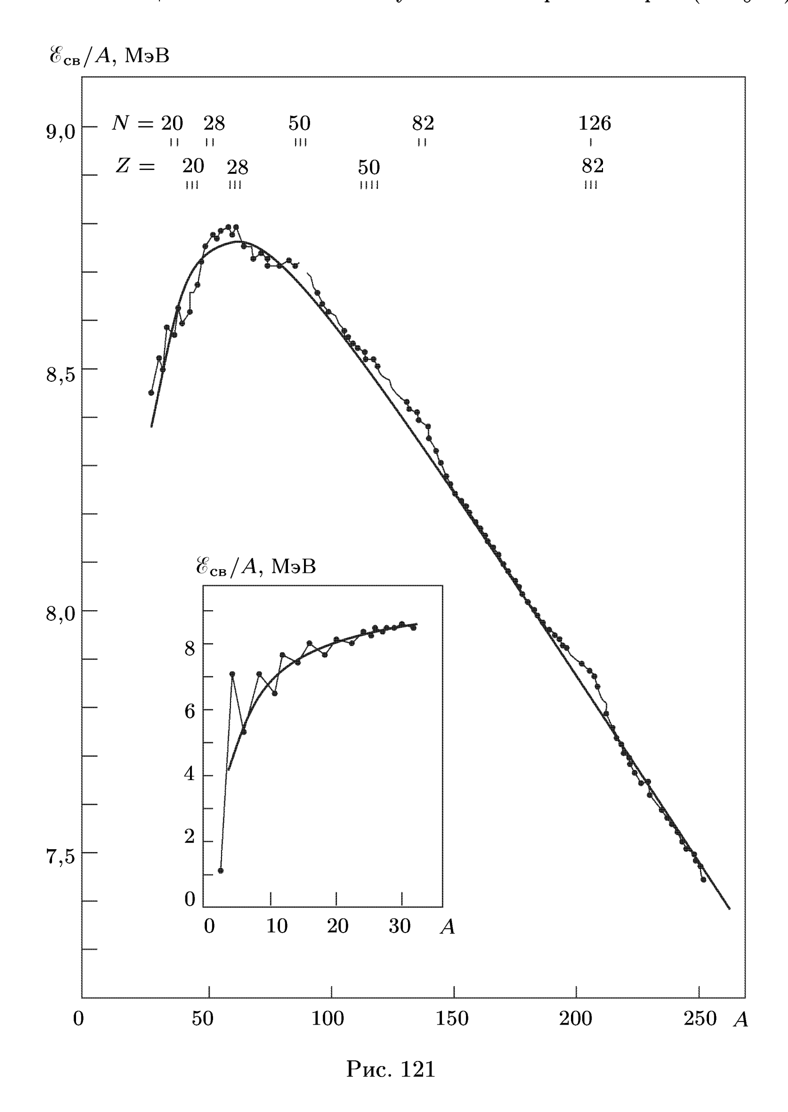


Рис. 121

2. Используя дефекты масс

$$\Delta(1,2) = 13{,}13627\ \text{МэВ}, \quad \Delta(1,3) = 14{,}95038\ \text{МэВ},$$

$$\Delta(2,3) = 14{,}93173\ \text{МэВ},$$

а также дефекты масс, приведенные в тексте, вычислить энергию Q, выделяющуюся в следующих термоядерных реакциях:

1) ${}^2_1\mathrm{D} + {}^2_1\mathrm{D} \to {}^1_1\mathrm{p} + {}^3_1\mathrm{T}$, 3) ${}^2_1\mathrm{D} + {}^3_1\mathrm{T} \to {}^1_0\mathrm{n} + {}^4_2\mathrm{He}$,

2) ${}^2_1\mathrm{D} + {}^2_1\mathrm{D} \to {}^1_0\mathrm{n} + {}^3_2\mathrm{He}$, 4) ${}^3_2\mathrm{He} + {}^2_1\mathrm{D} \to {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_1\mathrm{p}$.

Пренебрегая кинетической энергией частиц до реакции, определить, какую энергию уносит каждая частица после реакции.

Ответ.

1) $Q = 2\Delta(1{,}2) - \Delta(1{,}1) - \Delta(1{,}3) = 4{,}033$ МэВ; протон уносит 3,025 МэВ, ядро трития — 1,008 МэВ;

2) $Q = 3{,}27$ МэВ; нейтрон уносит 2,453 МэВ, ядро гелия ${}^3_2\mathrm{He}$ — 0,817 МэВ;

2) $Q = 17{,}59$ МэВ; нейтрон уносит 14,07 МэВ, ядро гелия ${}^4_2\mathrm{He}$ — 3,52 МэВ;

4) $Q = 18{,}35$ МэВ; протон уносит 14,68 МэВ, ядро гелия ${}^4_2\mathrm{He}$ — 3,67 МэВ.

3. Ядро урана ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ делится на два осколка приблизительно одинаковой массы, расположенные в середине периодической системы элементов. Пользуясь кривой рис. 121, определить приближенно освободившуюся при этом кинетическую энергию.

Решение. В результате деления полное число нуклонов 238 остается неизменным. Как видно из рис. 121, средняя энергия нуклона $\mathscr{E}_{\text{об}}/A = -\mathscr{E}_{\text{св}}/A$ до деления равна $-7{,}6$ МэВ, а после деления $-8{,}5$ МэВ. При делении освобождается кинетическая энергия $-238\cdot 7{,}6 - (-238\cdot 8{,}5) \approx 200$ МэВ.

4. Ядро урана ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ делится на два одинаковых осколка. Пользуясь формулой Вейцзеккера (64.6), вычислить суммарную кинетическую энергию, которую получили бы оба осколка, если бы между ними действовали только кулоновские силы отталкивания.

Ответ.

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} = C_{\text{кул}}\left[Z^2A^{-1/3} - 2\left(\frac{Z}{2}\right)^2\left(\frac{A}{2}\right)^{-1/3}\right] = C_{\text{кул}}Z^2A^{-1/3}(1-2^{-2/3}) =$$

$= 0{,}370\, C_{\text{кул}} Z^2 A^{-1/3} \approx 360$ МэВ. Кинетическая энергия получилась больше, чем в предыдущей задаче. Это связано с тем, что все прочие силы (за исключением кулоновских) при распаде ядра на осколки удерживают их, т. е. производят отрицательную работу. На полученное значение надо смотреть как на грубо ориентировочное, поскольку формула Вейцзеккера не обоснована теоретически, а ее коэффициенты подобраны на основе экспериментальных данных.

5. Показать, что изотопы ${}^5\mathrm{Li}$ и ${}^8\mathrm{Be}$ нестабильны. С их нестабильностью связано отсутствие в природе стабильных изотопов с массовыми числами 5 и 8. Дефекты масс атомов ${}^5\mathrm{Li}$ и ${}^8\mathrm{Be}$ равны соответственно 11,680 и 4,9418 МэВ.

Указание. Для ядра ${}^5\mathrm{Li}$ рассмотреть процесс ${}^5_3\mathrm{Li} \to {}^4_2\mathrm{He} + \mathrm{p}$, а для ядра ${}^8\mathrm{Be}$ — процесс ${}^8_4\mathrm{Be} \to 2\,{}^4_2\mathrm{He}$.

§ 65. Размеры ядра

1. О размерах ядра нельзя говорить с той же определенностью и однозначностью, как это делается в случае макроскопических тел. Наибольшей определенностью характеризуются размеры тяжелых ядер.

Различные методы определения размеров ядер можно разделить на две группы. В одних методах регистрируется наличие ядерного вещества — в них используются явления, обусловленные ядерными

силами (или так называемыми сильными взаимодействиями). В других используются электромагнитные взаимодействия и исследуется распределение электрического заряда в ядре. Обе группы методов приводят к несколько различным результатам. В точных исследованиях необходимо указывать, в каком смысле употребляется понятие размера ядра и какими методами были определены эти размеры. Однако различия между результатами измерений размеров ядра разными методами не так велики. Когда не требуется особая точность, можно не вдаваться в подробности и говорить о «размерах ядра» вообще, не уточняя, о какой величине идет речь.

Если ядро считать сферическим, то все методы определения его радиуса приводят к формуле

$$R = r_0 A^{1/3}. \tag{65.1}$$

Для постоянной r_0 для тяжелых ядер различными методами получаются несколько отличающиеся результаты, но все они лежат в пределах

$$r_0 = (1{,}2 - 1{,}5) \cdot 10^{-13} \text{ см}. \tag{65.2}$$

Заметим, что за единицу расстояний в ядерной физике и физике элементарных частиц удобно принимать *ферми*, равный 10^{-13} см, а за единицу эффективного сечения *барн* (10^{-24} см^2).

Характерная скорость α-частиц, испускаемых радиоактивными ядрами, порядка 10^9 см/с. Время, в течение которого α-частица пролетает диаметр ядра, порядка $T_{\text{яд}} \approx 10^{-13} : 10^9 \approx 10^{-22}$ с. Время порядка 10^{-23}–10^{-24} с принято называть *ядерным временем.*

Ниже рассматриваются некоторые методы определения R и r_0.

2. Верхний предел радиуса ядра можно грубо определить уже из опытов Резерфорда по рассеянию α-частиц на атомных ядрах (см. § 9). Пусть p — импульс α-частицы, m — ее масса, а $\mathscr{E}_{\text{кин}} = p^2/2m$ — кинетическая энергия. Так как при столкновении импульс сохраняется, а ядро до столкновения можно считать неподвижным, то кинетическая энергия после столкновения, связанная с движением центра масс системы, будет $p^2/2(M + m)$, где M — масса ядра. Для тяжелых ядер этой величиной можно пренебречь, т. е. считать, что при упругом столкновении с ядром кинетическая энергия α-частицы не изменяется. В таком случае расстояние R между центрами ядра и частицы, соответствующее максимальному сближению α-частицы с ядром, определится из формулы $\mathscr{E}_{\text{кин}} = 2Ze^2/R$. При численных расчетах величину $\mathscr{E}_{\text{кин}}$ удобно представить в виде $\mathscr{E}_{\text{кин}} = 2eV$, где $2e$ — заряд α-частицы, а V — «ускоряющий потенциал», соответствующий энергии $\mathscr{E}_{\text{кин}}$. Тогда $R = Ze/V$. Для золота $Z = 79$. «Ускоряющий потенциал» α-частицы $V = 5$ МВ $= (5/3) \cdot 10^4$ СГСЭ. В этом случае

$$R = \frac{79 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10}}{(5/3) \cdot 10^4} = 2{,}3 \cdot 10^{-12} \text{ см}.$$

Поскольку для энергии $\mathscr{E}_{\text{кин}} = 5$ МэВ (и даже несколько большей) результаты опытов хорошо согласуются с теоретической формулой

Резерфорда, отсюда следует, во-первых, что сумма радиусов ядра и α-частицы во всяком случае меньше $2 \cdot 10^{12}$ см, во-вторых, что на расстояниях $2 \cdot 10^{12}$ см взаимодействие между α-частицей и ядром чисто электрическое и *подчиняется закону Кулона.*

3. Радиус ядра можно оценить с помощью полуэмпирической формулы Вейцзеккера (64.6). Третий член этой формулы $-C_{\text{кул}}Z^2A^{-1/3}$ связан с кулоновским отталкиванием протонов ядра. Если предположить, что электрический заряд ядра равномерно распределен по его объему, то электрическая энергия ядра будет $(3/5)Z^2e^2/R$. Эта величина должна быть равна $C_{\text{кул}}Z^2A^{-1/3}$. Постоянную $C_{\text{кул}}$ удобно представить в виде $C_{\text{кул}} = eV_{\text{кул}}$, где согласно (64.7) $V_{\text{кул}} = 0{,}71$ МВ = = 2370 СГСЭ. Это дает

$$R = \frac{3}{5}\frac{eA^{1/3}}{V_{\text{кул}}} = r_0A^{1/3},$$

где

$$r_0 = \frac{3}{5}\frac{e}{V_{\text{кул}}} = \frac{3}{5}\frac{4{,}8 \cdot 10^{-10}}{2370} = 1{,}22 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

Очевидно, этим методом измеряется «электрический радиус» ядра, т. е. радиус, обусловленный взаимодействием электрических зарядов. Надо заметить, что непрерывность и равномерность распределения электрического заряда в ядре, использованную в приведенной оценке, следует рассматривать не как предположение, а как *точное определение* того, что следует понимать под «электрическим радиусом» ядра.

Особым изяществом рассматриваемый метод отличается в применении к двум зеркальным ядрам, из которых одно, испытав β-превращение, переходит в другое. Допустим, например, что это есть β^+-превращение (позитронный распад). Пусть Z и $A - Z$ — числа протонов и нейтронов исходного ядра. Тогда после β^+-превращения оно переходит в зеркальное ядро с $Z - 1$ протонами и $A - Z + 1 = Z$ нейтронами. Из последнего соотношения для исходного ядра получается $A - 2Z = -1$, а для зеркального ядра $A - 2(Z-1) = +1$. Поэтому для обоих зеркальных ядер четвертый член в формуле Вейцзеккера (64.6) будет одним и тем же. Последнее слагаемое в той же формуле в обоих случаях равно нулю, так как при β-превращении массовое число A не меняется, а оно, как мы видели, нечетное. Таким образом, энергии связи обоих зеркальных ядер отличаются только третьим слагаемым. Поэтому разность энергий связи конечного и исходного ядра будет

$$\Delta\mathscr{E}_{\text{св}} = -C_{\text{кул}}(Z-1)^2A^{-1/3} + C_{\text{кул}}Z^2A^{-1/3} = C_{\text{кул}}A^{-1/3}(2Z-1) = C_{\text{кул}}A^{2/3}.$$

Измерив $\Delta\mathscr{E}_{\text{св}}$ и зная A можно найти $C_{\text{кул}}$, а затем вышеописанным способом и радиус ядра R. Разумеется, приведенное рассуждение применимо и к зеркальным ядрам, одно из которых испытывает β^--распад (электронный распад).

4. Размеры атомных ядер можно исследовать, изучая рассеяние на ядрах нейтронов, электронов и других элементарных частиц. Для достаточно заметного рассеяния необходимо, чтобы длина дебройлевской волны λ рассеиваемой частицы была того же порядка или меньше, что и диаметр ядра. Выразим это условие через энергию частицы. Исходной является формула $\lambda = h/p$. Будем считать нейтрон нерелятивистским и воспользуемся формулой $\mathscr{E}_{\text{кин}} = p^2/2m$. Из нее в комбинации с предыдущей формулой получается

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{(hc)^2}{2(mc^2)\lambda^2}.$$

Подставив сюда для нейтрона $mc^2 = 939{,}6$ МэВ, а также $hc = 1{,}2399 \times \times 10^{-10}$МэВ $\cdot$ см, получим

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} = \frac{8{,}18}{\lambda^2} \cdot 10^{-24} \text{ МэВ}.$$

Для ультрарелятивистских частиц, к которым относятся быстрые электроны, $\mathscr{E} \approx \mathscr{E}_{\text{кин}} = h\nu$, т. е.

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1{,}2399}{\lambda_{\text{см}}} \cdot 10^{-10} \text{ МэВ}.$$

Если в качестве λ взять $2 \cdot 10^{-12}$ см, то получится для нейтрона $\mathscr{E}_{\text{кин}} \approx 2$ МэВ, а для ультрарелятивистского электрона $\mathscr{E}_{\text{кин}} \approx 60$ МэВ. Таким образом, кинетическая энергия нейтронов должна превосходить 5 МэВ, а электронов — 100 МэВ.

5. Количественное описание производится наглядно с помощью так называемого *эффективного сечения ядра.* Напомним это понятие. Эффективное сечение вводится, в частности, для характеристики ослабления параллельного пучка частиц в результате того или иного процесса. Говорят, например, об эффективном сечении упругого или неупругого рассеяния электрона на атоме, о полном сечении рассеяния электрона на атоме и т. д. Сейчас нас интересует полное ослабление параллельного пучка нейтронов, электронов и других частиц в результате их рассеяния на атомных ядрах. Действие ядра наглядно можно описать так, как если бы оно представляло собой непроницаемую площадку размером σ, перпендикулярную к падающему пучку, которая выводит из пучка падающие на нее частицы. Площадка σ и называется *эффективным сечением* (или просто сечением) ядра. Рассмотрим плоскопараллельный слой толщиной dx и площадью S, перпендикулярный к падающему пучку частиц, равномерно заполненный рассеивающими ядрами. В таком слое содержится $Sn\,dx$ ядер и связанных с ними площадок σ, где n — число ядер в единице объема. Общая площадь таких площадок равна $Sn\sigma\,dx$, причем из-за малости толщины dx площадки можно считать неперекрывающимися. Относительная доля частиц — dN/N, выводимая из пучка при прохождении рассматриваемого слоя, будет

$Sn\sigma\, dx/S = n\sigma\, dx$. Таким образом,

$$\frac{dN}{N} = -n\sigma\, dx, \tag{65.3}$$

и, следовательно,

$$N = N_0 e^{-n\sigma x}. \tag{65.4}$$

Измеряя ослабление интенсивности потока частиц N при рассеянии на ядрах, можно найти эффективное сечение ядра σ.

6. Как же связано полное эффективное сечение σ с размерами ядра в случае падения на него, например, пучка нейтронов? Это, конечно, зависит от энергии нейтронов и от строения ядра. Простейшей является модель непрозрачного ядра. Для ее применимости необходимо, чтобы энергия нейтронов была не особенно велика. В противном случае (например, при энергиях, больших 100 МэВ) ядро, по крайней мере частично, становится прозрачным, поглощая не все падающие на него нейтроны. Однако необходимо наложить на энергию нейтронов еще и противоположное требование. Она должна быть достаточно велика, чтобы длина дебройлевской волны нейтрона была заметно меньше диаметра ядра $2R$. Обоим условиям удовлетворяют быстрые нейтроны с энергией 20 МэВ. Ядро будет поглощать и рассеивать дебройлевские волны так, как черный экран. Для коротких длин волн вблизи ядра применима геометрическая оптика, а потому сечение поглощения будет равно геометрическому сечению ядра πR^2. Но нейтроны выбывают из пучка не только из-за поглощения, но и из-за *дифракционного рассеяния* в стороны. В случае коротких длин волн, указанных выше, дифракция будет фраунгоферовой, так как условие ее применимости

$$x \gg \frac{(2R)^2}{\lambda} \approx \frac{(2\cdot 10^{-12})^2}{0{,}5\cdot 10^{-12}} \approx 8\cdot 10^{-12}\ \text{см},$$

где x — расстояние от ядра до точки наблюдения, для быстрых нейтронов, безусловно, выполняется. Но в случае фраунгоферовой дифракции черный экран рассеивает столько же нейтронов, сколько и поглощает. Это утверждение доказывается в точности так же, как и аналогичное утверждение в оптике (см. задачу к § 41 т. IV). Итак, для полного сечения ядра в рассматриваемой модели можно написать

$$\sigma = 2\pi R^2. \tag{65.5}$$

Измерив σ, можно по этой формуле вычислить R. Опыты с быстрыми нейтронами ($\mathscr{E}_\text{n} \approx 15$–$25$ МэВ) привели к результату $r_0 = 1{,}4 \times 10^{-13}$ см, а с еще более быстрыми ($\mathscr{E}_\text{n} \approx 100$ МэВ и $\mathscr{E}_\text{n} \approx 1000$ МэВ) дали $r_0 = 1{,}37\cdot 10^{-13}$ см и $r_0 = 1{,}28\cdot 10^{-13}$ см. Это указывает на частичную прозрачность ядер для очень быстрых нейтронов.

7. Наиболее точные результаты по измерению размеров ядер получаются при рассеянии быстрых электронов на ядрах. Как показано в п. 4, при энергии электронов порядка 100 МэВ длина дебройлевской волны становится сравнимой с размерами ядер. При длинах волн такого порядка должна отчетливо проявиться дифракция электронов на

ядрах атомов. По угловому распределению быстрых электронов при упругом рассеянии их на ядрах можно судить о размерах ядер. В первых опытах использовались электроны, ускоренные синхротроном до нескольких десятков мегаэлектронвольт. В последующих более точных опытах Хофштадтера (р. 1915) применялись электроны с энергиями до сотен мегаэлектронвольт. В предположении, что электрический заряд равномерно распределен по ядру, обработка результатов измерений дала $r_0 = (1{,}2 - 1{,}3) \cdot 10^{-13}$ см.

Высокая точность опытов по рассеянию быстрых электронов на ядрах ($\mathscr{E} > 500$ МэВ) позволила установить, что электрический заряд неравномерно распределен по объему ядра. Результаты опытов лучше всего согласуются с предположением, что плотность электрического заряда максимальна в центре ядра и для тяжелых ядер монотонно убывает к периферии согласно формуле

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left[(r - R_0)/\delta\right]}, \tag{65.6}$$

где R_0 — расстояние от центра ядра, на котором плотность убывает в два раза по сравнению с ρ_0, а величина $\delta \approx 0{,}55 \cdot 10^{-13}$ см, т. е. одинакова для всех ядер. Для всех исследованных ядер $R_0 = 1{,}08 \times \times 10^{-13} A^{1/3}$ см. Отсюда следует, что в центре ядра ρ_0 практически совпадает с ρ.

8. Как уже указывалось во введении (§ 63), в 1937 г. в космических лучах были открыты *мюоны* — нестабильные частицы со временем жизни $2,2 \cdot 10^{-6}$ с. Они могут быть положительными и отрицательными. Свойства отрицательного мюона аналогичны свойствам электрона. Эти частицы отличаются одна от другой только массой: $m_\mu \approx 207\, m_\mathrm{e}$. Замедляясь в веществе до определенной скорости, отрицательный мюон может захватываться атомом, замещая один из электронов атомной оболочки. Образовавшаяся система называется *мезоатомом.* Так как масса мюона в 207 раз больше массы электрона, то боровский радиус для него в такое же число раз меньше. Он равен $r_{\mu B} = \hbar^2/Z m_\mu e^2$, где m_μ — масса мюона. Таким образом, мюон может очень близко подходить к атомному ядру. Уже при $Z \approx 30$ боровская орбита мюона лежит внутри ядра. Для свинца ($Z = 82$), например, эта формула дает $r_{\mu B} = 3{,}11 \cdot 10^{-13}$ см. При переходе мюона с одного энергетического уровня на другой испускаются жесткие рентгеновские лучи. Их энергию можно измерить и рассчитать теоретически. Результаты вычислений сильно зависят от предположений относительно размеров ядер и поэтому могут служить для определения последних. Особенно точные результаты получаются для тяжелых ядер, поскольку в этих случаях мюон может очень близко подходить к ядру. Например, для свинца получается $r_0 = 1{,}17 \cdot 10^{-13}$ см, а $R(^{207}\mathrm{Pb}) = 1{,}17 \cdot 10^{-13} \times \times 207^{1/3} = 6{,}9 \cdot 10^{-13}$ см.

9. Радиусы α-радиоактивных ядер могут быть найдены по времени их жизни относительно α-распада. Об этом методе сказано в § 73 (п. 11).

10. До открытия нейтрона общепринятой считалась *электронно-протонная модель ядра*, согласно которой ядро состоит из A протонов и C электронов, так что зарядовое число равно $Z = A - C$. Малые размеры ядер являются сильной аргументацией против такой модели. Действительно, возьмем, например, ядро с радиусом $R = 3 \cdot 10^{-13}$ см, т. е. с диаметром $2R = 6 \cdot 10^{-13}$ см. Если бы частица (протон, нейтрон или электрон) находилась внутри ядра, то ее импульс p определялся бы там оценочной формулой

$$p = \frac{h}{2R} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-14}\ \text{г} \cdot \text{см/с},$$

а энергия электрона по релятивистской формуле $\mathscr{E} = pc$ была бы равна $3{,}3 \cdot 10^{-4}$ эрг ≈ 200 МэВ. Такого же порядка были бы и энергии электронов внутри других ядер. Среди искусственно получаемых ядер встречаются β-активные ядра всех атомных чисел (за исключением протона). Маловероятно, что энергия β-электрона, вылетевшего из ядра, существенно отличалась бы от его энергии внутри ядра. При β-распаде не наблюдаются электроны с большими энергиями (порядка 100 МэВ). Это противоречит протонно-электронной модели ядра. Электроны, получающиеся при β-распаде, *не содержатся* в исходном ядре, а *образуются* в результате этого процесса.

Совсем иначе обстоит дело с протонами и нейтронами. Энергию каждой из таких частиц можно оценить по нерелятивистской формуле $\mathscr{E} = p^2/2m$, где m — масса протона или нейтрона. Подстановка числовых значений дает $\mathscr{E} \approx 10^{-5}$ эрг ≈ 6 МэВ. Это — разумный результат, так как средняя энергия связи в ядре на один нуклон составляет около 8 МэВ. Таким образом, протоны н нейтроны могут содержаться и действительно содержатся в ядре.

Приведенное здесь возражение против нахождения электронов внутри ядра неприменимо к частицам, масса которых составляет несколько десятых масс нуклона, например к π-мезонам или кваркам.

Современные эксперименты по глубоко неупругому рассеянию мюонов на ядрах (т. е. рассеянию с большим изменением импульса мюона и рождением вторичных частиц) свидетельствуют о том, что в ядре могут содержаться *кварковые ассоциации*, более тяжелые, чем нуклоны.

§ 66. Спин ядра и сверхтонкая структура спектральных линий

1. Существование спина, т. е. собственного момента импульса ядра, и связанного с ним магнитного момента было постулировано Паули в 1928 г. для объяснения так называемой *сверхтонкой структуры спектральных линий*. Спектроскопическое изучение этого явления дало первое доказательство справедливости гипотезы Паули.

Как было показано в § 40, так называемая *тонкая структура*, т. е. мультиплетность спектральных линий, объясняется спин-орбитальным

взаимодействием электронов, точнее, взаимодействием магнитных орбитальных моментов электронной оболочки атома с ее спиновыми магнитными моментами. У щелочных металлов, имеющих один валентный электрон, мультиплетная структура наиболее проста: спектральные линии у них двойные — *дублеты.* Для разрешения дублетной структуры в случае лития требуются приборы высокой разрешающей силы (большие дифракционные решетки, интерференционные спектроскопы). У остальных щелочных металлов дублетная структура легко разрешается уже небольшими призменными спектроскопами. У натрия расстояние между компонентами резонансного дублета (D_1, D_2) составляет 0,6 нм, а у цезия оно доходит до 42 нм. В последнем случае по внешнему виду спектр уже не напоминает «тонкую структуру». Только по ряду дополнительных признаков удается установить, что указанные две линии цезия являются дублетом одной и той же спектральной серии, а не одиночными линиями различных спектральных серий.

Оказалось, что сами компоненты тонкой структуры испытывают дальнейшее расщепление, которое не может быть истолковано как результат спин-орбитального взаимодействия электронов электронной оболочки атома. Такое расщепление и получило название сверхтонкой структуры.

Сверхтонкая структура в оптических спектрах была открыта Майкельсоном в 1891 г. с помощью его интерферометра. Фабри и Перо, а затем Луммер (1860–1925) и Герке (1878–1960), используя предложенные и сконструированные ими интерферометры, продолжили первые наблюдения этого явления. Оказалось, что некоторые спектральные линии состоят из нескольких (иногда до 10 и более) тесно расположенных компонент. Расстояния между компонентами обычно не превышают 0,01–0,02 нм. Уже к 1910 г. был накоплен значительный экспериментальный материал. Его осмысливание стало возможным только после создания квантовой теории Бора и введения упомянутой выше гипотезы Паули.

Большое значение для выяснения природы явления имело установление сверхтонкой структуры компонент двойной желтой D-линии натрия. Эта структура была открыта в 1928 г. независимо друг от друга А.Н. Терениным (1896–1967) и Л.Н. Добрецовым, с одной стороны, и Шюлером — с другой. Они нашли, что каждая компонента дублета натрия (D_1, D_2) в свою очередь представляет дублет с расстоянием между составляющими около 0,002 нм, которое примерно в 300 раз меньше расстояния между самими линиями D_1 и D_2 (0,6 нм). Такая структура может быть разрешена спектральными приборами с разрешающей силой не менее 300 000. Дальнейшее изучение сверхтонкой структуры потребовало разрешающей силы порядка нескольких миллионов, а ее могут дать только интерференционные спектральные приборы.

Первые измерения спинов и магнитных моментов ядер были первоначально получены при изучении сверхтонкой структуры спектральных линий. Этот метод отличался небольшой точностью и утратил свое значение. Все последующие точные сведения о спинах и магнитных

моментах ядер были получены методом *ядерного магнитного резонанса* (см. § 42). Но мы подробно остановимся и на методе, основанном на явлении сверхтонкой структуры, поскольку это явление само по себе представляет большой физический интерес.

2. Экспериментальное исследование сверхтонкой структуры — очень трудная задача. Разрешающей способности самого распространенного интерференционного спектрального прибора — интерферометра Фабри–Перо — с избытком достаточно для разрешения компонент сверхтонкой структуры. Главная трудность связана с тем, что расстояние между компонентами сверхтонкой структуры исследуемой спектральной линии перекрывается *шириной самой линии.* Естественная ширина спектральной линии, обусловленная затуханием или обрывом колебаний, порядка десятитысячных долей нанометра, т. е. на порядок меньше самого сверхтонкого расщепления. Однако к естественной ширине добавляется еще *доплеровское уширение*, которое даже при низких температурах увеличивает ширину линии примерно в 10 раз и тем самым делает невозможным разделение компонент сверхтонкой структуры (см. т. IV, § 89). Например, для разрешения сверхтонкой структуры D-линий натрия потребовалось бы охлаждение источника света до температуры порядка 5 K, что практически невозможно. Для преодоления указанной трудности Теренин и Добрецов использовали в качестве источника света пучок возбужденных атомов, движущихся приблизительно в одном определенном направлении. Доплеровское изменение частоты

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c}\cos\theta \tag{66.1}$$

зависит от угла между скоростью атома v и направлением наблюдения. Если наблюдать под углом $\theta = 90°$, то в случае параллельного пучка возбужденных атомов доплеровское уширение исчезнет. Конечно, атомный пучок в действительности всегда немного расходится. Но соответствующим расположением щелей удается снизить «эффективную скорость» $v\cos\theta$ в 10–30 раз по сравнению со скоростью v. Таким образом, удается добиться необходимого ослабления доплеровского уширения. Теренин и Добрецов применяли боковое освещение пучка атомов резонансной D-линией натрия. При поглощении света атомы пучка переходили в возбужденное состояние и начинали светиться. Бóльшая интенсивность свечения получается при возбуждении атомов пучка электронными ударами. Применение электронов допустимо из-за их малой массы, так как по этой причине электроны несут малые импульсы, а потому при неупругих столкновениях с атомами пучка практически не меняют направление их движения.

3. Гипотеза Паули, упомянутая выше, предполагает, что сверхтонкая структура спектральных линий возникает из-за взаимодействия магнитного момента ядра с магнитным полем, создаваемым электронной оболочкой (орбитальным и спиновым моментами электронов). Кроме того, у ядра может быть электрический квадрупольный момент,

а также электрические и магнитные мультиполи более высоких порядков, взаимодействующие с электронной оболочкой. Эта гипотеза полностью оправдалась. Основное значение имеет *магнитный дипольный момент ядра* $\mu_{\text{яд}}$. Взаимодействие магнитного момента ядра атома с магнитным полем окружающей его электронной оболочки приводит к расщеплению энергетических уровней атома, с чем главным образом и связана сверхтонкая структура энергетических уровней и спектральных линий. В некоторых случаях для получения полного согласия с опытом необходимо учитывать наличие *электрического квадрупольного момента*, но мы здесь этого делать не будем.

По гипотезе Паули ядро обладает также *собственным моментом* импульса $\mathbf{I}$, который складывается из спиновых и орбитальных моментов импульсов протонов и нейтронов, из которых построено атомное ядро. Величина $\mathbf{I}$ носит название *спинового момента ядра.* Спиновый момент ядра квантуется согласно общим правилам квантования (см. § 31). Если за единицу момента ядра принять постоянную Планка $\hbar$, то его проекция на избранное направление (определяемое внешним магнитным полем) может принимать только дискретные значения: 0, ±1, $\pm2, \ldots$ или $\pm1/2$, $\pm3/2$, $\pm5/2, \ldots$ Максимальное значение этой проекции принято обозначать через I и называть *спином ядра.* Его никоим образом нельзя смешивать с длиной $|\mathbf{I}|$ самого вектора $\mathbf{I}$. Полная длина вектора $\mathbf{I}$ определяется правилом квантования квадрата момента импульса

$$\mathbf{I}^2 = I(I+1). \tag{66.2}$$

Например, спин протона равен $1/2$, тогда как длина вектора спина протона (в единицах $\hbar$) равна $\sqrt{(1/2)(1/2+1)} = \sqrt{3}/2$. Таким образом, когда говорят о спине ядра (или любой другой частицы), то всегда имеют в виду *максимальное значение*, которое может принимать проекция вектора $\mathbf{I}$ на избранное направление. Такова установившаяся традиция. Быть может, она не вполне целесообразна, поскольку есть опасение смешивания величин I и $|\mathbf{I}|$. Однако этого можно не опасаться, если правильно понимать правила квантования момента импульса в квантовой механике. (Исторически понятие спина было введено до создания квантовой механики, т. е. в духе теории Бора, где длина вектора момента импульса отождествлялась с максимальным значением его проекции.) Отличие I от $|\mathbf{I}|$ связано с наличием у вектора $\mathbf{I}$ поперечной к избранному направлению компоненты, длина которой имеет определенное значение, но ее направление остается неопределенным (за исключением случая $\mathbf{I} = 0$, когда все три компоненты вектора $\mathbf{I}$ равны нулю).

Магнитный дипольный момент ядра связан с его спиновым моментом соотношением

$$\mu_{\text{яд}} = g_{\text{яд}} I, \tag{66.3}$$

где $g_{\text{яд}}$ — скаляр, называемый *ядерным гиромагнитным отношением.* Малость сверхтонкого расщепления спектральных линий приводит

к заключению, что магнитные моменты ядер по порядку величины примерно в 1000 раз меньше магнитного момента электрона, т. е. магнетона Бора μ_B. Естественной единицей магнитного момента ядра является *ядерный магнетон* μ_N, определяемый соотношением

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_\text{p}c} = 3{,}1524915(53)\cdot 10^{-18}\ \text{МэВ/Гс}. \tag{66.4}$$

Это такое же соотношение, каким определяется магнетон Бора μ_B. Только масса электрона в нем заменена массой протона, поэтому

$$\frac{\mu_N}{\mu_B} = \frac{m_\text{e}}{m_\text{p}} \approx \frac{1}{1836}.$$

4. Для наглядного объяснения сверхтонкой структуры применяется векторная модель, вполне аналогичная той, которая использовалась в § 40, 41 для объяснения тонкой структуры и эффекта Зеемана. Из-за малости магнитного момента ядра воздействие его на электронную оболочку атома не нарушает связи между ее орбитальным $\mathbf{L}$ и спиновым $\mathbf{S}$ моментами. Они складываются в полный момент импульса оболочки $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. В свою очередь спиновый момент ядра $\mathbf{I}$ складывается с моментом $\mathbf{J}$ в полный момент импульса атома $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$. При отсутствии внешних воздействий на атом все изменения векторов $\mathbf{F}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ во времени сводятся к их прецессии, при которой длины всех трех векторов остаются неизменными; вектор $\mathbf{F}$ сохраняется по модулю и направлению, а векторы $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$ прецессируют вокруг него с одной и той же угловой скоростью (поскольку $\mathbf{F}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ в любой момент лежат в одной плоскости). При наличии внешнего (по отношению к атому) постоянного магнитного поля, если только последнее достаточно слабое, вектор $\mathbf{F}$ медленно прецессирует вокруг этого поля, а векторы $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$ более быстро прецессируют вокруг $\mathbf{F}$. Разумеется, это только классическая аналогия, так как в квантовом рассмотрении вектор момента не имеет определенного направления.

Взаимодействие между электронной оболочкой и ядром атома, вызывающее сверхтонкую структуру спектральных линий, обусловлено наличием у ядра не только магнитного дипольного момента, но и наличием электрического квадрупольного момента, а также электрических и магнитных моментов высшей мультипольности. Основное значение имеет магнитный дипольный момент ядра $\boldsymbol{\mu}_\text{яд}$, который только и учитывается в последующих рассуждениях. В этом приближении энергия взаимодействия ядра с электронной оболочкой атома — чисто магнитная и равна

$$W = -(\boldsymbol{\mu}_\text{яд}\mathbf{B}_\text{об}),$$

где $\mathbf{B}_\text{об}$ — магнитное поле, создаваемое электронной оболочкой атома в месте нахождения ядра. Векторы $\mathbf{B}_\text{об}$ и $\mathbf{J}$ пропорциональны между собой и ввиду отрицательности заряда электрона направлены противоположно. Магнитный момент ядра $\boldsymbol{\mu}_\text{яд}$ совпадает по направлению с вектором $\mathbf{I}$ и также пропорционален ему. Поэтому энергия W может

быть представлена в виде

$$W = A(\mathbf{I}\,\mathbf{J}), \tag{66.5}$$

где A — постоянная магнитного взаимодействия ядра с электронной оболочкой атома, пропорциональная магнитному моменту ядра. Из формулы $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$ возведением в квадрат получаем $\mathbf{F}^2 = \mathbf{J}^2 + \mathbf{I}^2 + 2(\mathbf{I}\,\mathbf{J})$. С использованием правила квантования квадрата момента отсюда находим $(\mathbf{IJ})$, а затем и энергию W:

$$W = \frac{A}{2}\,[F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)], \tag{66.6}$$

где F означает квантовое число, определяющее максимальное значение проекции вектора $\mathbf{F}$. Формула (66.6) — основная формула в теории сверхтонкой структуры энергетических уровней, обусловленной магнитным моментом ядра.

Таким образом, наличие магнитного момента у ядра приводит к тому, что каждый энергетический уровень атома, каким он был бы в кулоновском электрическом поле ядра, получает добавочную энергию W, определяемую выражением (66.5). При фиксированных значениях J и I эта энергия зависит от угла между векторами $\mathbf{J}$ и $\mathbf{I}$. Действительно, этот угол определяет длину вектора $\mathbf{F}$, а с ней, согласно формуле (66.6), и добавочную энергию W. В зависимости от указанного угла квантовое число F может принимать следующие значения:

$$F = I + J, |I + J - 1|, \ldots, |I - J|. \tag{66.7}$$

Если $I \leqslant J$, то число значений числа F будет $2I + 1$, а если $I \geqslant J$, то их будет $2J + 1$. В результате в первом случае энергетический уровень расщепится на $2I + 1$, а во втором — на $2J + 1$ подуровней. Это и есть сверхтонкая структура энергетических уровней.

5. В спектральном приборе, конечно, наблюдается сверхтонкая структура не энергетических уровней, а *спектральных линий.* Каждая же спектральная линия сверхтонкой структуры возникает в результате перехода атома с одного подуровня на другой. Допустимые переходы определяются правилами отбора. Одно из них определяет возможные значения ΔF:

$$\Delta F = 0, \pm 1 \quad (\text{кроме } F_1 = 0 \to F_2 = 0). \tag{66.8}$$

Невозможность перехода, указанного в скобке, подробно объяснена в § 39. В том же параграфе установлено, что излучательные переходы в оптической области спектра практически никогда не сопровождаются изменением вектора спина $\mathbf{S}$ электронной оболочки атома. Рассуждения, приведенные там, ввиду малости ядерных магнитных моментов еще в большей мере справедливы для спинов ядер. Поэтому при излучательных переходах атома практически всегда должен сохраняться спин ядра. Однако спин ядра $\mathbf{I}$ связан со спином $\mathbf{J}$ электронной оболочки. Если $I \leqslant J$, то сохранение ядерного спина означает, что при излучательных квантовых переходах сохраняются все проекции вектора $\mathbf{I}$ на

направление вектора **J**. (Эти проекции, измеренные в единицах $\hbar$, обозначаются ниже через I_J.) Ввиду этого при $I \leqslant J$ каждая спектральная линия расщепляется на столько же компонент, что и уровень энергии, т. е. на $2I + 1$.

Рисунок 122 поясняет последнее утверждение. На нем слева без учета сверхтонкой структуры представлены два уровня энергии J_1 и J_2, между которыми возможен переход с испусканием света определенной длины волны. Справа изображена сверхтонкая структура обоих уровней. Число подуровней сверхтонкой структуры для обоих уровней одно и то же. Оно определяется только спином ядра и равно $2I + 1$. Допустимы только переходы между подуровнями с одинаковыми значениями I_J. Поэтому число переходов, а с ним и число сверхтонких компонент спектральной линии, будет $N = 2I + 1$. Сосчитав это число, найдем спин ядра I. В нашем примере $N = 5$, а потому $I = 2$.

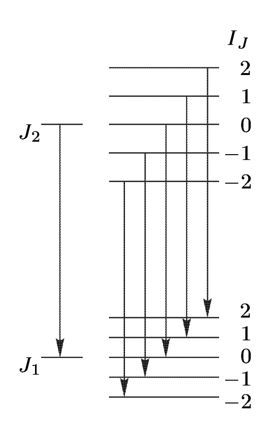


Рис. 122

6. При $I > J$ изложенный способ определения спина ядра неприменим, так как тогда число сверхтонких компонент, на которые расщепляется спектральная линия, уже не равно $2I + 1$. Однако изучение сверхтонкой структуры спектральных линий дает еще два способа определения спина ядра, которыми и можно воспользоваться. Оба способа предполагают, что квантовое число J известно. Оно может быть найдено при изучении спектра атома без учета сверхтонкой структуры.

Один из способов основан на так называемом *правиле интервалов* для мультиплетов сверхтонкой структуры. Это правило получается следующим образом. Все подуровни, на которые расщепляется тот или иной одиночный уровень, характеризуются одними и теми же значениями квантовых чисел I и J, но различными значениями квантового числа F, соответствующими всем допустимым значениям угла между векторами **I** и **J**. Расстояния между соседними подуровнями с квантовыми числами $F + 1$ и F, согласно формуле (66.6), равны

$$W_{F+1} - W_F = (A/2)[(F+1)(F+2) - F(F+1)] = A(F+1). \quad (66.9)$$

Поэтому частоты переходов между соседними подуровнями с квантовыми числами F, $F + 1$, $F + 2$ удовлетворяют соотношениям

$$\delta\nu_1 : \delta\nu_2 : \delta\nu_3 : \ldots = (F+1) : (F+2) : (F+3) : \ldots \quad (66.10)$$

Это и есть правило интервалов. Измеряя на опыте длины волн соседних линий, можно найти отношения $(F+1) : (F+2) : (F+3) : \ldots$, а затем и квантовое число F. Совпадение значений F, вычисленных различными способами, может служить критерием правильности исходных положений, из которых были получены формулы (66.6) и (66.10).

Напомним, что при неизменных I и J квантовое число F может принимать значения, перечисленные в (66.7). Все эти значения можно

определить с помощью правила интервалов. Наибольшее из них равно $F_{\text{макс}} = I + J$. По этой формуле и может быть вычислен спин ядра I, поскольку квантовое число J должно предполагаться известным. Этот метод пригоден как при $I \leqslant J$, так и при $I \geqslant J$.

7. Очевидно, для применимости метода интервалов необходимо, чтобы число интервалов между сверхтонкими компонентами спектральной линии, а следовательно, и число самих компонент было не менее двух. Для этого число подуровней, на которые расщепляется энергетический уровень, должно быть не менее трех. Если это условие не выполняется, то можно воспользоваться третьим методом, основанным на сравнении относительных интенсивностей компонент сверхтонкой структуры, на которые расщепляются спектральные линии.

Интенсивности спектральных линий существенно зависят от *кратностей вырождения энергетических уровней*, между которыми происходят квантовые переходы. При неизменных квантовых числах I и J уровень определяется углом между векторами $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$, т. е. значением квантового числа F. Во внешнем магнитном поле (если только оно не настолько сильное, что связь между $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$ не разрывается) поведение атома определяется полным моментом $\mathbf{F}$, а не моментами $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$ в отдельности. Момент же $\mathbf{F}$ может ориентироваться во внешнем поле $2F + 1$ способами, поскольку при заданном F проекции вектора $\mathbf{F}$ на направление поля могут принимать только следующие значения: $-F, -(F-1), \ldots, +(F-1), +F$. Число возможных проекций $2F+1$ и есть кратность *вырождения* уровня с квантовым числом F. Интенсивность спектральной линии, излучаемой с уровня F или на него, при прочих равных условиях пропорциональна кратности вырождения уровня $2F + 1$.

Метод сравнения интенсивностей дает меньшую точность, чем первые два метода. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только случая, когда он необходим (т. е. случая, когда неприменимы первые два метода). Идея метода полностью выясняется на примере вычисления спина ядра натрия из сверхтонкой структуры компонент дублета натрия (D_1, D_2), исследованной Терениным и Добрецовым.

На рис. 123 *а* воспроизведено уже рассмотренное в § 40 происхождение тонкой структуры двойной желтой линий натрия (D_1, D_2). Нижний уровень $3^2s_{1/2}$ — синглетный. Следующий уровень $3p$ из-за наличия спина электрона расщеплен на два подуровня $3^2p_{1/2}$ и $3^2p_{3/2}$. Переходы между этими подуровнями и одиночным уровнем $3^2s_{1/2}$ и дают спектральные линии тонкой структуры D_1 и D_2. На соседнем рис. 123 *б* показано расщепление уровня $3^2s_{1/2}$ на два из-за наличия магнитного момента у ядра и соответствующее сверхтонкое расщепление линии D_1 на две компоненты. Расщепление подуровня $3^2p_{1/2}$ из-за его малости в опытах Теренина и Добрецова не было разрешено и не показано на рисунке. (На самом деле каждый из этих подуровней имеет тонкую структуру, определяющую статистический вес неразрешенного подуровня.) Обозначим через F полный момент импульса атома для верхнего подуровня $3^2s_{1/2}$. Тогда из-за противоположной ориентации

спина ядра та же величина для нижнего подуровня $3^2s_{1/2}$ будет $F - 1$. Следовательно, статистические веса указанных подуровней равны соответственно $2F + 1$ и $2(F - 1) + 1 = 2F - 1$, а отношение интенсивностей рассматриваемых сверхтонких компонент спектральной линии $(2F + 1) : (2F - 1)$. По измерениям Теренина и Добрецова это отношение оказалось равным 1,7, т. е.

$$\frac{2F+1}{2F-1} = 1{,}7.$$

Отсюда $F = 1{,}929$. А так как число F может принимать только целые и полуцелые значения, то с учетом неизбежных экспериментальных ошибок следует положить $F = 2$. Значит, спин ядра натрия равен $I = F - J = 2 - 1/2 = 3/2$.

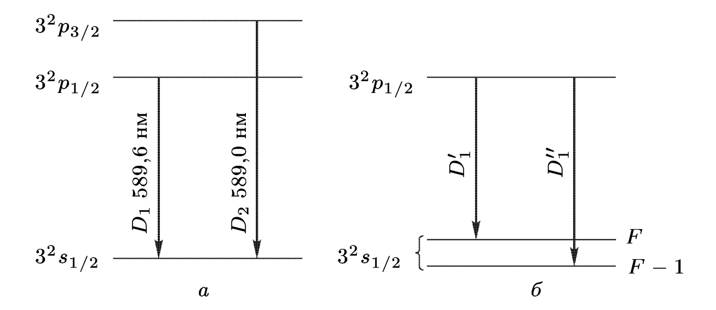


Рис. 123

8. Знание спина ядра натрия позволяет нарисовать детальную схему сверхтонкого расщепления энергетических уровней и спектральных линий для этого элемента. Уровни $^2S_{1/2}$ и $^2P_{1/2}$ должны расщепиться каждый на два подуровня, так как в этом случае $J = 1/2$, а потому квантовое число F может принимать два значения: $F = I - 1/2 = 1$ и $F = I + 1/2 = 2$ (рис. 124 *а*). Уровень $^2P_{3/2}$ должен расщепиться на четыре подуровня, так как при $J = 3/2$ возможны четыре значения числа F: $F = I + J = 3$, $F = I + J - 1 = 2$, $F = I + J - 2 = 1$, $F = I + J - 3 = 0$ (рис. 124 *б*). (Как уже указывалось, в опытах Теренина и Добрецова расщепление p-уровней из-за его малости разрешено не было.) На рис. 124 в соответствии с правилом отбора (66.8) изображены возможные переходы (без соблюдения масштаба). Внизу приводится наблюдаемая картина сверхтонкого расщепления линий. Об относительной интенсивности компонент дают представление длины вертикальных отрезков, изображенных под соответствующими квантовыми переходами. (В этом случае масштаб на правом рисунке выбран примерно вдвое меньше, чем на левом.)

После установления схемы уровней становится понятным, почему для нахождения спина ядра мы воспользовались третьим методом. Дело в том, что единственным уровнем, сверхтонкое расщепление которого может быть установлено на опыте с достаточной точностью, является

уровень $3^2S_{1/2}$. Но он расщепляется всего на два подуровня, а этого недостаточно для применения правила интервалов. Метод подсчета числа

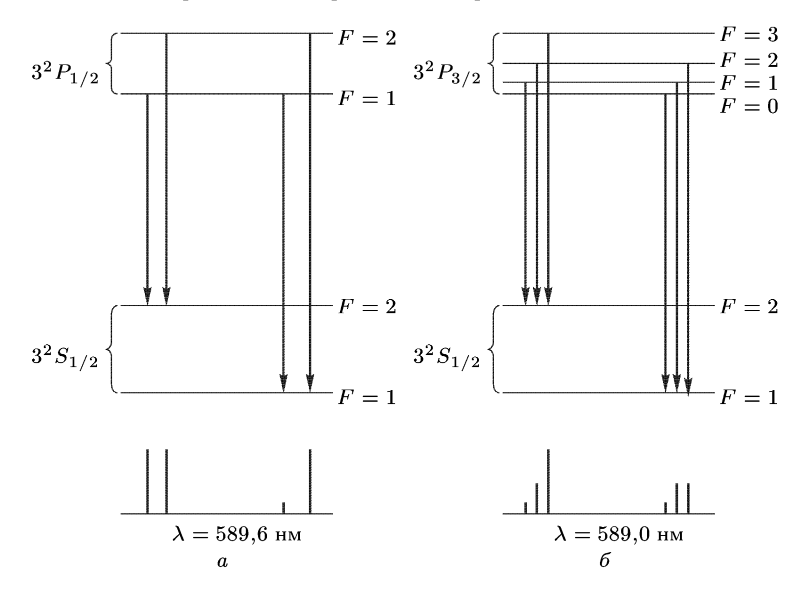


Рис. 124

сверхтонких компонент спектральной линии неприменим потому, что для натрия $I = 3/2$, а $J = 1/2$, т. е. $I > J$. Можно было бы применить правило интервалов, исследовав на опыте расщепление уровня $3^2P_{3/2}$ на четыре подуровня, но расщепление в этом случае мало и трудно поддается экспериментальному измерению. Приме́ним также и первый способ, так как для уровня $3^2P_{3/2}$ спин $I = J = 3/2$.

9. Квантовое число F может принимать только целые или полуцелые значения, и притом небольшие. Поэтому стоящие в правой части формулы (66.10) отношения $(F + 1) : (F + 2) : \ldots$ являются отношениями небольших целых чисел. Экспериментально измеренные отношения между сверхтонкими компонентами спектральных линий отнюдь не являются таковыми. Они должны быть аппроксимированы отношениями небольших целых чисел. Но при выводе правила интервалов учитывалось только магнитное дипольное взаимодействие ядра с электронной оболочкой атома. По этой причине правило интервалов может оказаться неточным. Аппроксимация, указанная выше, если формально руководствоваться только соображениями точности, может быть произведена не в ту сторону, что приведет к ошибке в определении спина ядра. Поэтому определение спина ядра по правилу интервалов должно контролироваться другими методами.

В качестве примера рассмотрим висмут, на котором исторически впервые была подтверждена теоретическая схема сверхтонкой структуры. У висмута тщательно исследована сверхтонкая структура большо-

го числа линий, однозначно сводимая к расщеплению энергетических уровней на подуровни. На рис. 125 представлена схема сверхтонкого расщепления уровней висмута $^2S_{1/2}$ и $^2D_{3/2}$, в результате переходов между которыми возникает линия $\lambda = 472{,}2$ нм. Уровень $^2S_{1/2}$ расщепляется на два, а уровень $^2D_{3/2}$ — на четыре подуровня. Так как для первого уровня $J = 1/2$, а для второго $J = 3/2$, то в обоих случаях число подуровней равно $2J + 1$. Поэтому $I \geqslant 3/2$ и приходится применять метод интервалов. По экспериментальным измерениям интервалы между подуровнями уровня $^2D_{3/2}$ равны 0,152, 0,198 и 0,255 см$^{-1}$. Если $F_{\text{мин}}$ — минимальное квантовое число, которым характеризуются подуровни, то в силу (66.10) должно быть

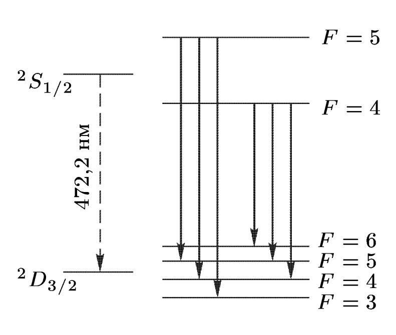


Рис. 125

$$(F_{\text{мин}} + 1) : (F_{\text{мин}} + 2) : (F_{\text{мин}} + 3) \approx 152 : 198 : 255.$$

Но это отношение приближенное и должно быть аппроксимировано отношением небольших целых чисел. Если руководствоваться чисто арифметическими соображениями, то следовало бы взять $3 : 4 : 5$. Можно также взять $4 : 5 : 6$, хотя арифметически это и менее точно. В первом случае получилось бы $F_{\text{мин}} = 2$, $F_{\text{макс}} = 2 + 3 = 5$. Так как $F_{\text{мин}} = I - 3/2$, а $F_{\text{макс}} = I + 3/2$, то спин ядра определится из пропорции

$$\frac{I - 3/2}{I + 3/2} = \frac{2}{5},$$

откуда $I = 7/2$, что не согласуется с величиной, найденной по расщеплению сверхтонких компонент во внешнем магнитном поле (эффект Зеемана, см. § 67). Поэтому мы возьмем $4 : 5 : 6$. Тогда $F_{\text{мин}} = 3$, $F_{\text{макс}} = 6$, а для спина получается правильное значение $I = 6 - 3/2 = 9/2$.

Таким образом, подуровни уровня $^2D_{3/2}$ можно занумеровать квантовыми числами $F = 3, 4, 5, 6$, что и сделано на рис. 125. После этого квантовые числа F для подуровней уровня $^2S_{1/2}$ однозначно устанавливаются на основании правила отбора (66.8) и равны 5 и 4, как указано на рис. 125.

10. Мы рассмотрели сверхтонкую структуру энергетических уровней и спектральных линий, предполагая, что рассматриваемый химический элемент состоит всего из одного изотопа. Как изменится картина сверхтонкого расщепления, если элемент, как это бывает в большинстве случаев, представляет собой смесь нескольких изотопов? Спины и магнитные моменты ядер различных изотопов даже одного и того же элемента, вообще говоря, различны. Поэтому изотопы будут отличаться и характером сверхтонкого расщепления. Наблюдаемая картина

усложнится и будет состоять из наложения картин, получающихся от каждого изотопа в отдельности.

11. Отметим в заключение, что в 1951 г. в космическом радиоизлучении была открыта линия $\lambda = 21$ см. Она представляет собой линию сверхтонкой структуры атомарного водорода, находящегося на самом глубоком энергетическом уровне. Этот уровень состоит из двух близких подуровней, между которыми совершаются переходы с испусканием указанной линии. Время жизни атома водорода на верхнем подуровне исключительно велико ($3{,}5 \cdot 10^{14}$ с $\approx 1{,}1 \cdot 10^7$ лет). (Для сравнения напомним, что время жизни в возбужденном состоянии атома, испускающего оптические линии, в обычных условиях всего порядка 10^{-8} с.) Между этими подуровнями совершаются и безызлучательные переходы из-за столкновений между атомами. В облаках межзвездного газа они совершаются за время порядка нескольких сотен лет. Хотя такое время и очень мало по сравнению с 10^7 лет, радиационные переходы с испусканием линии $\lambda = 21$ см все же не полностью подавлены столкновениями. Это возможно благодаря тому, что водород является самым распространенным элементом Вселенной. Исследования космического радиоизлучения с $\lambda = 21$ см играют важную роль в радиоастрономии.

§ 67. Влияние спина ядра на эффект Зеемана

1. В предыдущем параграфе предполагалось, что внешнего магнитного поля нет. Допустим теперь, что атом находится в постоянном однородном внешнем магнитном поле $\mathbf{B}_{\text{внеш}}$. Тогда будет наблюдаться эффект Зеемана. Посмотрим, какое влияние на характер этого эффекта оказывают спин и магнитный момент ядра. Для наших целей достаточно ограничиться наиболее важным случаем, когда поле $\mathbf{B}_{\text{внеш}}$ *сильное*. Это значит, что энергия взаимодействия магнитного момента ядра с магнитным полем электронной оболочки мала по сравнению с энергией взаимодействия магнитного момента оболочки с внешним полем. Магнитное поле электронной оболочки $\mathbf{B}_{\text{об}}$ в месте нахождения ядра легко оценить. Оно довольно велико — порядка 10^5–10^6 Гс. Но зато магнитный момент ядра примерно в тысячу раз меньше магнетона Бора μ_B, тогда как для оболочки он порядка μ_B. Если поле $\mathbf{B}_{\text{внеш}}$ значительно превосходит, например, 1000 Гс, то его следует считать сильным. В общем случае критерий сильного поля можно получить из следующих соображений. Энергия взаимодействия магнитного момента ядра с магнитным полем оболочки порядка $\mu_{\text{яд}} B_{\text{об}} \approx A(IJ)$, тогда как энергия взаимодействия электронной оболочки с внешним полем порядка $\mu_{\text{об}} B_{\text{внеш}} \approx g_{\text{об}} J B_{\text{внеш}}$, где $g_{\text{об}}$ выражено в магнетонах Бора. Поэтому искомый критерий можно записать в виде

$$g_{\text{об}} B_{\text{внеш}} \gg AI. \tag{67.1}$$

Необходимо заметить, что этот критерий более слабый, чем аналогичный критерий в случае эффекта Пашена–Бака (см. § 41).

2. Внешнее магнитное поле разрывает связь между вектором $\mathbf{J}$ и вектором $\mathbf{I}$. Электронная оболочка начинает прецессировать вокруг

направления поля $\mathbf{B}_{\text{внеш}}$. Поскольку связь вектора $\mathbf{I}$ с $\mathbf{J}$ разорвана, вектору $\mathbf{I}$ не остается ничего другого, как совершать независимую прецессию вокруг того же направления. Магнитное квантовое число m_I, определяющее проекции вектора ядерного спина l на направление поля $\mathbf{B}_{\text{внеш}}$, может принимать значения $-I, -(I-1), \ldots, (I-1), I$. Таких значений всего $2I+1$. Поэтому каждый энергетический уровень в магнитном поле расщепляется на $2I+1$ подуровня. Пусть 1 и 2 — какие-либо два энергетических уровня атома в магнитном поле, какими они были бы без учета спина и магнитного момента ядра. Если между уровнями 1 и 2 возможен излучательный переход, то в результате такого перехода в спектре появляется соответствующая зеемановская линия. С учетом спина и магнитного момента ядра каждый из уровней 1 и 2 расщепляется на $2I+1$ подуровней, квантовые переходы между которыми подчиняются правилу отбора $\Delta m_I \approx 0$. Эти переходы приводят к сверхтонкому расщеплению каждой зеемановской линии на $2I+1$ компонент.

Таким образом, в магнитном поле, если отвлечься от наличия спина и магнитного момента ядра, должно наблюдаться обычное (простое или сложное) явление Зеемана. Влияние спина и магнитного момента ядра проявляется наиболее просто, когда поле сильное. В этом случае спин и магнитный момент ядра приводят к дальнейшему — сверхтонкому — расщеплению каждой зеемановской линии на $2I+1$ компонент. Расстояние между ними малы по сравнению с расстояниями между обычными зеемановскими компонентами (т. е. компонентами, какими они получились бы, если бы не было спина и магнитного момента ядра). Сосчитав число сверхтонких зеемановских компонент $2I+1$, можно определить спин ядра I. Этот метод не накладывает никаких ограничений на значение спина I.

3. Вопрос о более детальной структуре зеемановской линии сводится к вычислению энергии атома во внешнем магнитном поле. Если внешнее поле $\mathbf{B}_{\text{внеш}}$ сильное, то магнитная энергия атома слагается из магнитной энергии электронной оболочки

$$-(\boldsymbol{\mu}_{\text{об}}\mathbf{B}_{\text{внеш}}) \text{ и ядра } -(\boldsymbol{\mu}_{\text{яд}}\mathbf{B}_{\text{внеш}}) - (\boldsymbol{\mu}_{\text{яд}}\mathbf{B}_{\text{об}}).$$

Первое слагаемое в обсуждаемом нами вопросе не играет существенной роли, так как оно вызывает обычное зеемановское расщепление, уже изученное нами. Его можно отбросить. Что касается второго слагаемого, то им можно пренебречь, так как в обычных условиях $\mathbf{B}_{\text{внеш}} \ll \mathbf{B}_{\text{об}}$. Остается только слагаемое $-(\boldsymbol{\mu}_{\text{яд}}\mathbf{B}_{\text{об}})$, которое и следует учесть. Это слагаемое выражается прежней формулой (66.5). Однако при наличии сильного внешнего магнитного поля вектор $\mathbf{I}$ квантуется иначе, чем в случае свободного атома, поскольку он прецессирует не вокруг $\mathbf{J}$, а вокруг $\mathbf{B}_{\text{внеш}}$. Прецессирующие векторы $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$ имеют определенные проекции только на направление поля $\mathbf{B}_{\text{внеш}}$. Они определяются магнитными квантовыми числами m_I и m_J. Перпендикулярные проекции остаются неопределенными. А поскольку обе прецессии совершаются независимо, среднее по времени произведение перпендикулярных проекций равно нулю. Следовательно, в среднем $(\mathbf{IJ}) = m_I m_J \hbar^2$. Тогда

формула (66.5) переходит в

$$W = Am_I m_J \hbar^2. \quad (67.2)$$

Если теперь (без учета сверхтонкого расщепления) снова рассмотреть два энергетических уровня 1 и 2, при переходе между которыми излучается какая-либо зеемановская линия, то с учетом сверхтонкого расщепления между уровнями возникнут переходы, при которых будет излучаться энергия

$$\delta W = [(Am_I m_J)_2 - (Am_I m_J)_1]\hbar^2 = [(Am_J)_2 - (Am_J)_1]m_I\hbar^2, \quad (67.3)$$

так как в силу правила отбора $\Delta m_I = 0$. В результате таких переходов зеемановская линия и претерпит сверхтонкое расщепление на $2I + 1$ компонент, соответствующих значениям квантового числа $m_I = I$, $(I-1), \ldots, -(I-1), -I$. Расстояния между сверхтонкими компонентами будут одни и те же и равны $[(Am_J)_2 - (Am_J)_1]\hbar^2$.

Описанная картина, в частности, отчетливо наблюдается у висмута на линии 472,2 нм (см. предыдущий параграф, п. 9). В достаточно сильном магнитном поле (порядка 10 000 Гс) получается обычный простой эффект Зеемана. Но каждая зеемановская составляющая состоит из 10 равноотстоящих компонент. Из соотношения $2I + 1 = 10$ получается $I = 9/2$, как и было указано в § 66, п. 9.

§ 68. Измерения спинов и магнитных моментов ядер методом магнитного резонанса. Опытные данные о спинах и магнитных моментах ядер

1. Зная спин ядра, можно по магнитному взаимодействию ядра с электронной оболочкой атома определить и магнитный момент ядра. Вопрос сводится к нахождению постоянной магнитного взаимодействия A, входящей в формулу (66.5). Но эта постоянная, даже для легких атомов, теоретически может быть вычислена с малой погрешностью (не превышающей примерно 10 %). Более надежно спины и магнитные моменты ядер могут быть найдены при исследовании поведения атомных ядер во внешних магнитных полях. Сюда относятся исследования сверхтонкого расщепления зеемановских спектральных линий в таких полях, о чем говорилось в предыдущем параграфе.

Можно также воспользоваться методом Штерна и Герлаха, исследуя отклонения атомных и молекулярных пучков в сильных и резко неоднородных магнитных полях (см. § 36). По числу компонент, на которые расщепляется пучок, можно определить спин, а по значению расщепления — магнитный момент ядра. Однако определение магнитных моментов ядер методом Штерна и Герлаха много труднее, чем магнитных моментов атомов, так как из-за малости магнитных моментов ядер ожидаемое отклонение примерно в тысячи раз меньше, чем у атомов с отличными от нуля магнитными моментами электронных оболочек. Влияние ядер совершенно исчезает на фоне более сильного

эффекта атомных оболочек. Для преодоления возникшей трудности опыты надо производить на атомах с замкнутыми электронными оболочками или с молекулами (например, H_2, H_2O), у которых магнитные моменты электронных оболочек взаимно скомпенсированы. Кроме того, надо создавать резко неоднородные магнитные поля с градиентами порядка 10^5 Гс/см. И даже в этих случаях наблюдаемое расщепление (около 0,05 мм) сравнимо с разбросом из-за максвелловского распределения скоростей. Фактическое расщепление пучка в подобных опытах не наблюдается, и для определения магнитных моментов приходится тщательно исследовать плотность распределения частиц пучка в месте попадания их на детектор. Хотя методом Штерна и Герлаха и удалось измерить магнитный момент протона, но для определения магнитных моментов ядер этот метод в большинстве случаев непригоден.

2. Прецизионную точность (примерно до семи знаков) дает *метод магнитного резонанса*, наблюдаемый как на нейтральных пучках атомов или молекул (со скомпенсированными магнитными моментами), так и методом поглощения. В случае нейтронов можно пользоваться только пучками, так как нейтроны нельзя содержать в ампулах. Магнитный резонанс подробно изложен в § 42, а потому нет необходимости его еще раз излагать здесь. Заметим только, что по числу резонансов можно определить спин, а по резонансным частотам — расстояние между энергетическими уровнями ($\mu_{\text{яд}}B$) и магнитный момент ядра. Методом магнитного резонанса и получены все точные данные о магнитных моментах ядер.

3. Приведем теперь опытные данные относительно спинов и магнитных моментов ядер.

1. Протон и нейтрон, как и электрон, обладают спином, равным 1/2 (в единицах $\hbar$). Полный момент импульса каждого нуклона в ядре складывается из его спинового и орбитального моментов по квантовомеханическому правилу сложения моментов. В свою очередь полный момент ядра $\mathbf{I}$ по тому же правилу складывается из моментов импульса составляющих его нуклонов.

2. При четных A спин ядра I всегда целый, а при нечетных — полуцелый. Исторически этот факт был решающим при переходе от протонно-электронной к протонно-нейтронной модели ядра. В самом деле, например, ядро азота $^{14}_{7}N$, состоящее по протонно-электронной модели из 21 частицы, должно было бы иметь полуцелый спин, поскольку спин каждой частицы равен 1/2, а их орбитальные моменты целочисленны. Экспериментально же измеренный спин ядра азота оказался равным 1. В свое время этот факт получил название «азотной катастрофы». В протонно-нейтронной модели ядра противоречия с опытом не получается, так как по этой модели ядро азота состоит из 7 протонов и 7 нейтронов, т. е. из четного числа частиц, а потому его спин, в согласии с опытом, должен быть целым.

3. Для четно-четных стабильных ядер (Z и N четные) спин всегда равен нулю. К таким ядрам относится больше половины всех стабильных ядер. Почти все остальные стабильные ядра либо четно-нечетные

(Z четное, N нечетное), либо нечетно-четные (Z нечетное, N четное). Ядер указанных типов имеется примерно поровну. Спины всех этих ядер отличны от нуля, так как все они имеют нечетные A. Минимальное значение спина у этих ядер равно 1/2. Нечетно-нечетных стабильных ядер (Z и N нечетные), как уже указывалось в § 64, имеется всего пять (^{2}D, ^{6}Li, ^{10}B, ^{14}N, ^{50}V) [1]. Все они имеют целочисленные спины, отличные от нуля (спин для ^{50}V равен 6, для ^{6}Li — 3, для остальных ядер — 1).

4. Спины всех известных стабильных ядер не превышают 9/2, за исключением ванадия ^{50}V, спин которого равен 6. Таким образом, спины ядер очень малы по сравнению с суммой абсолютных значений спинов и орбитальных моментов всех частиц, входящих в ядро. Наряду с преобладанием четно-четных ядер, отмеченным выше, этот факт указывает на то, что большинство нуклонов в ядре прочно связано в замкнутых оболочках, имеющих нулевой суммарный момент импульса, и не участвует в создании спина ядра.

5. Ядра со спинами $I \geqslant 1/2$ обладают магнитными моментами. Магнитные моменты ядер, о чем уже неоднократно говорилось выше, примерно в тысячи раз меньше магнетона Бора, определяющего магнитный момент электрона. Естественной единицей ядерных магнитных моментов является ядерный магнетон. По определению он в $m_\text{p}/m_\text{e} \approx 1836$ раз меньше магнетона Бора. Магнитные моменты ядер с ненулевыми спинами — порядка ядерного магнетона. Это указывает на то, что магнитные моменты отдельных нуклонов в ядре, как и их угловые моменты, в основном компенсируют друг друга. Малость же магнитных моментов ядер еще раз свидетельствует против наличия в ядре электронов, поскольку магнитный момент электрона в 1836 раз больше ядерного магнетона.

6. Собственные магнитные моменты нуклонов *не аддитивны.* Например, дейтрон состоит из протона и нейтрона, магнитные моменты которых (в ядерных магнетонах) равны $\mu_\text{p} = 2{,}79$, $\mu_\text{n} = -1{,}91$. Если бы эти моменты были аддитивны, то магнитный момент дейтрона был бы равен $\mu_\text{d} = 2{,}79 - 1{,}91 = 0{,}88$, тогда как опыт дает $\mu_\text{d} = 0{,}86$. Это расхождение далеко выходит за пределы погрешностей. Неаддитивность магнитных моментов находит свое истолкование в нецентральности сил, действующих между нуклонами.

§ 69. Четность. Закон сохранения четности

1. Понятие *четности* возникает в связи с операцией *инверсии.* При инверсии относительно начала координат знаки декартовых координат всех частиц системы меняются на противоположные, т. е. x, y, z переходят в $-x, -y, -z$ или $\mathbf{r}$ заменяется на $-\mathbf{r}$. В дальнейшем для

---

[1] Изотоп $^{50}_{23}V$ β^--радиоактивен, но период полураспада для него равен 6×10^{15} лет, т. е. очень велик. По этой причине он и отнесен нами к стабильным изотопам.

сокращения записи под $\mathbf{r}$ обычно будет пониматься радиус-вектор не одной частицы, а совокупность радиус-векторов частиц всей системы. Если же в рассуждении требуется явно указать, что частиц несколько, то мы (также для сокращения записи) ограничимся случаем двух частиц, нумеруя их индексами 1 и 2. Это не вводит никаких ограничений. *Оператор инверсии* обозначается через $\widehat{P}$. Таким образом, по определению $\widehat{P}\psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r})$. Операцию инверсии $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$ можно представить как зеркальное отражение относительно плоскости, проходящей через начало координат, с последующим поворотом на 180° вокруг оси, перпендикулярной к этой плоскости.

Найдем прежде всего собственные значения P оператора $\widehat{P}$. Они определяются уравнением

$$\widehat{P}\psi(\mathbf{r}) = P\psi(\mathbf{r}).$$

Повторное применение оператора $\widehat{P}$ дает

$$\widehat{P}^2\psi(\mathbf{r}) = P\widehat{P}\psi(\mathbf{r}) = P^2\psi(\mathbf{r}).$$

Но оператор $\widehat{P}^2$ есть тождественное преобразование, при котором ничего не меняется. Значит, $\psi(\mathbf{r}) = P^2\psi(\mathbf{r})$, а потому $P^2 = 1$, $P = \pm 1$. Таким образом, собственные значения оператора $\widehat{P}$ будут $+1$ и -1. В соответствии с этим собственные функции оператора $\widehat{P}$ разделяются на *четные* и *нечетные.* Четная функция определяется соотношением $\psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r})$, а нечетная — соотношением $\psi(\mathbf{r}) = -\psi(-\mathbf{r})$. Число P принято называть *четностью* функции $\psi(r)$ или состояния системы. Для четных функций $P = +1$, для нечетных $P = -1$.

2. В уравнении Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \widehat{\mathscr{H}}\Psi \tag{69.1}$$

гамильтониан $\widehat{\mathscr{H}}$ определяется выражением

$$\widehat{\mathscr{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right) + \\ + \frac{\hbar^2}{2m_2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right) + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \tag{69.2}$$

Первые два слагаемых представляют оператор кинетической энергии и не меняются при инверсии, если начало координат поместить в центре масс системы, что и будет делаться в дальнейшем. В этом случае оператор кинетической энергии не меняется при инверсии относительно начала координат, поскольку дифференциалы координат в него входят во второй степени. До 1956 г. считали, что оператор потенциальной энергии $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ при инверсии также никогда не меняется. Действительно, при инверсии не изменяется относительное расположение любой пары частиц системы. Меняется на прямо противоположное только направление соединяющей их прямой. А от этого, как думали, потенциальная

функция системы $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ не претерпевает никаких изменений. После открытия в 1956 г. *несохранения четности в слабых взаимодействиях* было установлено, что это заключение справедливо для электромагнитных и сильных взаимодействий и нарушается для слабых. Таким образом, при сильных и электромагнитных взаимодействиях гамильтониан $\widehat{\mathscr{H}}$ не меняется при инверсии. В этом случае имеет место *закон сохранения четности волновой функции.* Это приближенный закон, справедливый с точностью до слабых взаимодействий.

Закон сохранения четности является следствием уравнения Шредингера (69.1). Действительно, допустим, что в момент времени $t = 0$ волновая функция $\Psi = \Psi_0(\mathbf{r})$ либо четная, либо нечетная. Для приращения $d\Psi$ за время dt уравнение (69.1) дает

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial t}\, dt = \frac{dt}{i\hbar}\, \widehat{\mathscr{H}} \Psi(r),$$

или с точностью до членов более высокого порядка малости

$$d\Psi = \frac{dt}{i\hbar}\, \widehat{\mathscr{H}} \Psi_0(\mathbf{r}).$$

Но гамильтониан $\widehat{\mathscr{H}}$ не меняется при инверсии координат. Значит, функция $\widehat{\mathscr{H}}\Psi_0(\mathbf{r})$, а с ней и функция $\Psi_{dt}(r) \equiv \Psi_0(r) + d\Psi$ обладают той же четностью, что и начальная функция $\Psi_0(\mathbf{r})$. Применяя этот процесс дальше, докажем, что это справедливо и для функции $\Psi_t(\mathbf{r})$ при любом конечном значении времени t.

Доказательство предполагало, что волновая функция $\Psi(\mathbf{r})$ либо четная, либо нечетная. Определенной четностью волновая функция обладает только для невырожденного состояния системы (например, для основного состояния ядра), описываемого единственной собственной волновой функцией (разумеется, определенной с точностью до несущественного фазового множителя $e^{i\delta}$). Во всяком вырожденном состоянии волновая функция в общем случае может быть представлена линейной суперпозицией двух функций, из которых одна четная, а другая нечетная. В таком случае закон сохранения четности означает сохранение относительной доли обоих состояний с определенной четностью. Доказательство, приведенное выше, без всяких затруднений обобщается и на этот случай.

Заметим, что это доказательство основано на уравнении (69.2), а оно не учитывает возможности рождения частиц. Более общее рассмотрение показывает, что с точностью до слабых взаимодействий четность волновой функции системы не меняется при любых процессах (включая рождение и поглощение частиц).

3. Из приведенного нами доказательства видно, что закон сохранения четности есть свойство гамильтониана $\widehat{\mathscr{H}}$, т. е. свойство самой системы, а не функции ψ, характеризующей ее состояние. Поэтому-то из закона сохранения четности, как из всякого закона, можно вывести определенные физические следствия, доступные экспериментальной проверке. В качестве примера в конце этого параграфа мы приводим

вывод правила отбора при излучении по орбитальному квантовому числу l.

4. Важное значение имеет задача определения четности волновой функции системы, состоящей из нескольких составных частей. Допустим для простоты, что система состоит из двух частей A и B. Если можно пренебречь взаимодействием между ними, то волновая функция сложной системы может быть представлена в виде

$$\Psi_{A+B} = \Psi_A \Psi_B \Psi_{l_A} \Psi_{l_B}, \tag{69.3}$$

где Ψ_A и Ψ_B — волновые функции, описывающие внутренние движения подсистем относительно их центров масс, а Ψ_{l_A} и Ψ_{l_B} — движения тех же центров масс относительно центра масс всей сложной системы. Испытание на четность полной волновой функции Ψ_{A+B} сводится к последовательному повторению того же испытания для каждой из четырех функций $\Psi_A, \Psi_B, \Psi_{l_A}, \Psi_{l_B}$ в отдельности. Поэтому для четности всей системы можно написать

$$P_{A+B} = P_A P_B P_{l_A} P_{l_B}. \tag{69.4}$$

Чтобы определить четность сложной системы по четностям составляющих ее подсистем, надо знать явный вид волновых функций Ψ_{l_A} и Ψ_{l_B} для относительного движения центров этих подсистем. Эта задача сводится к нахождению волновой функции частицы при ее движении относительно неподвижного центра. Она решается в квантовой механике. Мы не предполагаем ее решать, а лишь заимствуем необходимые результаты из квантовой механики. В сферической системе координат положение частицы относительно неподвижного центра задается расстоянием до него r, полярным углом θ и азимутальным углом φ. Волновая функция частицы в такой системе имеет вид

$$\Psi_l = R(r) P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi},$$

где l и m — квантовые числа орбитального момента и его проекции на полярную ось, а $P_l^m(\cos\theta)$ — так называемые *присоединенные полиномы Лежандра* (1752–1833).

Явный вид функции $R(r)$, а также присоединенных полиномов Лежандра в рассматриваемой нами задаче не требуется. Достаточно указать, что при замене $\cos\theta$ на $-\cos\theta$ полином $P_l^m(\cos\theta)$ приобретает множитель $(-1)^{l-m}$. При инверсии значение радиуса r не меняется, а углы θ и φ заменяются соответственно на $\pi - \theta$ и $\varphi + \pi$, так что

$$\cos\theta \to \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta, \quad e^{im\varphi} \to e^{im(\varphi+\pi)} = (-1)^m e^{im\varphi}.$$

Поэтому

$$\Psi_l \to R(r)(-1)^{l-m} P_l^m(\cos\theta) \cdot (-1)^m e^{im\varphi} = (-1)^l \Psi_l.$$

Таким образом, четность волновой функции относительного движения равна $P_l = (-1)^l$, а четность системы $A + B$

$$P_{A+B} = (-1)^{l_A}(-1)^{l_B} P_A P_B, \qquad (69.5)$$

если моменты имеют определенные значения. Эта формула тривиально обобщается на случай сложной системы, состоящей из произвольного числа частей.

5. Части A и B, из которых состоит система, могут быть и элементарными частицами с отличной от нуля массой покоя. Как показывает опыт, каждая элементарная частица с точностью до слабых взаимодействий характеризуется определенной четностью, не связанной с ее движением как целого. Такая четность называется *внутренней четностью* частицы. Внутренняя четность — такое же неотъемлемое свойство частицы, как и ее спин. Частицы, у которых внутренняя четность равна $+1$, называются *четными*, а частицы с внутренней четностью -1 — *нечетными*. Правило (69.5), если пренебречь эффектами слабых взаимодействий, распространяется и на системы, состоящие из элементарных частиц (с отличными от нуля массами покоя), но с учетом их внутренних четностей. Внутренние четности протона, нейтрона и электрона могут быть заданы произвольно. Это соглашение и применяется в дальнейшем. Обычно они принимаются равными $+1$. После этого внутренние четности атома, ядра и большинства элементарных частиц однозначно определятся из экспериментальных данных на основе закона сохранения четности.

Атомное ядро является сложной системой, состоящей из движущихся внутри него нуклонов. Если взаимодействием между ними можно пренебречь, то четность ядра будет $(-1)^{\sum l_i}$,где l_i — орбитальное квантовое число, определяющее характер движения i-го нуклона. Состояние нуклона в ядре будет четным, если его орбитальное квантовое число l четное, и нечетным в противоположном случае. Так, протоны и нейтроны в s-состоянии являются четными нуклонами, а в p-состоянии — нечетными. В качестве примера определим четность ядра $^7_3$Li. В модели ядерных оболочек (см. гл. X) показывается, что это ядро в основном состоянии состоит из четырех s-нуклонов и трех p-нуклонов. Поэтому четность такого ядра равна $(-1)^3 = -1$. Напротив, α-частица состоит из четырех нуклонов в s-состоянии — ее внутренняя четность равна $+1$. Опыт показывает, что при энергиях падающего протона, меньших примерно 0,5 МэВ, ядерная реакция

$$\mathrm{p} + {}^7_3\mathrm{Li} \to \alpha + \alpha + 17{,}1\ \text{МэВ},$$

несмотря на ее высокую экзотермичность, подавлена (т. е. идет с малой вероятностью). Дело в том, что четность двух α-частиц равна $+1$. Такова же четность протона при указанных энергиях. Четность же ядра $^7_3$Li равна -1, так что в рассматриваемой реакции закон сохранения четности нарушается.

Основное состояние четно-четных ядер имеет положительную четность. Основные состояния других ядер могут быть как четными,

так и нечетными. Ядра в возбужденных состояниях могут иметь различную четность, не обязательно совпадающую с четностью основного состояния. На схемах ядерных уровней обычно указываются спин и четность каждого уровня. Спин обозначается числом, а четность — знаком «+» или «−». Например, символ 2^+ означает четный уровень со спином 2, а символ $(1/2)^-$ — нечетный уровень со спином 1/2. Совокупность значений спина и четности называется *характером уровня ядра.*

6. Все изложенное относится к частицам с ненулевой массой покоя. Для фотонов, как и для всяких релятивистских частиц с нулевой массой покоя, понятия состояния с определенным значением орбитального момента l не существует. Вместо этого вводится аналог этого понятия, называемый *мультиполем.* Мультиполь электромагнитного поля — это состояние свободно распространяющегося поля, обладающего определенным полным моментом L и определенной четностью P. Для свободного фотона возможны состояния с полным моментом $L = 1, 2, 3, \ldots$ Частный случай $L = 1$ уже был подробно рассмотрен в § 37. Состояния с нулевым полным моментом L для фотона не существует. Состояние фотона с моментом L и четностью $(-1)^L$ называется *электрическим* 2^L*-полем*, а состояние с таким же моментом и четностью $(-1)^{L+1}$ — *магнитным* 2^L*-полем.* Состояние с $L = 1$ называется *дипольным*, с $L = 2$ — *квадрупольным*, с $L = 3$ — *октупольным* и т. д. В соответствии с этим электрический диполь и магнитный квадруполь нечетны, а магнитный диполь и электрический квадруполь — четны. Для обозначения кванта электрического мультиполя ставится буква E, которой приписывается значение полного момента L. В случае кванта магнитного мультиполя буква E заменяется на M. Например, электрический дипольный квант обозначается через $E1$, магнитный дипольный квант — через $M1$, электрический квадрупольный — через $E2$ и т. д.

Мультипольная терминология основана на классическом понятии мультиполя (см. следующий параграф). Так, при колебаниях электрического дипольного момента возникает электромагнитное излучение, которое с квантовой точки зрения состоит из $E1$ фотонов.

Если приведенная длина фотона $\lambdabar \equiv \lambda/2\pi$ много больше размеров R физической системы, с которой он взаимодействует ($R \ll \ll \lambdabar$), то в этом взаимодействии участвуют преимущественно мультиполи наинизшего порядка, допускаемые законами сохранения момента и четности. При прочих равных условиях отношение вероятности испускания (или поглощения) электрического квантового мультиполя 2^L к соответствующей вероятности испускания (или поглощения) кванта $E1$ порядка $(R/\lambdabar)^{2(L-1)}$. В случае испускания (поглощения) магнитного кванта той же мультипольности 2^L то же отношение — порядка $(R/\lambdabar)^{2L}$, т. е. в $(\lambdabar/R)^2$ раз меньше. Поэтому, например, вероятности испускания квантов $E2$ и $M1$ обычно близки между собой. Это связано с тем, что по порядку величины отношение $(R/\lambdabar)^2$ равно $(v/c)^2$, где v — скорость заряженной частицы в системе (например, протона в яд-

ре), а отношение напряженностей электрического и магнитного полей, генерируемых движущимся зарядом, — порядка v/c.

Изложенное в этом пункте в равной степени применимо к мультиполям молекул, атомов, ядер и элементарных частиц. В качестве примера рассмотрим правило отбора (40.1). Оно относится к испусканию (или поглощению) при наличии в атоме одного внешнего (валентного) электрона. Испускаемый электрический дипольный фотон, как мы видели, — нечетный. Четность атома в результате испускания такого фотона меняется на множитель $(-1)^{\Delta l}$, а всей системы «атом — испущенный фотон» — на множитель $(-1)^{\Delta l \pm 1}$. Закон сохранения четности при дипольном излучении допускает только значения $\Delta l = \pm 1$. Значение $\Delta l = 0$ (хотя и допускаемое законом сохранения момента) запрещено законом сохранения четности. Следует, однако, еще раз подчеркнуть, что этот запрет относится к *электрическому дипольному испусканию.* Испускание электрических квадрупольных и магнитных дипольных квантов возможно и приводит к появлению в спектре так называемых запрещенных линий. Но вероятность электрического квадрупольного и магнитного дипольного испускания примерно в $(\lambda\!\!\!^{-}/R)^2$ меньше, чем вероятность электрического дипольного испускания. Она проявляется существенно только тогда, когда последнее излучение по каким-либо причинам запрещено.

За счет слабых взаимодействий волновая функция системы всегда содержит малую примесь состояния с противоположной четностью. Поэтому если, например, разрешен по четности и моменту $M1$-переход, то он будет сопровождаться слабым $E1$-переходом. Интерференция $M1 + E1$ приводит к циркулярной поляризации квантов или к асимметрии их вылета по спину и против спина.

§ 70. Электрические свойства и форма ядра

1. Величины, характеризующие электрические свойства ядра, могут быть введены совершенно так же, как это делается в электростатике для системы точечных зарядов, занимающих небольшую область пространства. Поэтому нуклоны в ядре будем считать точечными, хотя это вовсе не обязательно. Во внешнем постоянном электрическом поле с потенциалом φ потенциальная энергия ядра определяется выражением

$$U = \sum_{\alpha} e\varphi(x_{\alpha i}), \tag{70.1}$$

где суммирование производится только по протонам ядра, так как нейтроны, поскольку они не имеют электрического заряда, не вносили бы в эту сумму никакого вклада. Функция $\varphi(x_{\alpha i})$ означает потенциал внешнего поля в точке нахождения протона α, а x — совокупность декартовых координат того же протона ($i = 1, 2, 3$; $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$). Таким образом, в подробной записи

$$U = \sum_{\alpha} e\varphi(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) = \sum_{\alpha} e\varphi(\mathbf{r}_\alpha). \tag{70.1a}$$

Поместим начало координат в центре масс всего ядра (т. е. учитывая и нейтроны) и примем во внимание, что на расстояниях порядка линейных размеров ядра внешнее электрическое поле меняется мало. Тогда потенциал $\varphi(x_{\alpha i})$ целесообразно разложить в степенной ряд по координатам:

$$\varphi(x_{\alpha i}) = \varphi(0) + x_{\alpha i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_0 + \frac{1}{2}\,x_{\alpha i}x_{\alpha k}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k}\right)_0 + \ldots,$$

где в соответствии с общепринятой тензорной символикой по дважды встречающимся координатным индексам (но не по индексу α, который означает номер протона) производится суммирование. Подставляя это разложение в формулу (70.1), получим

$$U = \varphi(0)\sum_\alpha e + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_0 \sum_\alpha e x_{\alpha i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k}\right)_0 \sum_\alpha e x_{\alpha i}x_{\alpha k} + \ldots \tag{70.2}$$

Первый — главный — член этой суммы давал бы энергию заряженного ядра во внешнем электрическом поле, если бы весь заряд был сконцентрирован в одной точке — начале координат. Этот член может быть записан в виде $Ze\varphi(0)$. Он характеризует электрические свойства ядра суммарно, но не дает никаких указаний относительно распределения электричества по объему ядра.

2. Второй член суммы (70.2) содержит три компоненты вектора $\mathbf{d} = \sum_\alpha e\mathbf{r}_\alpha$, где $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$. Это есть *электрический дипольный момент ядра.* Выражение $\mathbf{d} = \sum_\alpha e\mathbf{r}_\alpha$, конечно, не инвариантно относительно выбора начала координат, поскольку полный заряд ядра $\sum_\alpha e$ отличен от нуля. Поэтому для однозначного определения вектора $\mathbf{d}$ начало координат и было выбрано не произвольно, а помещено в центре масс ядра. Можно было бы думать, что после заряда дипольный момент $\mathbf{d}$ является главной электрической характеристикой ядра в основном состоянии. Однако, по-видимому, центр масс ядра в основном состоянии является и центром симметрии распределения зарядов. Это значит, что каждому заряду в точке $\mathbf{r}$ соответствует равный по модулю и одинаковый по знаку заряд в точке $-\mathbf{r}$. Поэтому электрический дипольный момент ядра в основном состоянии равен нулю. В возбужденном состоянии это, вообще говоря, не так, хотя бы из-за движения нуклонов в ядре, нарушающего симметричное распределение протонов относительно центра масс ядра. (Заметим, что это не относится к магнитному моменту ядра. Классическим аналогом может служить равномерно заряженный шарик, вращающийся вокруг диаметра. В этом случае появляется магнитный дипольный момент, хотя и сохраняется полная симметрия относительно центра шарика.)

3. Из-за отсутствия электрического дипольного момента у ядра в основном состоянии главную роль во взаимодействии его с внешним электрическим полем, после самого заряда, играет третий член в формуле (70.2), определяющий *квадрупольное взаимодействие.* Следующие члены, соответствующие более высоким *мультипольным моментам*, играют малую роль и не учитываются нами. Член же с квадрупольным моментом содержит вторые производные потенциала φ по координатам, а потому квадрупольное взаимодействие, в отличие от дипольного, в однородном электрическом поле не существует.

Преобразуем квадрупольный член в (70.2) к обычно применяемому стандартному виду. Для избежания громоздкости написания формул опустим индекс суммирования α у всех координат частиц. В силу уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2} = 0,$$

или

$$\delta_{ik}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k} = 0,$$

где δ_{ik} — единичный тензор ($\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$). На основании этого

$$\frac{1}{2}\sum x_i x_k \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{1}{2}\sum \left(x_i x_k + \lambda\delta_{ik}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k},$$

где λ — произвольное число. Его удобно выбрать так, чтобы след тензора $(\sum x_i x_k + \lambda\delta_{ik})$, т. е. сумма его диагональных членов $\sum(x_i x_i + \lambda\delta_{ii}) = \sum(r^2 + 3\lambda)$, обратился в нуль. При таком выборе энергия квадрупольного взаимодействия ядра с внешним электрическим полем запишется в виде

$$U_{\text{квад}} = \frac{e}{6}\sum(3x_i x_k - r^2\delta_{ik})\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k},$$

или

$$U_{\text{квад}} = \frac{e}{6}\,Q_{ik}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k}, \tag{70.3}$$

где

$$Q_{ik} = \sum(3x_i x_k - r^2\delta_{ik}). \tag{70.4}$$

В компонентах

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \sum(3x^2 - r^2) = \sum(2x^2 - y^2 - z^2),\\ Q_{yy} &= \sum(3y^2 - r^2) = \sum(2y^2 - z^2 - x^2),\\ Q_{zz} &= \sum(3z^2 - r^2) = \sum(2z^2 - x^2 - y^2), \end{aligned} \tag{70.5}$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = \sum 3xy, \quad Q_{yz} = Q_{zy} = \sum 3yz, \quad Q_{zx} = Q_{xz} = \sum 3zx.$$

Тензор Q_{ik} называется *тензором квадрупольного момента ядра.* Он обращается в нуль для сферически симметричного тела. При другом выборе постоянной λ этого бы не получилось, чем и оправдывается сделанный выбор.

Как уже говорилось в § 62, взаимодействие магнитного момента ядра с магнитным полем электронной оболочки атома вызывает сверхтонкую структуру спектральных линий. Однако такое взаимодействие не всегда достаточно для объяснения этого явления. Дополнительной причиной его является квадрупольное взаимодействие атомного ядра с градиентом электрического поля оболочки. Изучение сверхтонкой структуры спектральных линий и дает один из методов определения электрических квадрупольных моментов ядер. Применяются также резонансные радиоспектроскопические методы.

4. Под квадрупольным моментом ядра обычно понимают не самый тензор Q_{ik}, а *значение его наибольшей компоненты* в системе координат, в которой Q_{ik} диагонален. Если за ось Z принять соответствующую главную ось, то

$$Q = \sum(3z^2 - r^2). \tag{70.6}$$

Эта величина имеет размерность площади. Удобной единицей ее является барн, равный 10^{-24} см^2.

Различают *внешний* (или *наблюдаемый*) и *внутренний* (или *собственный*) квадрупольные моменты ядра. Внешним называется квадрупольный момент (обозначаемый через Q), измеренный в лабораторной системе координат. Внутренним называют и обозначают через Q_0 квадрупольный момент, измеренный в системе координат, вращающейся вместе с атомным ядром вокруг его центра масс. Из-за нулевых колебаний оси атомного ядра относительно лабораторной системы координат эти два момента, вообще говоря, не совпадают между собой. Внешний квадрупольный момент есть среднее значение квадрупольного момента ядра в состоянии, которое характеризуется квадратом полного момента импульса ядра $I(I+1)$ и его максимальной проекции I на выделенное направление в пространстве. Поэтому $Q_0 \geqslant Q$. Сверхтонкая структура спектральных линий и радиоспектроскопические методы, упомянутые выше, позволяют экспериментально определить только внешний квадрупольный момент. Зная Q, можно вычислить и внутренний квадрупольный момент Q_0 по формуле

$$Q = Q_0 \frac{I(2I-1)}{(I+1)(2I+1)}, \tag{70.7}$$

которая выводится в квантовой механике. Для этого, конечно, спин ядра I должен быть отличен от 0 и 1/2. Внешний квадрупольный момент Q ядра со спином 0 или 1/2 равен нулю. О внутреннем квадрупольном моменте Q_0 в этом случае на основании формулы (70.7) ничего сказать нельзя. Однако существует и прямой метод измерения Q_0. Собственный квадрупольный момент является мерой отклонения распределения электрического заряда в ядре от сферического.

Многие ядра обладают осью симметрии вращения и имеют плоскость симметрии, перпендикулярную к этой оси и проходящую через центр масс ядра. Обычно принимают, что ядро имеет форму эллипсоида вращения. Квадрупольный момент ядра положителен, если оно имеет вытянутую форму, и отрицателен для сплющенного ядра. Несферичность формы ядра проявляется в появлении в энергетическом спектре ядра *вращательных энергетических уровней*. Они возникают из-за вращения вокруг оси, перпендикулярной к аксиальной оси ядра. Более сложные ядра в основном состоянии могут иметь форму трехосного эллипсоида. У таких ядер энергетическая структура уровней усложняется.

Таблица 8

Внешние квадрупольные моменты некоторых атомных ядер

Ядро	Q, 10^{-24} см^2	Ядро	Q, 10^{-24} см^2	Ядро	Q, 10^{-24} см^2
$^{2}_{1}$H	+0,0027	$^{79}_{35}$Br	+0,33	$^{138}_{57}$La	+2,7
$^{10}_{5}$B	+0,074	$^{85}_{37}$Rb	+0,27	$^{175}_{71}$Lu	+5,9
$^{14}_{7}$N	+0,0071	$^{91}_{40}$Zr	−0,46	$^{179}_{72}$Hf	+3
$^{17}_{8}$O	−0,027	$^{93}_{41}$Nb	−0,3	$^{181}_{73}$Ta	+6
$^{35}_{17}$Cl	−0,084	$^{99}_{43}$Tc	+0,34	$^{204}_{81}$Bi	−0,19
$^{37}_{17}$Cl	−0,066	$^{115}_{49}$In	+1,198	$^{235}_{92}$U	+4,0
$^{69}_{31}$Ga	+0,243	$^{119}_{50}$Sn	−0,08	$^{241}_{95}$Am	+4,9

В табл. 8 приведено несколько значений экспериментально найденных внешних квадрупольных моментов ядер. У некоторых из них величины Q аномально велики и намного превосходят квадрат радиуса ядра R^2. Это указывает на значительное отклонение формы таких ядер от сферической симметрии.

Глава IX
РАДИОАКТИВНОСТЬ

§ 71. Введение

1. *Радиоактивность* есть самопроизвольное изменение состава атомного ядра, происходящее за время, существенно большее характерного ядерного времени (10^{-22} с). Несколько произвольно условились считать, что изменение состава ядра должно происходить не раньше чем через 10^{-12} с после его рождения. Распады ядер часто происходят значительно быстрее, но такие распады уже не принято относить к радиоактивным. Так, при бомбардировке различных мишеней на ускорителях может возникать огромное многообразие ядер, которые мгновенно распадаются и по этой причине не могут считаться сложившимися атомными ядрами. Время 10^{-12} с, ничтожное с общежитейской точки зрения, в ядерных масштабах должно считаться очень большим. За такое время совершается множество внутриядерных процессов и ядро успевает полностью сформироваться.

Ядерные силы, действующие между нуклонами, удерживают нуклоны в ядре, поскольку эти силы являются силами притяжения. Противоположное — дестабилизирующее — действие оказывают отталкивающие кулоновские силы между протонами ядра. Под действием сил обоего рода главным образом и формируются атомные ядра.

Ядра, подверженные радиоактивным превращениям, называются *радиоактивными*, а не подверженные — *стабильными.* Такое деление условно, так как, в сущности, все ядра могут самопроизвольно распадаться, но этот процесс в разных ядрах идет с различной скоростью.

Большая часть радиоактивных ядер получена искусственно путем бомбардировки мишеней различными частицами. В этом случае образующееся радиоактивное ядро можно рассматривать как *долгоживущее составное ядро*, подверженное дальнейшему превращению. Никакой принципиальной разницы между радиоактивным распадом и превращением составного ядра нет. *Искусственная радиоактивность* впервые (в 1934 г.) наблюдалась супругами Ирен (1897–1956) и Фредериком (1900–1958) Жолио-Кюри.

Различают следующие виды радиоактивного распада: 1) *α-распад*; 2) *β-распад*; 3) *спонтанное деление* атомного ядра; 4) *протонный распад*; 5) двухпротонный распад и др.

При α-распаде из ядра спонтанно вылетает α-частица ($^4_2$He). При этом зарядовое число ядра уменьшается на две единицы и образуется новый элемент, сдвинутый относительно исходного влево на две клетки периодической системы.

Бета-распад может быть трех видов: 1) *электронный*, или β^--*распад*; 2) *позитронный*, или β^+-*распад*; 3) *электронный захват*. При β^--распаде из ядра вылетают электрон и электронное антинейтрино $\overline{\nu}_e$ (см. § 74, п. 8). Массовое число ядра не меняется, а зарядовое число возрастает на единицу (сдвиг в периодической системе вправо на одну клетку). При β^+-распаде из ядра вылетают позитрон e^+ и электронное нейтрино $\overline{\nu}_e$ (сдвиг в периодической системе влево на одну клетку без изменения массового числа). Позитронная радиоактивность была открыта в 1934 г. И. и Ф. Жолио-Кюри практически одновременно с открытием искусственной радиоактивности. При электронном захвате ядро захватывает электрон из электронной оболочки атома; зарядовое число, как и при β^+-распаде, уменьшается на единицу, а массовое число не меняется. Если электрон захватывается с K-оболочки атома, то электронный захват называют также *K-захватом*.

В 1940 г. Г.И. Флеровым и К.А. Петржаком было открыто спонтанное деление ядер урана. Примером может служить процесс

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \to {}^{139}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{96}_{38}\mathrm{Sr} + 3\,{}^{1}_{0}\mathrm{n}.$$

У ядер с большим избытком протонов, в принципе, возможна *протонная* и даже *двухпротонная радиоактивности*, но эти процессы очень трудно обнаружить из-за сильного фона конкурирующих α- и β^+-распадов, приводящих к образованию изотопов таких же химических элементов. Протонная радиоактивность возможна лишь у небольшого числа искусственно получаемых легких ядер с относительно короткими временами жизни, которые обладают большим избытком протонов. Тем не менее, протонная и двухпротонная радиоактивности обнаружены. По мнению В.И. Гольданского (р. 1923), двухпротонная радиоактивность даже более вероятна, чем однопротонная. Дело в том, что между протонами действуют силы спаривания. В результате из ядра может вылететь не только одиночный протон, но и бипротон, т. е. два спаренных протона с противоположно направленными спинами.

Из ядра могут вылетать и нуклоны, объединенные в более крупные частицы, чем ядра ^{4}He (α-частицы), например ядра углерода. Такой процесс затруднен тем, что в исходном ядре нет готовых ядер углерода. Впрочем, и готовых α-частиц в ядре также нет — они образуются перед самым вылетом из ядра. Только формирование α-частиц несравненно более вероятно, чем формирование ядер углерода. Тем не менее, в 1984 г. в Оксфордском университете было зафиксировано самопроизвольное превращение нестабильных изотопов радия в свинец с испусканием ядер изотопа углерода ^{14}C:

$$^{222}_{88}\mathrm{Ra} \to {}^{208}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{14}_{6}\mathrm{C},$$

$$^{223}_{88}\mathrm{Ra} \to {}^{209}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{14}_{6}\mathrm{C},$$

$$^{224}_{88}\mathrm{Ra} \to {}^{210}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{14}_{6}\mathrm{C}.$$

Все ядра изотопов ^{222}Ra, ^{223}Ra и ^{224}Ra радиоактивны с периодами полураспадов соответственно 39 с, 11,7 дня и 3,6 дня. Вероятность вылета ядра ^{14}C примерно в 10^{10} раз меньше вероятности вылета α-частицы. Поэтому экспериментально зафиксировать распад рассматриваемых ядер радия с вылетом ядер ^{4}C необычайно трудно. То обстоятельство, что одним из продуктов распада является изотоп углерода ^{14}C, а не ^{12}C, можно объяснить тем, что энергетически выгодно, чтобы образовалось дважды магическое ядро $^{208}_{82}$Pb или соседние с ним ядра (см. § 78). В 1985 г. в Дубне, а также группой американских физиков были открыты распады с излучением еще более тяжелых ядер — ядер неона:

$$^{233}_{92}\mathrm{U} \to {}^{209}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{24}_{10}\mathrm{Ne}, \quad {}^{233}_{92}\mathrm{U} \to {}^{208}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{25}_{10}\mathrm{Ne},$$

$$^{232}_{92}\mathrm{U} \to {}^{208}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{24}_{10}\mathrm{Ne}, \quad {}^{231}_{91}\mathrm{U} \to {}^{207}_{81}\mathrm{Tl} + {}^{24}_{10}\mathrm{Ne}.$$

Вероятность первых трех процессов примерно в 10^{12}, а последнего — в 10^{11} раз меньше вероятности α-распада.

В результате радиоактивного распада ядер, образующихся при делении материнского ядра, образуются нейтроноизбыточные возбужденные ядра. При их распаде образуются так называемые *запаздывающие нейтроны.* Такой процесс соблазнительно назвать *нейтронной радиоактивностью.* Однако это не делается, так как снятие возбуждения путем испускания нейтронов происходит практически мгновенно.

2. В процессе радиоактивного распада, конечно, должен выполняться закон сохранения энергии. Если начальное ядро неподвижно, то этот закон можно записать в виде

$$M_{\text{нач}}c^2 = M_{\text{кон}}c^2 + \sum_i M_i c^2 + \mathcal{E}, \tag{71.1}$$

где $M_{\text{нач}}$ и $M_{\text{кон}}$ — массы начального и конечного ядер, M_i — массы образовавшихся частиц, $\mathcal{E}$ — кинетическая энергия, выделившаяся при радиоактивном распаде. Самопроизвольно могут идти только реакции с выделением энергии, а потому энергия $\mathcal{E}$ существенно положительна. Таким образом, радиоактивный распад возможен лишь тогда, когда $M_{\text{нач}} > M_{\text{кон}} + \sum M_i$. Это условие необходимо, но не достаточно, так как для возможности процесса, помимо закона сохранения энергии, должны выполняться и другие законы сохранения (импульса, момента импульса, электрического, барионного и лептонного зарядов и пр.).

3. Все α- и β-радиоактивные элементы можно разделить на четыре радиоактивных ряда, или радиоактивных семейства. В каждом ряду массовое число A выражается формулой

$$A = 4n + C, \tag{71.2}$$

где C — постоянная для рассматриваемого ряда величина, а n — переменное целое число. Каждый элемент ряда получается из предыдущего путем α- или β-превращения. Поэтому в каждом ряду два соседних элемента имеют либо одинаковые массовые числа, либо эти

числа отличаются на четыре. Значению $C = 0$ ($n \leqslant 59$) соответствует ряд тория, $C = 1$ ($n \leqslant 60$) — ряд нептуния, $C = 2$ ($n \leqslant 60$) — ряд урана, $C = 3$ ($n \leqslant 59$) — ряд актиноурана. Ряд с $C = 1$ (нептуния) состоит из изотопов, не встречающихся в природе, но получающихся искусственно.

4. Все четыре радиоактивных ряда представлены в табл. 9. Рассмотрим в качестве примера ряд урана. Он начинается с α-радиоактивного изотопа урана ^{238}U [1]. Испытав α-распад с периодом полураспада $4{,}56 \cdot 10^9$ лет, этот изотоп переходит в β^--активный изотоп тория $^{234}_{90}$Th. После последовательных двух β^--распадов последнего с периодами полураспада 24 дня и 6,74 часа получается другой радиоактивный изотоп урана $^{234}_{92}$U с периодом полураспада $2{,}48 \cdot 10^5$ лет. Он последовательно претерпевает пять α-превращений. Среди радиоактивных изотопов, получающихся в результате этих превращений, содержится и α-радиоактивный изотоп радия $^{226}_{88}$Ra с периодом полураспада 1617 лет, за которым следует радиоактивный газ радон $^{222}_{86}$Rn, и т. д. Заметим, что радиоактивные изотопы $^{214}_{83}$Bi и $^{210}_{83}$Bi могут переходить соответственно в $^{210}_{82}$Pb и в $^{206}_{82}$Pb двумя различными путями, указанными в табл. 9. Ряд урана заканчивается стабильным изотопом свинца $^{206}_{82}$Pb. Аналогичное строение имеют и остальные радиоактивные ряды. В естественных рядах тория и актиноурана содержатся другие изотопы радия и радона. Все естественные радиоактивные ряды заканчиваются различными стабильными изотопами свинца $^{208}_{82}$Pb, $^{206}_{82}$Pb, $^{207}_{82}$Pb. Существование трех различных стабильных изотопов свинца указывает на особую устойчивость ядер свинца, содержащих магическое число протонов — 82.

На самом тяжелом элементе, встречающемся на Земле в естественных условиях, уране $_{92}$U периодическая система элементов, не кончается, как об этом уже указывалось в § 47. Однако все трансурановые, т. е. заурановые, элементы радиоактивны. Период полураспада наиболее долгоживущего изотопа плутония $^{239}_{94}$Pu, например, составляет 24 000 лет. Если такие элементы и существовали когда-то на Земле в естественных условиях, то за время существования Земли они полностью исчезли из-за радиоактивных превращений. Все трансурановые элементы получаются искусственным путем. С учетом этих элементов радиоактивные ряды, представленные в табл. 9, могут быть продолжены в сторону больших Z. И все элементы тяжелее свинца и висмута, в конце концов, правда в отдаленном будущем, должны исчезнуть на Земле, если только к этому времени сама Земля еще будет существовать. Наличие в настоящее время таких элементов является одним из подтверждений ограниченного возраста Земли, который по различным оценкам составляет приблизительно 4–4,5 млрд лет.

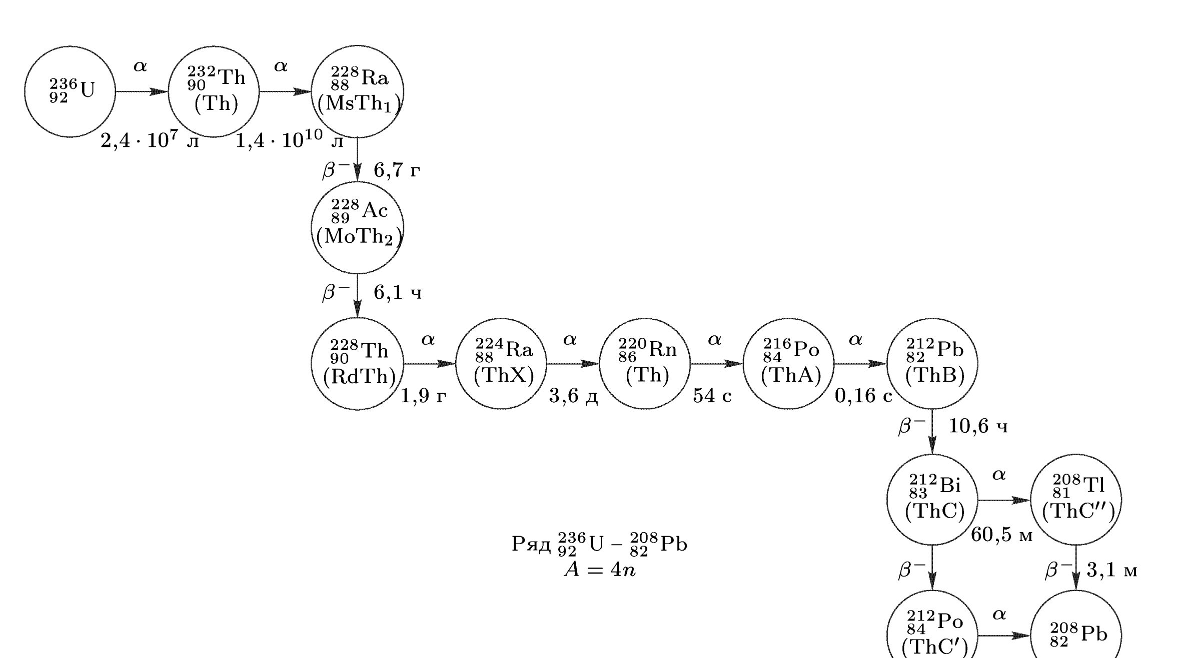
О способах получения трансурановых элементов будет сказано в § 94.

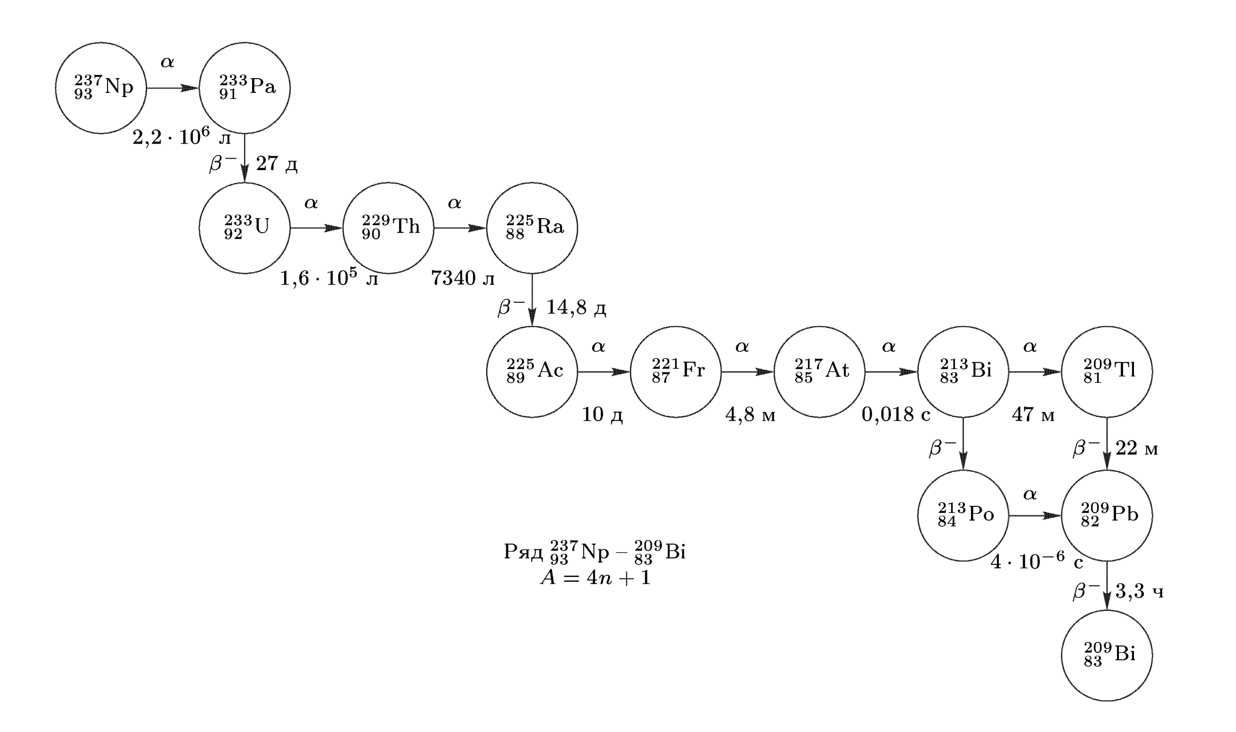
---

[1] В табл. 9 в скобках указаны обозначения изотопов, использующиеся в радиохимии.

Таблица 9

Радиоактивные семейства

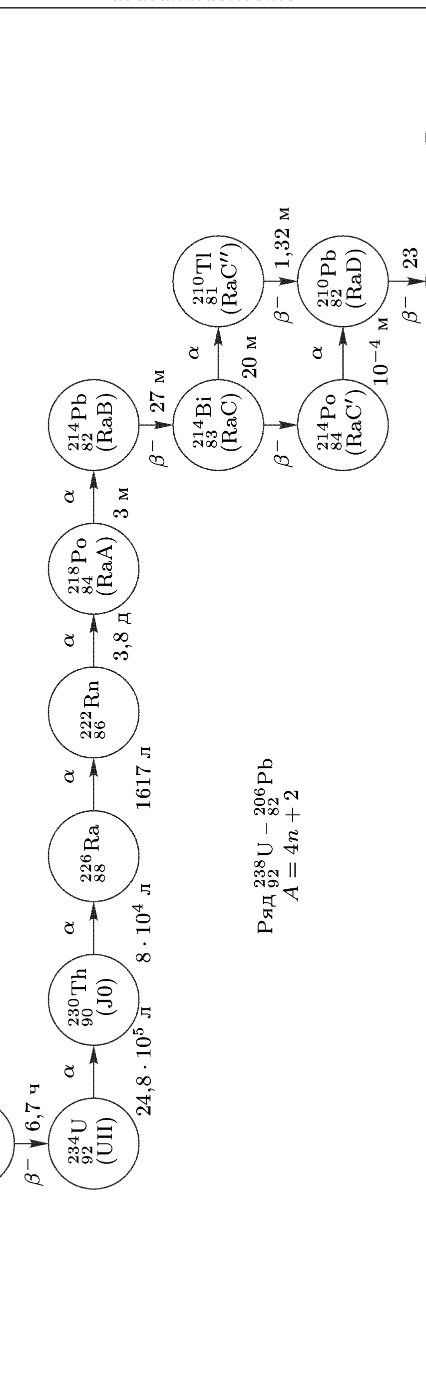


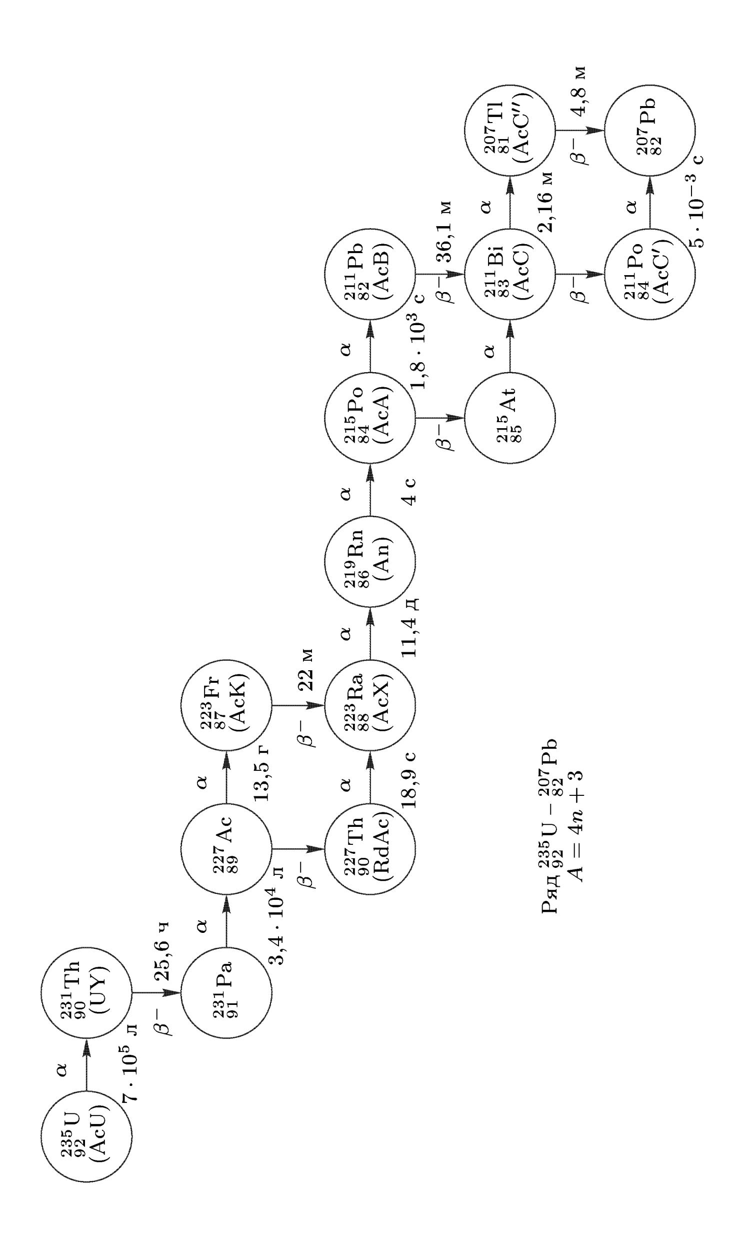


Ряд $^{237}_{93}$Np – $^{209}_{83}$Bi

$A = 4n + 1$

Продолжение табл. 9




$^{235}_{92}$U (AcU)
α
$7 \cdot 10^5$ л
$^{231}_{90}$Th (UY)
β^-
25,6 ч
$^{231}_{91}$Pa
α
$3{,}4 \cdot 10^4$ л
$^{227}_{89}$Ac
α
13,5 г
β^-
$^{223}_{87}$Fr (AcK)
$^{227}_{90}$Th (RdAc)
α
18,9 с
β^-
22 м
$^{223}_{88}$Ra (AcX)
α
11,4 д
$^{219}_{86}$Rn (An)
α
4 с
$^{215}_{84}$Po (AcA)
α
$1{,}8 \cdot 10^3$ с
β^-
$^{215}_{85}$At
$^{211}_{82}$Pb (AcB)
β^-
36,1 м
α
$^{211}_{83}$Bi (AcC)
α
2,16 м
β^-
$^{207}_{81}$Tl (AcC″)
β^-
4,8 м
$^{211}_{84}$Po (AcC′)
α
$5 \cdot 10^{-3}$ с
$^{207}_{82}$Pb
Ряд $^{235}_{92}$U – $^{207}_{82}$Pb
$A = 4n + 3$

§ 72. Законы радиоактивного распада

1. Радиоактивный распад — *явление статистическое.* Все предсказания, которые могут быть сделаны на основе законов радиоактивного распада, носят принципиально *вероятностный характер.* Нельзя сказать, какие атомы в радиоактивном образце распадутся за рассматриваемое время. Но можно практически с полной достоверностью предсказать, сколько атомов распадется за это время. Например, в случае радона половина атомов распадется за 3,8 дня. И это вероятностное предсказание будет выполняться тем точнее, чем с большим количеством радона имеют дело.

Вероятность распада ядра за единицу времени называется *постоянной распада* λ радиоактивных ядер данного сорта. Это значит, что из N имеющихся радиоактивных ядер за единицу времени в среднем распадается λN, а за время dt — $\lambda N\,dt$ ядер. Величина λN называется *активностью* радиоактивного источника (радиоактивностью). Старейшей, до сих пор наиболее употребительной единицей радиоактивности является *кюри* (Ки) и ее дольные единицы: *милликюри* (1 мКи $= 10^{-3}$ Ки) и *микрокюри* (1 мкКи $= 10^{-6}$ Ки). По первоначальному определению кюри есть активность одного грамма изотопа радия $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$. Однако для удобства измерений это определение в дальнейшем было заменено следующим:

$$1\ \text{Ки} = 3{,}700 \cdot 10^{10}\ \text{расп/с}\ \ (\text{точно}).$$

Активность же грамма радия лишь приближенно составляет 1 Ки. Естественной единицей активности является 1 распад в секунду. Эта единица получила название *беккерель* (Бк) и принята в Международной системе СИ. В литературе употребляется также единица *резерфорд*: 1 Рд $= 10^6$ Бк.

Поскольку радиоактивные превращения совершаются внутри ядра, внешние условия (температура, давление, химические реакции и пр.) на ход радиоактивных превращений практически не оказывают никакого влияния. Во всяком случае такое влияние не удалось обнаружить самыми точными способами, которыми располагала физика до открытия эффекта Мёссбауэра. В частности, не удавалось обнаружить зависимости от внешних условий постоянной радиоактивного распада λ. Исключением являлся только e-захват. Для него еще до использования мёссбауэровской спектроскопии была обнаружена очень слабая зависимость величины λ от внешних условий. Но в этом случае явление определяется не только тем, что происходит внутри ядра, но и в ближайших к нему участках электронной оболочки. Только методами мёссбауэровской спектроскопии (см. § 76) удалось отчетливо обнаружить влияние электронной оболочки атома на явления, происходящие внутри атомного ядра. Но в громадном большинстве случаев это влияние не играет никакой роли. Постоянная λ не зависит и от времени. Образно говоря, радиоактивные ядра могут только умирать, но они никогда не стареют.

2. После этих замечаний сформулируем *основной закон радиоактивного распада.* Пусть N — число (очень большое) радиоактивных ядер в момент времени t, а $N + dN$ — в более поздний момент $t + dt$. Величина dN отрицательна, поскольку ядра могут только распадаться, т. е. число их убывает. На основании изложенного выше

$$dN = -\lambda N\,dt. \tag{72.1}$$

Поскольку λ не зависит от времени, после интегрирования получаем

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{72.2}$$

т. е. число нераспавшихся ядер убывает во времени экспоненциально. Время t можно отсчитывать от любого момента, принимаемого за начальный. Постоянная N_0 означает число нераспавшихся ядер в начальный момент времени. Формула (72.2) и выражает основной закон радиоактивного распада. Разумеется, она относится к тем атомам радиоактивного вещества, которые могут только распадаться, но не могут появляться или исчезать в результате каких-либо других процессов.

Постоянную распада λ можно выразить через *среднее время жизни* радиоактивного ядра. Так как за промежуток времени между t и $t+dt$ распадается $-dN$ ядер, то можно сказать, что каждое из этих ядер «живет» время t, считая от начала отсчета времени. Суммарное время жизни этих $-dN$ ядер составляет $-t\,dN$, а суммарное время жизни всех N_0 ядер определяется интегралом

$$-\int\limits_{N_0}^{0} t\,dN = \lambda \int\limits_{0}^{\infty} tN\,dt = \lambda N_0 \int\limits_{0}^{\infty} te^{-\lambda t}\,dt = \frac{N_0}{\lambda}.$$

Таким образом, среднее время жизни одного радиоактивного ядра будет $\tau = (N_0/\lambda) : N_0$, т. е.

$$\tau = 1/\lambda. \tag{72.3}$$

Оно не зависит от выбора начала отсчета времени. Это вполне естественно, поскольку все моменты времени в отношении радиоактивного распада полностью равноправны. Различные моменты характеризуются различными значениями полного числа радиоактивных ядер N, но относительное число ежесекундно распадающихся ядер $-\dot{N}/N$ одно и то же для всех моментов времени и равно постоянной распада λ. Заметим еще, что время τ для сокращения обычно называют просто *временем жизни* ядра, опуская прилагательное «среднее».

С введением времени жизни формула (72.1) представится в виде

$$N = N_0 e^{-t/\tau}. \tag{72.4}$$

Время $T_{1/2}$, по истечении которого число наличных радиоактивных атомов убывает в два раза, называется *периодом* или *временем полураспада.* Для его определения на основании (72.4) получим

$$N = N_0/2 = N_0 e^{-T_{1/2}/\tau},$$

откуда

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 = 0{,}6931\tau. \tag{72.5}$$

Если одновременно происходят два конкурирующих процесса, так что ядра N могут одновременно испускать частицы одного сорта N_1, согласно уравнению $dN_1 = -\lambda_1 N_1\, dt$, и частицы другого сорта N_2, согласно уравнению $dN_2 = -\lambda_2 N_2\, dt$, то

$$dN = dN_1 + dN_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2) N\, dt.$$

Отсюда следует, что обратная величина «результирующего» времени жизни τ равна сумме обратных величин времен жизни τ_1 и τ_2 обоих конкурирующих процессов:

$$1/\tau = 1/\tau_1 + 1/\tau_2.$$

3. При радиоактивном распаде ядер исходного вещества могут возникать новые радиоактивные ядра. В таком случае первые ядра называются *материнскими*, а вторые — *дочерними.* Обозначим числа этих ядер соответственно через N_1 и N_2, а их постоянные распада — через λ_1 и λ_2. Тогда изменения N_1 и N_2 будут описываться уравнениями

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2. \tag{72.6}$$

Первое из этих уравнений с точностью до обозначений полностью совпадает с (72.1), поскольку число N_1 может только убывать за счет радиоактивного распада материнских ядер. При этом из каждого материнского ядра возникает дочернее ядро. Это обстоятельство учитывается первым слагаемым в правой части второго уравнения системы (72.6). Другое же слагаемое $(-\lambda_2 N_2)$ учитывает убыль дочерних ядер из-за их радиоактивного распада.

Если дочерние ядра также радиоактивны, то при их распаде возникают новые ядра, число которых обозначим через N_3, а постоянную распада — через λ_3. В этом случае к системе уравнений (72.6) добавляется третье уравнение

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3 \tag{72.7}$$

и т. д.

Важнейшим является случай системы уравнений (72.6), когда рассматриваются только материнские и соответствующие им дочерние также радиоактивные ядра. Этим случаем мы и ограничимся. Решение системы уравнений (72.6) имеет вид

$$N_1 = N_{10} e^{-\lambda_1 t}, \tag{72.8}$$

$$N_2 = N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\, e^{-\lambda_1 t} + \left(N_{20} - N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) e^{-\lambda_2 t}, \tag{72.9}$$

где N_{10} и N_{20} — начальные значения чисел атомов N_1 и N_2 материнского и дочернего вещества. В частном случае, когда в начальный момент дочернее вещество еще не образовалось ($N_{20} = 0$), формула (72.9) упрощается и переходит в

$$N_2 = N_{10} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\, (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \tag{72.10}$$

Полное число атомов $N_1 + N_2$, как видно из формул (72.8) и (72.10), не сохраняется, если только дочерние ядра испытывают распад ($\lambda_2 \neq 0$). Но если дочерние ядра не распадаются ($\lambda_2 = 0$), то из тех же формул получается $N_1 + N_2 = N_{10} = \text{const}$, т. е. полное число атомов $N_1 + N_2$ сохраняется. Тот же результат немедленно получается, если почленно сложить уравнения (72.6) и учесть, что $\lambda_2 = 0$. Аналогично, если не распадаются ядра, возникающие из дочерних ($\lambda_3 = 0$), то сложением уравнений (72.6) и (72.7) получим $N_1 + N_2 + N_3 = \text{const}$, и т. д.

Особенно важным является случай, когда материнское вещество — долгоживущее, а дочернее вещество по сравнению с ним распадается быстро ($\lambda_1 \ll \lambda_2$), причем время наблюдения t пренебрежимо мало по сравнению со временем жизни τ_1 материнского вещества ($\lambda_1 t \ll 1$). За это время изменением N_1 можно пренебречь, т. е. N_1 считать величиной постоянной. В таком случае из (72.8) и (72.10) получается

$$N_1 = \text{const}, \quad N_2 = N_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}), \tag{72.11}$$

так как величиной λ_1 в знаменателе формулы (70.10) можно пренебречь. Число атомов N_2 при $t \to \infty$ асимптотически стремится к насыщению $N_2(\infty) = N_1 \lambda_1 / \lambda_2$. Насыщение наступает практически через промежуток времени $\tau \approx 3\tau_2$ (рис. 126). Таким образом, в состоянии насыщения выполняется условие

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2. \tag{72.12}$$

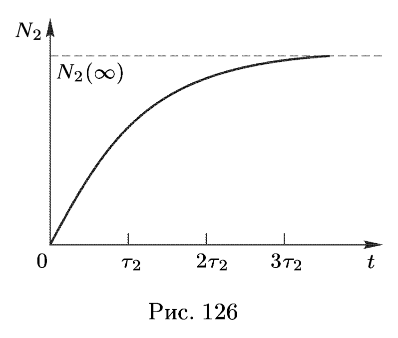


Рис. 126

Это равенство называют также *условием радиоактивного равновесия.* Как видно из (72.6), физический смысл его состоит в том, что распад атомов дочернего вещества в любой момент времени компенсируется увеличением их числа за счет распада атомов материнского вещества.

4. Статистический закон радиоактивного распада при наличии очень большого количества радиоактивных атомов — практически абсолютно точный закон. На его принципе работают «атомные часы», служащие в некоторых случаях, например в геологии или археологии, для измерения промежутков времени. Опишем два применения радиоактивности с этой целью.

Для оценки возраста мертвых организмов (древесины, костей животных и пр.), не превышающего примерно 50 000 лет, используется радиоактивный изотоп углерода $^{14}_{6}C$. Испытывая β-распад, он превращается в азот $^{14}_{7}N$. Период полураспада для $^{14}_{6}C$ составляет 5800 лет. Зная первоначальное количество атомов $^{14}_{6}C$ в образце и измерив оставшееся количество их, можно вычислить время, прошедшее с момента появления образца. Радиоактивный изотоп $^{14}_{6}C$ образуется в верхних слоях атмосферы при столкновениях нейтронов, образовавшихся под

действием космических лучей, с ядрами атомов азота $^{14}_{7}$N, составляющими основную часть атомов воздуха (см. § 103, п. 12). Образовавшийся углерод $^{14}_{6}$C быстро попадает в нижние слои атмосферы, где перемешивается с обычным углеродом $^{12}_{6}$C. Обычный нерадиоактивный углерод $^{12}_{6}$C поглощается животными и растениями, а вместе с ним поглощается и небольшое количество радиоактивного изотопа $^{14}_{6}$C. Можно считать, что за времена геологического порядка интенсивность космических лучей в земной атмосфере не изменилась. А так как по сравнению с этими временами период полураспада $^{14}_{6}$C (5800 лет) относительно мал, то в земной атмосфере установилось равновесное соотношение между радиоактивным $^{14}_{6}$C и нерадиоактивным $^{12}_{6}$C изотопами углерода, когда вместо каждого распадающегося радиоактивного атома $^{14}_{6}$C космические лучи в среднем порождают такой же новый атом. Это соотношение примерно одинаково и в живом организме, поскольку последний частично состоит из атмосферного углерода. После гибели организма он, естественно, не в состоянии больше поглощать ни углерод ^{12}C, ни углерод ^{14}C. При этом количество углерода ^{12}C, накопленного организмом в течение времени жизни, остается неизменным, тогда как половина атомов ^{14}C убывает за каждые 5800 лет. По меняющемуся соотношению между количествами углерода ^{12}C и ^{14}C и можно относительно точно определить возраст мертвого организма.

Второй пример касается определения возраста Земли. Принципиальное (но численно грубое) решение его было дано еще на заре исследований явления радиоактивности. «Атомными часами», пригодными для решения подобных вопросов, могут служить долгоживущие ядра ^{238}U (период полураспада 4,56 млрд лет) и ^{232}Th (период полураспада 14 млрд лет). Конечными продуктами их радиоактивного распада являются соответственно стабильные изотопы свинца ^{206}Pb и ^{208}Pb. Они называются *радиогенными* в отличие от так называемого изначального свинца ^{204}Pb, не являющегося конечным продуктом радиоактивных превращений. Если ввести предположение, что весь радиогенный свинец получился в результате радиоактивного распада урана и тория, то можно вычислить возраст Земли. Для надежного вычисления надо точно измерить количество различных изотопов радиогенного свинца, содержащихся, например, в радий-урановых рудах. В настоящее время такой метод дает для возраста Земли приблизительно 4,5 млрд лет. Конечно, в основе этого метода лежит *предположение*, что в момент возникновения Земли на ней не существовало радиогенного свинца. Однако определение возраста Земли, основанное на этом предположении, хорошо согласуется с другими методами.

ЗАДАЧИ

1. Через равные малые промежутки времени производится счет α-частиц долгоживущего радиоактивного препарата. Найти вероятность P_n того, что в одном из этих промежутков времени будет зарегистрировано n α-частиц, если среднее число зарегистрированных в одном промежутке времени α-частиц равно $\overline{n}$.

Решение. Пусть за длительный промежуток времени радиоактивный препарат испустил всего N α-частиц, причем за это время его количество практически не изменилось. Обозначим через p вероятность того, что атом радиоактивного вещества испустил α-частицу в рассматриваемый промежуток времени. Тогда вероятность испускания во все остальные промежутки времени будет $1 - p$. Искомая вероятность определится соотношением

$$P_n = \frac{N!}{n!(N-n)!}\, p^n (1-p)^{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{\overline{n}}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\overline{n}}{N}\right)^{N-n}.$$

При $N \to \infty$ это выражение асимптотически переходит в формулу Пуассона

$$P_n = \frac{(\overline{n})^n}{n!}\, e^{-\overline{n}}. \tag{72.13}$$

В самом деле,

$$P_n = \left[\frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{N^n}\right] \frac{\overline{n}^n}{n!} \left(1 - \frac{\overline{n}}{N}\right)^{-(N/\overline{n})\overline{n}(n-N)/N}.$$

Асимптотически при $N \to \infty$

$$\left(1 - \frac{\overline{n}}{N}\right)^{-N/\overline{n}} = e,$$

выражение в квадратных скобках стремится к 1, а дробь $(n - N)/N$ стремиться к -1. В результате получается формула (72.13).

2. В настоящее время в природном уране содержится 99,28 % ^{238}U и 0,72 % ^{235}U. Вычислить возраст Земли в предположении, что в момент образования Земли количества ^{238}U и ^{235}U были одинаковыми.

Ответ. $t = \dfrac{\ln(N^{238}/N^{235})}{\lambda^{235} - \lambda^{238}} \approx \dfrac{1}{\lambda^{235}} \ln\dfrac{N^{238}}{N^{235}} \approx \tau^{235} \ln\dfrac{N^{238}}{N^{235}} = T^{235}_{1/2} \dfrac{\ln(N^{238}/N^{235})}{\ln 2} \approx 5{,}5 \cdot 10^9$ лет.

3. Период полураспада ^{234}U равен $T^{234}_{1/2} = 2{,}48 \cdot 10^5$ лет. Какое количество атомов ^{234}U осталось бы на Земле в настоящее время, если бы происходил только процесс радиоактивного распада этого элемента? Как объяснить, что в природном уране содержится примесь ^{234}U в количестве 0,055 %? Возраст Земли $t = 4{,}5 \cdot 10^9$ лет.

Ответ. $N = N_0 e^{-t/\tau} = N_0 e^{-t \ln 2/T_{1/2}} = N_0 \cdot 10^{-5460}$, где N_0 — количество атомов ^{234}U в момент образования Земли. Если даже предположить, что в этот момент Земля состояла только из ^{234}U, то и тогда на Земле уже давно не осталось бы ни одного атома ^{234}U. Изотоп ^{234}U существует на Земле благодаря α-распаду ^{238}U и β^--распаду ^{234}Th и ^{234}Pa.

§ 73. Альфа-распад

1. Альфа-распад есть *самопроизвольный процесс* испускания ядрами α-частиц, в результате которого массовое число ядра A уменьшается на четыре, а зарядовое число Z уменьшается на два:

$${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{X} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}. \tag{73.1}$$

В настоящее время известно более двухсот α-активных ядер, из которых большинство получается искусственно.

Чтобы α-распад происходил, необходимо (но недостаточно), чтобы энергия связи исходного материнского ядра была меньше суммы энергий связи дочернего ядра и испускаемой α-частицы. При выполнении этого условия кинетическая энергия Q, выделяющаяся при α-распаде, определяется соотношением

$$Q = \mathscr{E}_{\text{св}}(A-4, Z-2) + \mathscr{E}_{\text{св}}(\alpha) - \mathscr{E}_{\text{св}}(Z, A). \tag{73.2}$$

В основном Q есть кинетическая энергия α-частицы, поскольку масса дочернего ядра всегда много больше массы α-частицы. Предполагается, конечно, что материнское ядро неподвижно.

Альфа-распад возможен только при $Q > 0$ и невозможен в противоположном случае. Возьмем в качестве примера изотопы урана $^{234}_{92}\text{U}$ и тория $^{230}_{90}\text{Th}$. Табличные значения энергий связи этих ядер равны соответственно $\mathscr{E}_{\text{св}}(92{,}234) = 1\,778\,630$ кэВ, $\mathscr{E}_{\text{св}}(90{,}230) = 1\,755\,190$ кэВ. Энергия связи α-частицы $U_{\text{св}}(\alpha) = 28\,296{,}10$ кэВ. По формуле (73.2) находим, что в процессе распада ядра ^{234}U на ядро ^{230}Th и α-частицу выделяется энергия $Q = 4856$ кэВ. Она положительна, а потому указанный процесс энергетически возможен. И действительно он идет: уран ^{234}U превращается в ^{230}Th с испусканием α-частицы. Кинетическая энергия Q распределяется обратно пропорционально массам образовавшихся частиц: α-частица уносит энергию 4773, а ядро ^{230}Th — только 83 кэВ.

Условие $Q > 0$ можно представить в другой форме. Обозначим средние энергии связи, приходящиеся на один нуклон ядра, малыми буквами e. Тогда формула (73.2) преобразуется в

$$Q = (A-4)e_{\text{д}} - Ae_{\text{м}} + 4e_{\alpha} = A(e_{\text{д}} - e_{\text{м}}) + 4(e_{\alpha} - e_{\text{д}}),$$

где индексы α, м, д относятся соответственно к α-частице, материнскому и дочернему ядрам. Условие $Q > 0$ приводится к виду

$$e_{\text{д}} - e_{\text{м}} > \frac{4}{A}\,(e_{\text{д}} - e_{\alpha}). \tag{73.3}$$

Для α-частицы $e_{\alpha} = \mathscr{E}_{\text{св}}(\alpha)/4 = 7074$ кэВ. В приведенном выше примере $e_{\text{м}} = 7601$ кэВ, $e_{\text{д}} = 7631$ кэВ, так что условие (73.3) выполняется.

Для всех ядер, если не считать самые легкие, энергия связи, приходящаяся на один нуклон, заметно превосходит e_{α} (это видно из только что приведенного примера). Поэтому для возможности α-распада необходимо выполнение условия $e_{\text{д}} > e_{\text{м}}$, т. е. каждый нуклон в дочернем ядре должен быть в среднем связан более прочно, чем в материнском. С возрастанием массового числа средняя энергия связи, приходящаяся на один нуклон, должна убывать, и притом настолько быстро, чтобы выполнялось условие (73.3). Это действительно происходит, и причина этого в том, что с возрастанием Z увеличивается относительная роль кулоновского отталкивания, уменьшающего энергию связи ядра.

2. Характерной особенностью α-распада является очень сильная зависимость периода полураспада $T_{1/2}$ от энергии $\mathscr{E}_{\alpha}$ вылетающей α-частицы. Уменьшение $\mathscr{E}_{\alpha}$ всего на 1 % может увеличить период $T_{1/2}$ в 10 раз, а уменьшение $\mathscr{E}_{\alpha}$ на 10 % может увеличить $T_{1/2}$ на 2–3 порядка.

Периоды полураспада α-активных ядер изменяются в широчайших пределах. Так, для изотопа свинца ${}^{204}_{82}\mathrm{Pb}$ $T_{1/2} = 14 \cdot 10^{17}$ лет, а для изотопа радона ${}^{215}_{86}\mathrm{Rn}$ $T_{1/2} = 10^{-6}$ с. Энергии же вылетающих α-частиц заключены в довольно узких пределах, а именно 4–9 МэВ для тяжелых ядер и 2–4,5 МэВ для ядер редкоземельных элементов.

Связь между величинами $T_{1/2}$ и $\mathscr{E}_\alpha$ была эмпирически установлена Гейгером и Неттолом еще в 1911–1912 гг. и получила название *закона Гейгера–Неттола.* Физический смысл этого закона был понят только после того, как к теории α-распада была применена квантовая механика (см. п. 10). В современной форме закон Гейгера–Неттола имеет вид

$$\lg T_{1/2} = C + \frac{D}{\sqrt{\mathscr{E}_\alpha}}, \tag{73.4}$$

где C и D — постоянные, не зависящие от A и слабо меняющиеся с изменением Z. Закон (73.4) хорошо подтверждается для четно-четных ядер. Если $T_{1/2}$ измерять в секундах, а $\mathscr{E}_\alpha$ в мегаэлектронвольтах, то при некоторых Z для таких ядер величины C и D имеют значения, приведенные в табл. 10. Для нечетных ядер наблюдаются отступления от закона (73.4), иногда очень значительные. Отношение $T_{1/2}^{\text{эксп}}/T_{1/2}^{\text{расч}}$ изменяется от единицы до нескольких тысяч (см. п. 14).

Таблица 10

Z	C	G
84	−50,15	128,8
90	−51,94	139,4
98	−55,40	154,7

3. Чтобы выяснить, для каких элементов периодической системы возможна α-радиоактивность с энергетической точки зрения, представим графически зависимость экспериментально найденной энергии Q α-распада от массового числа A. Рисунок 127 дает такую зависимость для наиболее устойчивых (β-стабильных) изобаров, соответствующих рассматриваемому массовому числу A. Тонкие наклонные прямые линии позволяют приближенно определить энергию α-распада, какой она должна была бы быть, если бы период полураспада составлял 1 час и 10^8 лет соответственно. Видно, что α-распад становится энергетически возможным только при $A \gtrsim 140$. Далее, видно, что кривая имеет два резко выраженных максимума. В этих максимумах и их окрестностях, в соответствии с законом Гейгера–Неттола, период полураспада минимален. В остальных случаях период полураспада получается слишком большим и α-распад практически невозможно наблюдать. Один максимум лежит в области тяжелых элементов, другой — в области редкоземельных элементов. Для этих элементов (в основном тяжелых) и наблюдается α-радиоактивность. Максимум в окрестности $A = 145$ связан с заполнением нейтронной оболочки до магического числа $N = A - Z = 82$, а максимум при $A = 215$ — с заполнением протонной оболочки до того же магического числа $Z = 82$. Заполненным оболочкам, как известно, соответствуют максимальные энергии связи, чем и объясняется происхождение максимумов на кривой рис. 127.

Более полные выводы можно получить, если рассмотреть дополнительные данные, относящиеся к энергии α-распада для различных изотопов одного и того же элемента. Это сделано на рис. 128 для тяжелых элементов. Различные изотопы одного и того же элемента

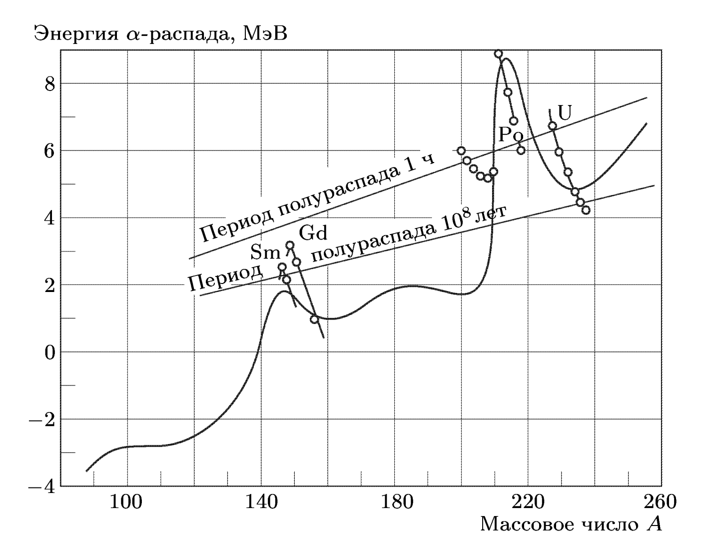


Рис. 127

соединены поочередно сплошными и штриховыми линиями. Светлые точки с направленными вверх стрелками соответствуют случаям, когда энергия α-распада установлена недостаточно точно.

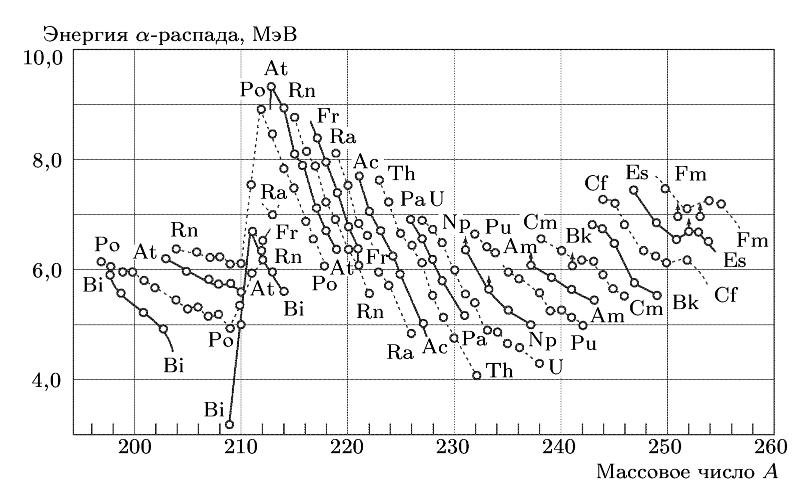


Рис. 128

4. Уменьшенное содержание нейтронов в ядре по сравнению с нормальным или равновесным (дефицит нейтронов) способствует α-распаду, поскольку оно увеличивает относительную роль кулоновского отталкивания между протонами ядра. Противоположно действует относительный избыток нейтронов. Так, редкоземельный элемент гольмий имеет единственный стабильный изотоп $^{165}_{67}$Ho, содержащий 98 нейтронов, тогда как его α-активные изотопы ^{152}Ho, ^{153}Ho, ^{154}Ho, ^{155}Ho нейтронодефицитны: в них числа нейтронов лежат между 85 и 88. Дефицит нейтронов в ядре может уменьшаться за счет процессов α-распада, позитронного β^+-распада и e-захвата электронов электронной оболочки, которые часто конкурируют между собой. Примером могут служить упомянутые выше изотопы гольмия, в которых периоды полураспада по отношению к этим трем процессам сравнимы между собой.

Для ядер, перегруженных нейтронами, в конкуренцию вступает электронный β^--распад. Таким образом, приближение чисел протонов и нейтронов в ядре к их нормальным (равновесным) значениям может идти за счет всех упомянутых процессов: α-распада, $\beta^{\pm}$-распада и e-захвата. Если период полураспада одного из этих конкурирующих процессов отличается от других на много порядков, то часто практически удается наблюдать только наиболее быстро идущий процесс. Например, долгоживущий изотоп нептуния $^{237}_{93}$Np α-активен с периодом полураспада $2\cdot10^6$ лет, у изотопов же ^{232}Np и ^{233}Np α-распад наблюдать не удается. В первом случае он подавлен позитронным распадом с периодом полураспада 13 мин, а во втором — электронным с периодом 2,3 дня.

5. У ядер, начиная с массового числа $A = 232$, к перечисленным типам радиоактивного распада присоединяется *спонтанное деление* (не смешивать с вынужденным делением). Этот процесс вначале идет очень медленно. Так, период полураспада по отношению к делению ядер для изотопа урана $^{238}_{92}$U составляет $8 \cdot 10^{15}$ лет. Но с увеличением массового числа он быстро уменьшается. Для изотопа курчатовия $^{260}_{104}$Ku период полураспада по отношению к спонтанному делению составляет десятые доли секунды. Спонтанное деление, по-видимому, и наложит предел на возможность получения новых трансурановых элементов.

6. Познакомимся теперь с главными чертами теории α-распада, основы которой были заложены в 1928 г. независимо друг от друга Г.А. Гамовым (1904–1968), с одной стороны, и Гёрни (1899–1953) и Кондоном (1902–1974) — с другой. Введем упрощающее предположение, что α-частицы уже существуют внутри атомных ядер. При такой идеализации материнское ядро состоит из дочернего ядра и α-частицы. Эта идеализация, вероятно, не соответствует действительности. Скорее всего, α-частица образуется из протонов и нейтронов перед вылетом из ядра. Однако указанная идеализация приводит в основном к правильным результатам. Мы вернемся к этому вопросу в п. 14.

На расстояниях от ядра, где практически перестают действовать ядерные силы, остается только кулоновское отталкивание и потенциальная функция U представляется формулой $U = zZe^2/r$, где Ze —

заряд дочернего ядра, а ze — заряд α-частицы. Для α-частицы $z = 2$. Однако мы будем писать z вместо 2, чтобы учесть гипотетическую возможность вылета из ядра не только настоящих α-частиц, но и других образований из нуклонов, для которых $z \neq 2$. Но кулоновское отталкивание на малых расстояниях от ядра должно перейти в притяжение, обусловленное *ядерными силами*, иначе α-частицы в ядре не могли бы удерживаться. Точный закон действия ядерных сил не известен. Известно только, что ядерные силы очень резко убывают с расстоянием. Поэтому для упрощения и самой возможности расчета потенциальная функция U аппроксимируется модельной. Считая ядро сферическим, можно предполагать, что U зависит только от расстояния r до центра дочернего ядра. Модельная функция $U(r)$ принимается равной

$$U(r) = \begin{cases} U_0 = \text{const} & \text{при } r < R, \\ zZe^2/r & \text{при } r > R, \end{cases} \tag{73.5}$$

где R — радиус дочернего ядра. Она представлена на рис. 129 жирной кривой, верхняя часть которой изображена штриховой линией, чтобы отметить, что в переходной области левая часть кривой $U(r)$ в действительности плавно переходит в кулоновскую часть, расположенную правее. Вертикально поднимающийся участок кривой при $r = R$ есть, конечно, идеализация. В действительности этот участок поднимается вверх очень круто, но не вертикально.

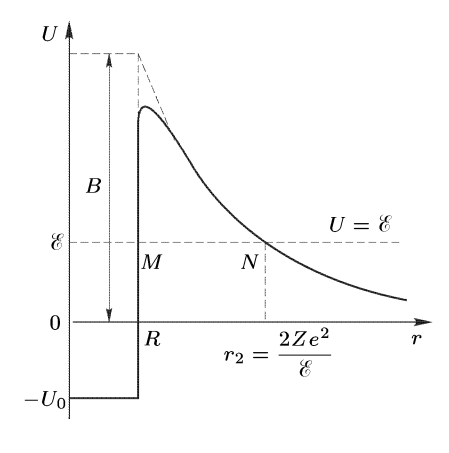


Рис. 129

Кривая $U(r)$ представляет собой *потенциальный барьер*, который должна преодолеть α-частица, чтобы вылететь из ядра. Какова высота этого барьера, до каких расстояний можно применять закон Кулона — на эти вопросы, конечно, нельзя дать вполне точного ответа. Однако Резерфорд в 1927 г. установил, что длиннопробежные α-частицы $^{212}_{84}$Po (старое обозначение — ThC′), обладавшие энергией 8,8 МэВ, рассеиваются тяжелыми радиоактивными ядрами (испускающими α-частицы меньшей энергии) в соответствии с формулой (9.3), выведенной в предположении применимости закона Кулона. Никаких аномалий рассеяния, которые свидетельствовали бы о ядерных взаимодействиях α-частиц $^{212}_{84}$Po с рассматриваемыми ядрами, не наблюдалось. Отсюда следует, что на всех расстояниях, до которых может сближаться α-частица $^{212}_{84}$Po с рассеивающим ядром, действуют *только кулоновские* силы отталкивания, а высота кулоновского потенциального барьера во всяком случае не меньше 8,8 МэВ.

Высоту барьера B можно оценить по формуле

$$B = \frac{zZe^2}{R}, \tag{73.6}$$

в которую радиус ядра входит в первой степени. Поэтому формула мало чувствительна к изменениям R. Полагая $Z = 90$ и принимая для R (возможно, несколько завышенное) значение 10^{-12} см, получим $B \approx 26$ МэВ.

7. Отметим теперь парадокс, разрешить который классическая физика оказалась бессильной. Уран ^{238}U, например, испускает α-частицы с энергией 4,2 МэВ, а радий ^{226}Ra — с энергией 4,8 МэВ. Эти значения много меньше максимальной потенциальной энергии $U_{\text{макс}}$ и во всяком случае меньше энергии α-частиц 8,8 МэВ, которые использовались в опытах Резерфорда. Так же обстоит дело с подавляющим числом α-активных ядер. Но для преодоления потенциального барьера полная энергия α-частицы по классическим представлениям должна быть не меньше $U_{\text{макс}}$. Энергия сохраняется. Поэтому после вылета из ядра кинетическая энергия α-частицы (а только таковой она и обладает на достаточно большом расстоянии от ядра) должна быть не меньше $U_{\text{макс}}$. В действительности же эта энергия много меньше.

Парадокс возникает потому, что к движению α-частицы внутри ядра и вблизи его границы были применены законы и понятия *классической механики.* А в этом случае так поступать нельзя. В самом деле, будем рассуждать классически и посмотрим, будет ли при этом выполняться принцип неопределенностей Гейзенберга. Характерная энергия α-частицы при α-распаде составляет 5 МэВ. В ядре ей соответствует классическая скорость $15 \cdot 10^8$ см/с и импульс 10^{-14} г $\cdot$ см/с. Глубина проникновения x частицы внутрь барьера — порядка радиуса ядра, т. е. 10^{-12} см. Таким образом, $px \sim 10^{-26}$ г $\cdot$ см^2/с. Произведение неопределенностей координаты и импульса $\Delta x \cdot \Delta p$ еще меньше. Оно порядка и, может быть, даже меньше постоянной Планка. Это указывает на неприменимость понятий и законов классической механики к движению α-частицы внутри ядра и вблизи его границ.

8. Теория α-распада должна строиться на основе *квантовой механики*, что и было сделано Г. А. Гамовым после того, как он на семинаре, руководимом Л. И. Мандельштамом, ознакомился с тогда еще не опубликованной работой Мандельштама и Леонтовича, в которой были заложены основы прохождения ψ-волн и связанных с ними частиц через потенциальный барьер (см. § 28). Как уже указывалось, независимо теория α-распада была разработана Гёрни и Кондоном.

Уточняя терминологию, мы в этом параграфе будем понимать под потенциальным барьером часть потенциальной кривой U, заключенную между классическими точками поворота M и N (см. рис. 129), в которых потенциальная функция U равна полной энергии частицы $\mathscr{E}$. Таким образом, внутри потенциального барьера всюду $U > \mathscr{E}$. Часто говорят, что внутри барьера кинетическая энергия частицы отрицательна, а ее скорость чисто мнимая. Мы будем избегать подобных выражений, поскольку они физически бессмысленны и основаны

на распространении классических соотношений и понятий на область пространства, где они неприменимы.

Суть дела была разъяснена в § 28 и заключается в следующем. Состояние частицы описывается волновой функцией ψ. Прохождение волны ψ через барьер есть *детерминистический процесс*, описываемый уравнением Шредингера. Для падающей волны область $U > \mathscr{E}$ представляет какое-то препятствие, но через это препятствие волна может проходить, хотя и с некоторым ослаблением. Однако волновая функция ψ есть величина вспомогательная: все реально наблюдаемые величины связаны с ней *вероятностными соотношениями.* Поскольку функция ψ всюду отлична от нуля, существует *конечная вероятность* обнаружить частицу как внутри барьера, так и за его пределами. В этом смысле и говорят о заходе частицы в классически недостижимую область $U > \mathscr{E}$ и о прохождении ее через потенциальный барьер. При наличии такой области говорят о *подбарьерном прохождении* частицы или *туннельном эффекте*, хотя эти термины и не совсем удачны, поскольку они могут породить неверное представление о прохождении частицы как детерминистическом процессе. В случае же, когда всюду $\mathscr{E} > U$, говорят о *надбарьерном прохождении.* Применяя такую терминологию, можно сказать, что *α-распад есть подбарьерное прохождение частицы.* Внутри барьера деление полной энергии $\mathscr{E}$ на кинетическую и потенциальную лишено смысла. Но далеко за пределами атомного ядра движение α-частицы — классическое, а вся энергия ее — кинетическая.

Приближенная формула (28.17) была получена для плоского потенциального барьера из волнового уравнения Шредингера для стационарных состояний. Но если происходит α-распад, то состояние системы из дочернего ядра и α-частицы, строго говоря, *не стационарно*: имеется поток вероятности из центра ядра, не исчезающий на бесконечности. Поэтому формула (28.17) может быть справедлива только для *достаточно медленных* процессов, которые могут рассматриваться как *приближенно стационарные.* К таким процессам и относится α-распад. Для определения проницаемости барьера D сферическую поверхность ядра можно приближенно считать плоской, заменив, однако, в формуле (28.17) пределы интегрирования x_1 и x_2, соответствующие классическим точкам поворота, на $r_1 = R$ и $r_2 = zZe^2/\mathscr{E} = BR/\mathscr{E}$ (см. рис. 129). Дочернее ядро можно считать неподвижным, поскольку его масса значительно превосходит массу α-частицы. Чтобы получить вероятность распада в одну секунду λ (постоянную распада), проницаемость барьера D (28.17) надо умножить еще на предэкспоненциальный множитель ν, учитывающий вероятность образования α-частицы и ее появления на границе ядра. Таким путем получается формула

$$\lambda = \nu \exp\left[-\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-\mathscr{E})}\,dr\right]. \tag{73.7}$$

Наибольшие трудности вызывает вычисление величины ν. Однако для наиболее существенного понимания эту величину достаточно оценить грубо, так как постоянная распада λ зависит от нее несравненно слабее, чем от показателя экспоненты. Оценим ν из классических соображений, как это делалось в первоначальных работах Гамова. Положим $\nu = v/R$, где v — средняя скорость α-частицы в ядре. При такой интерпретации ν представляет собой приближенно среднее число соударений, которые испытывает α-частица в одну секунду с поверхностью ядра. Скорость v приближенно оценим из соотношения неопределенностей $mv \cdot R \sim \hbar$. В результате получаем

$$\lambda = \frac{\hbar}{mR^2} \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m(U-\mathscr{E})}\,dr\right]. \tag{73.8}$$

Как и следовало ожидать, в классическом пределе ($\hbar \to 0$) формула (73.8) дает $\lambda = 0$, т. е. α-распад становится невозможным. К этому пределу вплотную приближается случай долгоживущих α-радиоактивных ядер.

В случае кулоновского барьера $U = zZe^2/r$. Здесь интеграл в (73.8) вычисляется подстановкой $2m(U-\mathscr{E}) = x^2$. В итоге находим

$$\lambda = \frac{\hbar}{mR^2}\, e^{-\gamma}, \tag{73.9}$$

где

$$\gamma = \frac{2R\sqrt{2mB}}{\hbar}\left(\sqrt{\frac{B}{\mathscr{E}}}\arccos\sqrt{\frac{\mathscr{E}}{B}} - \sqrt{1-\frac{\mathscr{E}}{B}}\right), \tag{73.10}$$

$B = zZe^2/R$ — высота кулоновского барьера, $\mathscr{E}$ — энергия α-частицы, вылетевшей из ядра (или значение потенциальной функции U в классических точках поворота, см. рис. 129).

9. В качестве примера произведем оценку постоянной распада λ для ^{238}U, полагая $Z = 90$, $R = 10^{-12}$ см, $\mathscr{E} = 4{,}2$ МэВ, $B = 26$ МэВ. При таких параметрах выражение в круглых скобках (73.10) равно 1,963. Далее,

$$\frac{2R\sqrt{2mB}}{\hbar} = \frac{2R\sqrt{2mc^2B}}{\hbar c} = \frac{2\cdot 10^{-12}\sqrt{2\cdot 4\cdot 938\cdot 26}}{1{,}973\cdot 10^{-11}} = 44{,}78,$$

$\gamma = 87{,}92$; $e^{-\gamma} = 6{,}59\cdot 10^{-39}$; $\hbar/mR^2 = 1{,}157\cdot 10^{20}$; $\lambda = 7{,}62 \times \times 10^{-19}$ с$^{-1}$; $\tau = 1/\lambda = 131\cdot 10^{16}$ с $= 152\cdot 10^{11}$ сут $= 4{,}16\cdot 10^{10}$ лет; $T_{1/2} = \tau/\ln 2 = 2{,}88\cdot 10^{10}$ лет. Для урана ^{238}U экспериментальное значение периода полураспада $T_{1/2} = 4{,}56\cdot 10^9$ лет. Это не так уж сильно отличается от вычисленного, если учесть известный произвол при выборе исходных значений параметров для расчета, а также грубо приближенный характер самой теории α-распада.

10. Из формулы (73.9) с учетом соотношения $\tau = 1/\lambda$ получается

$$\ln\tau = \gamma - \ln\frac{\hbar}{mR^2}.$$

Если предположить, что $\mathcal{E}/B \ll 1$, то можно получить и приближенный закон Гейгера–Неттола. В этом приближении

$$\sqrt{1-\frac{\mathcal{E}}{B}} \approx 1, \quad \arccos\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{B}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{B}} \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{B}}.$$

Значит,

$$\ln\tau = \frac{2R\sqrt{mB}}{\hbar}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{B}{\mathcal{E}}} - 2\right) - \ln\frac{\hbar}{mR^2},$$

или

$$\ln\tau = C' + \frac{D'}{\sqrt{\mathcal{E}}}, \tag{73.11}$$

где величины C' и D' слабо зависят от Z, а потому могут рассматриваться как постоянные. Но (73.11) есть лишь другая форма закона Гейгера–Неттола. Этот закон объясняет, почему при изменении энергий α-частиц в узких пределах (например, вдвое) периоды полураспада меняются на много порядков (например, на 10–20). Но этот факт, конечно, следует и из общих формул (73.7) и (73.8), которые справедливы и без ограничения $\mathcal{E} \ll B$. Суть дела заключается в том, что в выражении (73.7) для показателя экспоненты γ малая величина $\hbar$ стоит в знаменателе. С этим и связана узость диапазона, в котором могут меняться энергии α-частиц радиоактивных ядер. Из тяжелых ядер α-частицы с энергиями выше 9 МэВ вылетают практически мгновенно, тогда как при энергиях ниже 4 МэВ они живут в ядре настолько долго, что α-распад не удается зарегистрировать. Для редкоземельных α-активных ядер обе эти цифры снижаются из-за уменьшения радиуса ядра и высоты потенциального барьера.

11. Из формулы (73.9) видно, что постоянная распада λ сильно зависит от радиуса ядра, поскольку последний входит не только в предэкспоненциальный множитель, но и в показатель экспоненты $-\gamma$ (через высоту барьера B). Поэтому используя формулы (73.9) и (73.10), из измерений λ и $\mathcal{E}$ для α-распада можно довольно точно определить радиус ядра. Такая возможность сделается еще более ясной, если заметить, что спускающаяся вправо ветвь кривой для U на рис. 129 при заданном Z полностью определяется законом Кулона. Форма потенциального барьера однозначно задается положением левой вертикальной стенки, а она в свою очередь определяет радиус ядра. Полученные таким путем значения радиусов ядер превышают на 20–30 % значения, находимые по рассеянию быстрых электронов. Объясняется это тем, что электроны подвергаются действию только электрически заряженных нуклонов, т. е. протонов, а нейтроны на них не действуют. Метод рассеяния позволяет поэтому определить размеры той области ядра, которая заполнена протонами. Методом же α-распада измеряется

расстояние между центрами ядра и α-частицы, на котором перестают действовать ядерные силы. Поэтому этот метод дает радиус ядра, увеличенный на сумму радиуса α-частицы и радиуса действия ядерных сил.

12. Во всем изложенном выше предполагалось, что α-частица вылетает из ядра с нулевым орбитальным моментом импульса, т. е. в s-состоянии ($l = 0$). Допустим теперь, что $l \neq 0$. В классической физике орбитальный момент можно учесть, перейдя в систему отсчета, вращающуюся вместе с частицей, если к потенциальной функции добавить центробежную потенциальную энергию $U_{\text{цб}} = \mathbf{L}^2/(2mr^2)$, где $\mathbf{L}$ — момент импульса. В квантовой механике можно поступить так же, но учесть квантование момента по формуле $\mathbf{L}^2 = \hbar^2 l(l+1)$. Таким образом, следует положить

$$U = U_{\text{кул}} + U_{\text{цб}} = \frac{zZe^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}.$$

Центробежный барьер создается центробежной силой, а эта сила стремится удалить α-частицу от ядра. Казалось бы, что она способствует α-распаду. Но такое заключение было бы правильным, если бы происходил *надбарьерный* процесс. Для *подбарьерного* процесса, каковым является α-распад, все происходит наоборот. *Центробежная сила повышает потенциальный барьер и увеличивает его ширину, т. е. она уменьшает постоянную распада λ и увеличивает период полураспада $T_{1/2}$.*

Однако влияние центробежного барьера не может быть очень значительным. Действительно, момент $\mathbf{L}$ α-частицы в ядре по порядку величины можно оценить из соотношения неопределенностей $mvR \sim \hbar$ или $|\mathbf{L}| \sim \hbar$, так что l может быть не больше нескольких единиц, например $l < 5$. В максимуме

$$U_{\text{цб}} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mR^2} = \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{2mc^2 R^2} < \frac{(1{,}973)^2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 10^{-22}}{2 \cdot 4 \cdot 938 \cdot 10^{-24}} \approx 1{,}5 \text{ МэВ},$$

что почти в 20 раз меньше высоты кулоновского барьера для ядер с $Z \approx 90$ (см. п. 6). Кроме того, центробежная энергия быстрее убывает с расстоянием, чем кулоновская (соответственно как $1/r^2$ и $1/r$). Ее наличие мало меняет форму потенциальной кривой $U_{\text{кул}}(r)$. Поэтому центробежный барьер, как правило, не меняет порядок величины периода полураспада $T_{1/2}$. В крайнем случае он увеличивает его на порядок.

13. Атомное ядро представляет собой связанную систему, а потому энергетические уровни его дискретны. При испускании α-частицы из материнского ядра, находившегося в определенном энергетическом состоянии, возникает дочернее ядро также в определенном энергетическом состоянии. Разность энергий этих ядер уносится α-частицей и дочерним ядром (ядром отдачи). Если бы переход совершался из основного состояния материнского ядра в основное состояние дочернего ядра, то получилась бы α-частица только одной строго определенной энергии. Поскольку пробег α-частицы определяется ее энергией, то

в камере Вильсона, казалось бы, должны получаться треки α-частиц одной и той же длины. Однако, как правило, длина треков α-частиц при распаде ядер одного и того же сорта, а следовательно, и их энергия оказываются различными. Это явление получило название *тонкой структуры* α-распада. Оно заключается в том, что наряду с основными α-частицами наблюдаются частицы меньших, но очень близких энергий. Такие частицы возникают при переходе материнского ядра из основного состояния в возбужденные состояния дочернего ядра. Однако переходы на высокие уровни возбужденного дочернего ядра порождают α-частицы низких энергий, а потому в соответствии с законом Гейгера–Неттола они маловероятны. По этой причине тонкая структура α-спектра, как правило, связана с переходами на возбужденные уровни несферических дочерних ядер. У таких ядер имеются уровни с небольшими энергиями возбуждения, возникающие из-за вращения ядер. Переходы на такие уровни и порождают α-частицы с близкими энергиями, которые в соответствии с законом Гейгера–Неттола должны происходить с вероятностями, сравнимыми с вероятностями переходов в основное состояние. Поэтому-то тонкая структура α-спектров встречается довольно часто.

У некоторых α-активных ядер при α-распаде могут возникать *длиннопробежные* α-частицы, энергии которых больше энергий основных α-частиц. Примером могут служить длиннопробежные α-частицы, испускаемые ядрами изотопов полония ${}^{212}_{84}\mathrm{Po}(\mathrm{ThC}')$ и ${}^{214}_{84}\mathrm{Po}(\mathrm{RaC}'')$. Длиннопробежные α-частицы возникают при переходах из возбужденных состояний материнского ядра в основные (или близкие к ним вращательные) состояния дочернего ядра. Но возбуждение материнского ядра может быть снято не только в результате испускания длиннопробежных α-частиц, но и в результате испускания γ-квантов. Последний процесс идет со *значительно большей* вероятностью, чем первый. Поэтому испускание длиннопробежных α-частиц наблюдается довольно редко.

14. Как уже указывалось (см. п. 6), изложенная теория α-распада, приводящая к формуле (73.7), предполагает, что α-частица *уже существует* в ядре. Теория приближенно рассчитывает только вероятность выхода α-частицы из ядра. На самом деле этому процессу предшествует *образование* α-частицы в ядре из составляющих ее нуклонов — двух протонов и двух нейтронов.

Учет этого обстоятельства, а также рассмотрение поведения образовавшейся α-частицы внутри ядра потребовали бы подробного рассмотрения физических процессов, происходящих внутри ядра, чего изложенная теория совсем не делает. Однако несомненно, что вероятностный процесс выхода α-частицы из ядра теория описывает правильно. Поэтому и в более полной теории формула (73.7) должна сохраниться, но в ней должно быть выяснено происхождение предэкспоненциального множителя ν и дано его количественное выражение. Этого еще не сделано, хотя множитель ν оценивался и с другой точки зрения, отличной от той, которая была принята Гамовым.

В свете сделанного замечания не приходится удивляться, что α-распады разделяются на *облегченные* и *необлегченные.* Облегченным называется α-распад, для которого достаточно хорошо выполняется формула (73.8). Если же реальный период полураспада превышает рассчитанный по этой формуле более чем на порядок (наблюдаются отклонения примерно на два–три порядка), то процесс называется необлегченным (ср. с изложенным в п. 2). Причин возникновения необлегченных распадов мы касаться не будем, поскольку этот вопрос выяснен еще недостаточно, хотя и имеются качественные соображения относительно указанных причин. Отметим только, что облегченные распады обычно происходят в четно-четных ядрах, а необлегченные — в нечетно-четных и нечетно-нечетных.

§ 74. Бета-распад

1. *Бета-распад* есть самопроизвольный процесс, в котором нестабильное ядро ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ превращается в ядро-изобар ${}^{A}_{Z+1}\mathrm{X}$ или ${}^{A}_{Z-1}\mathrm{X}$. Конечным результатом этого процесса является превращение в ядре нейтрона в протон или протона в нейтрон. Можно сказать, что β-распад есть не внутриядерный, а *внутринуклонный* процесс. При нем, следовательно, происходят более глубокие изменения вещества, чем при α-превращении. Поэтому и его теория более сложна и разработана с меньшей полнотой, чем теория α-распада.

Различают три вида β-распада:

1) *электронный* β^--распад, в котором ядро испускает электрон, а потому зарядовое число Z увеличивается на единицу;

2) *позитронный* β^+-распад, в котором ядро испускает позитрон и по этой причине его зарядовое число уменьшается на единицу;

3) *электронный захват* (e-захват), в котором ядро поглощает один из электронов электронной оболочки, а потому зарядовое число уменьшается на единицу. Обычно электрон поглощается из K-слоя атома, поскольку этот слой ближе всего находится от ядра. В этом случае e-захват называют также K-захватом. Электрон может поглощаться и из L- или M-слоя и т. д., но эти процессы значительно менее вероятны. Электронный захват имеет особенно существенное значение в случае тяжелых ядер, у которых K-слой расположен близко к ядру. Можно сказать, что в этом случае у электрона K-слоя имеется конечная вероятность находиться внутри ядра. Электронный захват всегда сопровождается рентгеновским излучением. Допустим, например, что был захвачен электрон из K-слоя. На освободившееся место в K-слое переходит электрон из L-слоя. На освободившееся место в L-слое в свою очередь переходит электрон из M-слоя и т. д. В результате возбуждается весь спектр характеристического рентгеновского излучения атома. По наблюдению такого спонтанного характеристического излучения и было открыто явление e-захвата.

2. Сформулируем условие энергетической возможности всех перечисленных процессов. В случае β^--распада в конечном состоянии получается ядро, электрон и, возможно, какая-то одна или несколько

неизвестных частиц, которые при обычных условиях опыта ускользают от наблюдения. Но эти неизвестные частицы, если они действительно существуют, уносят определенную энергию. Поэтому для возможности β^--распада энергия (масса) начального ядра во всяком случае должна превосходить сумму энергий (масс) конечного ядра и электрона:

$$M(Z, A) > M(Z+1, A) + m_e, \tag{74.1}$$

где M означает массу ядра. Однако в таблицах всегда приводятся не массы ядер M, а массы атомов $M_{ат}$. Поэтому целесообразно выразить условие (74.1) через $M_{ат}$. Для этого к обеим частям неравенства (74.1) прибавим массу Z электронов Zm_e. Тогда получим

$$M_{ат}(Z, A) > M_{ат}(Z+1, A) \quad (\beta^-\text{-распад}). \tag{74.1a}$$

Здесь мы пренебрегли различием энергий связи электронов в атомах. Это различие находится за пределами точности самых прецизионных измерений. Смысл условия (74.1a) легко также уяснить из следующих соображений. Электронный β^--распад есть процесс, происходящий внутри атома. Один из нейтронов ядра превращается в протон с рождением электрона. Электрон захватывается электронной оболочкой, а заряд ядра возрастает на единицу. В конечном состоянии возникает атом с зарядовым числом $Z+1$. Этот внутренний процесс может идти самопроизвольно только с уменьшением массы атома, что и выражает условие (74.1a).

Аналогично, для β^+-распада

$$M(Z, A) > M(Z-1, A) + m_e, \tag{74.2}$$

так как масса позитрона равна массе электрона. После прибавления Zm_e к обеим частям неравенства получается

$$M_{ат}(Z, A) > M_{ат}(Z-1, A) + 2m_e \quad (\beta^+\text{-распад}). \tag{74.2a}$$

Позитронный β^+-распад есть также процесс, происходящий внутри ядра атома. В результате этого процесса один из протонов ядра превращается в нейтрон с рождением позитрона. Освобождается, кроме того, один электрон из электронной оболочки атома. В результате возникает система, состоящая из атома с числом электронов $Z-1$, освободившихся электрона и позитрона (общей массой $2m_e$). Условие (74.2a) и выражает, что для возможности β^+-распада необходимо, чтобы масса атома в начальном состоянии превосходила суммарную массу образовавшейся системы.

Наконец, в случае e-захвата в начальном состоянии имеются ядро (Z, A) и электрон, а в конечном — ядро $(Z-1, A)$ без электрона. Поэтому энергетическое условие e-захвата записывается в виде

$$M(Z, A) + m_e > M(Z-1, A), \tag{74.3}$$

или после прибавления к обеим частям неравенства по Zm_e

$$M_{ат}(Z, A) > M_{ат}(Z-1, A) \quad (e\text{-захват}). \tag{74.3a}$$

Это условие также непосредственно очевидно, так как в начальном состоянии имеется атом (Z, A), а в результате e-захвата в конечном состоянии возникает только атом $(Z-1, A)$ и больше ничего, что обычно доступно наблюдению.

3. Для некоторых ядер могут одновременно выполняться условия (74.1) и (74.2). Из второго из них следует, что будет выполняться и условие (74.3). В таком случае ядро (Z, A) может испытывать все три вида β-превращений. Например, ядра $^{64}_{29}$Cu в 40 % случаев испускают электроны, в 20 % — позитроны, а в 40 % случаев они испытывают e-захват.

Позитронный β-распад и электронный захват в случае исходных ядер одного и того же сорта приводят к одинаковым окончательным состояниям. Поэтому эти два процесса часто идут одновременно, конкурируя друг с другом. Как уже выяснено, условие (74.2а) позитронного распада вытекает из условия (74.3а) электронного захвата. Поэтому принято говорить, что электронный захват энергетически более выгоден, чем позитронный β-распад. В частности, если

$$M_{\text{ат}}(Z-1, A) < M_{\text{ат}}(Z, A) < M_{\text{ат}}(Z-1, A) + 2m_{\text{e}},$$

или

$$0 < [M_{\text{ат}}(Z, A) - M_{\text{ат}}(Z-1, A)] < 2m_{\text{e}},$$

то электронный захват разрешен, а позитронный β-распад запрещен. Примером может служить ядро бериллия $^{7}_{4}$Be. В этом случае $Z = 4$, $A = 7$. По таблицам находим $M_{\text{ат}}(4,7) - M_{\text{ат}}(3,7) = 0{,}8616$ МэВ, тогда как $2m_{\text{e}} = 1{,}022$ МэВ. Поэтому электронный захват наблюдается, а позитронный β-распад невозможен.

Если энергетически возможны оба конкурирующих процесса — β^+-распад и e-захват, — то для легких и средних ядер обычно преобладает позитронный распад, который часто практически полностью подавляет e-захват. Это связано с тем, что при электронном захвате вероятность обнаружения электрона даже из K-слоя в объеме, занятом ядром, исчезающе мала по сравнению с вероятностью обнаружения его вне ядра. Отношение этих вероятностей порядка $(R/r_0)^3$, где R — радиус ядра (10^{-12}–10^{-13} см), а r_0 — радиус K-слоя (10^{-8}–10^{-10} см), так что указанное отношение меняется в пределах 10^{-15}–10^{-6}. При переходе к тяжелым ядрам R увеличивается, а r_0 уменьшается. Оба эти обстоятельства ведут к увеличению $(R/r_0)^3$. Поэтому для тяжелых ядер, перегруженных протонами, обычно основным β-процессом является электронный захват. Отметим попутно, что в мезоатомах, где электрон замещен отрицательным мюоном, масса которого примерно в 207 раз больше массы электрона (а следовательно, r_0 во столько же раз меньше), отношение $(R/r_0)^3$ возрастает на семь порядков. Поэтому в этом случае вероятность K-захвата (мюона) увеличивается примерно на семь порядков, и в тяжелых ядрах этот процесс становится более вероятным, чем распад мюона, среднее время жизни которого $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ с.

4. Масса нейтрона $m_{\text{n}} = 939{,}5731$ МэВ несколько больше массы протона $m_{\text{p}} = 938{,}2796$ МэВ. Разница масс составляет 1,2935 МэВ.

Поэтому энергетически возможно самопроизвольное превращение свободного нейтрона в протон. Такое превращение действительно наблюдается — среднее время жизни свободного нейтрона составляет около 15,3 мин, а период полураспада — 10,6 мин. Самопроизвольное превращение свободного протона в нейтрон энергетически невозможно. Но превращение протонов в нейтроны возможно и действительно идет внутри атомных ядер — именно в этом состоит само явление позитронного β-распада. Недостаток энергии протона пополняется за счет энергии атомного ядра.

Альфа-распад наблюдается только у самых тяжелых ядер и некоторых ядер редкоземельных элементов. Напротив, β-активные ядра гораздо более многочисленны. Для каждого Z (по крайней мере для надежно исследованных $Z < 100$) без исключения существуют нестабильные изотопы, обладающие $\beta^{\pm}$-активностью. Энергия, выделяющаяся в процессе β-распада, лежит в пределах от 0,0186 МэВ (${}^3_1\mathrm{H} \to {}^3_2\mathrm{He}$) до 16,6 МэВ (${}^{12}_7\mathrm{N} \to {}^{12}_6\mathrm{C}$). Период полураспада β-активных ядер меняется от 10^{-2} с (для ${}^{12}_4\mathrm{Be}$) до $4 \cdot 10^{12}$ лет (для ${}^{187}_{75}\mathrm{Re}$).

Простейшим примером электронного β-распада (после β-распада нейтрона) является распад трития:

$$ {}^3_1\mathrm{H}\frac{\beta^-}{12\ \text{лет}} \to {}^3_2\mathrm{He}. $$

Примером позитронного β-распада может служить распад ядра ${}^{11}_6\mathrm{C}$:

$$ {}^{11}_6\mathrm{C}\frac{\beta^+}{20{,}4\ \text{мин}} \to {}^{11}_5\mathrm{B}. $$

Наконец, в качестве примера радиоактивных ядер, испытывающих K-захват, приведем легкий изотоп берилия ${}^7_4\mathrm{Be}$, который после K-захвата превращается в изотоп лития ${}^7_3\mathrm{Li}$:

$$ {}^7_4\mathrm{Be} \to \frac{\mathrm{K}}{53{,}6\ \text{дня}} \to {}^7_3\mathrm{Li}. $$

(Во всех приведенных примерах время означает период полураспада.)

5. При β-распаде ядро превращается в соседний с ним изобар, т. е. меняется зарядовое число Z, но массовое число A остается неизменным. Применим к этому процессу полуэмпирическую формулу Вейцзеккера (64.6). Для исследования зависимости энергии ядра $(-\mathscr{E}_{\text{св}})$ от Z в этой формуле следует положить $A = \text{const}$. Тогда найдем формулу вида

$$ -\mathscr{E}_{\text{св}} = aZ^2 + bZ + c, $$

где a, b, c — постоянные. Графиком функции $-\mathscr{E}_{\text{св}} = -\mathscr{E}_{\text{св}}(Z)$ будет парабола, причем, разумеется, аргумент Z может принимать только целочисленные значения. Даже получатся целых три параболы, сдвинутые одна относительно другой вверх и вниз. Ниже всех лежит парабола для четно-четных ядер (Z четное, N четное), выше всех — для нечетно-нечетных ядер (Z нечетное, N нечетное), а посередине между ними — парабола для нечетных A.

Рассмотрим сначала случай нечетных A. Тогда функция $-\mathscr{E}_{\text{св}}(Z)$ однозначна. Возможные значения Z при заданном A изображены кружками на рис. 130. Однако не все ядра, соответствующие этим значениям, стабильны. Стабильным ядрам соответствует минимум энергии $-\mathscr{E}_{\text{св}}$. Поэтому ядра *1*, *2*, *3*, ... будут испытывать последовательные β-превращения с испусканием электронов и с повышением зарядового числа Z на единицу. Ядра же *8*, *7*, *6*, ..., испустив позитрон или испытав e-захват, будут в свою очередь уменьшать зарядовое число на единицу. Одно из оставшихся двух ядер, у которого энергия больше, так же испытает β-превращение. В результате останется, вообще говоря, только одно стабильное ядро. Поэтому при нечетном A, как правило, может существовать только один изобар. Но возможны и исключения из этого правила. Это будет тогда, когда в результате β-превращений возникнут два ядра *4* и *5* с одинаковыми значениями энергии — два стабильных изобара. Зарядовые числа этих изобаров должны отличаться на единицу. Известны всего три таких изобарных пары: $^{113}_{48}$Cd и $^{113}_{49}$In, $^{115}_{49}$In и $^{115}_{50}$Sn, а также $^{187}_{75}$Re и $^{187}_{76}$Os.

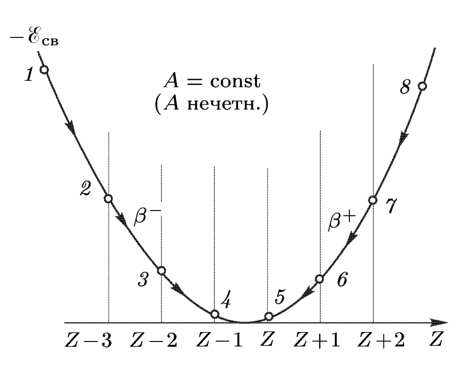


Рис. 130

В случае четных A функция $-\mathscr{E}_{\text{св}}(Z)$ двузначна и представляется двумя параболами. Нижней параболе соответствуют четные, верхней — нечетные значения Z. Здесь также путем соответствующих β-превращений осуществляется переход ядра в энергетически более низкие состояния. На рис. 131 он завершается двумя изобарами *3* и *4*,

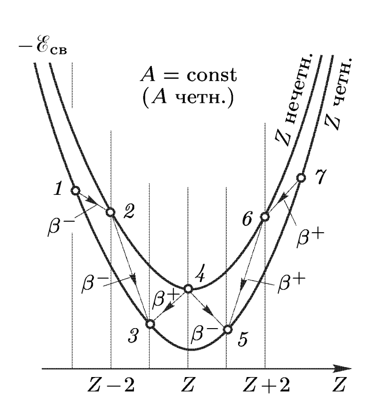


Рис. 131

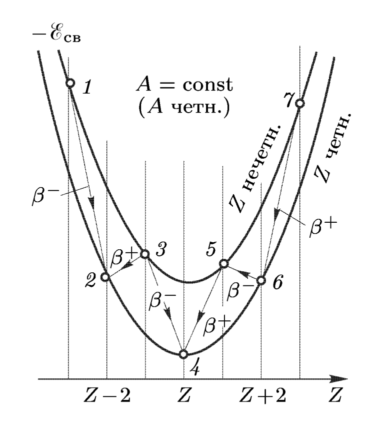


Рис. 132

лежащими на нижней параболе, т. е. имеющими четные значения Z. В подобных случаях массовому числу A соответствуют два изобара, зарядовые числа которых отличаются на два. Переход одного из этих изобар в другой, более устойчивый, может быть осуществлен путем одновременного испускания либо двух электронов, либо двух позитронов. Но такой двойной β-распад хотя в принципе и возможен, но крайне мало вероятен. Рисунок 132 соответствует случаю, когда процессы β-распада заканчиваются тремя стабильными изобарами *2*, *4* и *6*. Все они также лежат на нижней параболе, причем зарядовые числа Z соседних изобаров отличаются на 2. Превращения каждого из изобаров в соседний, энергетически более устойчивый, могли бы осуществляться путем двойного β-распада, а поэтому они не наблюдаются.

Таким образом, в случае четного A могут существовать два и даже три стабильных изобара. Разумеется, может существовать и только один стабильный изобар. Такое положение имеет место, в особенности для легких ядер. Наиболее легкой при четных A является стабильная изобарная пара $^{40}_{18}\mathrm{Ar}$ и $^{40}_{20}\mathrm{Ca}$.

Особо следует отметить случай, изображенный на рис. 133. Здесь четно-четные ядра *1* и *3*, лежащие на нижней параболе, энергетически менее устойчивы, чем нечетно-нечетное ядро *2*, лежащее на верхней параболе. Ядро *1* испытывает электронный, а ядро *3* — позитронный β-распад, и в обоих случаях возникает ядро *2*. Этим можно объяснить существование всех нечетно-нечетных (с четными A) стабильных ядер: $^{2}_{1}\mathrm{H}$, $^{6}_{3}\mathrm{Li}$, $^{10}_{5}\mathrm{B}$ и $^{14}_{7}\mathrm{N}$, о которых уже говорилось выше (см. § 64).

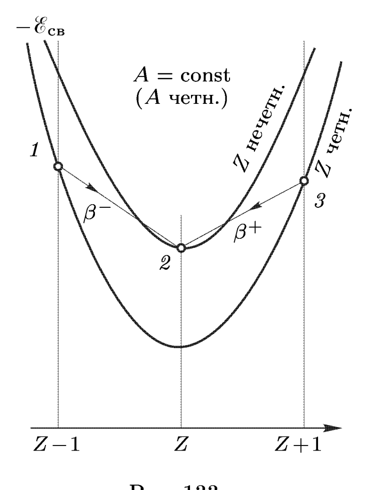


Рис. 133

6. Энергии α- и β-частиц, испускаемых радиоактивными веществами, поскольку эти частицы заряжены, можно измерить методом отклонения их в электромагнитных полях. Такие измерения показали, что каждое радиоактивное вещество испускает α-частицы вполне определенной энергии, присущей только этому веществу. Этот результат вполне естествен. Ядро перед испусканием α-частицы находится в невозбужденном квантовом состоянии с определенной энергией. После испускания получаются α-частица и дочернее ядро также в невозбужденном состоянии с определенной энергией. Разность этих энергий поэтому также имеет вполне определенное значение и проявляется в виде кинетической энергии дочернего ядра и α-частицы. А так как масса последней очень мала по сравнению с массой ядра, то практически вся кинетическая энергия уносится α-частицей. Наличие тонкой структуры в α-спектрах многих α-активных ядер ничего не меняет принципиально, так как оно связано с тем, что при распаде или материнское ядро, или дочернее ядро оказываются

в определенном возбужденном состоянии. Все это можно рассматривать как экспериментальное доказательство, что состояния материнского и дочернего ядер квантованны, а потому вполне определенны.

Совсем иной результат получается при испускании β-частиц. Радиоактивные атомы одного и того же сорта испускают электроны самых различных энергий, начиная от нуля и кончая некоторым предельным значением, характерным для рассматриваемого β-излучателя. Это предельное значение называется *верхней границей β-спектра.* Для примера на рис. 134 приведен β-спектр, возникающий при распаде $^{210}_{83}$Bi. Казалось бы, что и к β-распаду применимо рассуждение, приведенное нами для α-распада. В самом деле, пусть ядро A получилось в результате α-распада и, следовательно, на основании сказанного выше находится во вполне определенном энергетическом состоянии. Пусть затем оно испустило β-частицу и превратилось в ядро B. Допустим, далее, что получившееся ядро B опять α-радиоактивно. Тогда оно также будет находиться в определенном энергетическом состоянии. Но ядро B получается из A путем β-распада. Поэтому естественным представляется заключение, что β-частицы должны получаться вполне определенной энергии, а их энергетический спектр в действительности оказывается сплошным, как это было установлено Чедвиком уже в 1914 г. Получилось противоречие, которое требовало разъяснения.

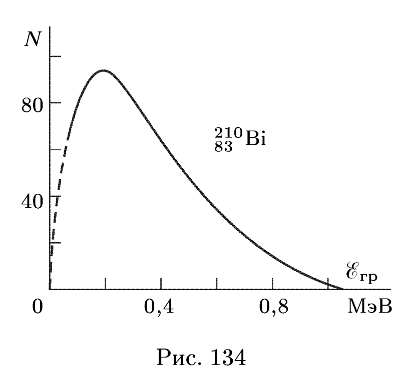


Рис. 134

7. Существование верхней границы β-спектра дало повод некоторым ученым высказать предположение, что в момент испускания все β-частицы получают одинаковые энергии, соответствующие границе β-спектра. Однако на пути к детектору не все они сохраняют эту энергию, а по-разному растрачивают ее на излучение. Другие предполагали, что β-излучение всегда сопровождается γ-излучением, так что энергия определенным образом распределяется между β- и γ-лучами. Правдоподобность последнего предположения, казалось, подтверждалась тем, что β-излучение часто сопровождается γ-излучением, тогда как при α-распаде γ-лучи наблюдаются реже. При справедливости любого из этих предположений полная энергия, освобождающаяся при β-распаде ядра, должна быть строго определенной, поскольку однозначно определены энергетические состояния материнского и дочернего ядер. Этот вывод допускает экспериментальную проверку.

Эллис (1895–1980) и Вустер (р. 1903) поставили соответствующий опыт в 1927 г. Они окружали β-излучатель ($^{210}_{83}$Bi) свинцовой оболочкой такой толщины, что она полностью поглощала электроны, а также рентгеновское и γ-излучение, исходившие от β-излучателя. По нагреванию свинцовой оболочки из-за β-распада радиоактивного препарата и по числу распадов за определенное время можно было определить

среднюю полную энергию, приходящуюся на один акт распада. Правда, калориметрические опыты очень трудны ввиду незначительности нагревания свинцовой оболочки. Эту трудность экспериментаторы преодолели, изготовив два совершенно одинаковых свинцовых калориметра, в один из которых помещался радиоактивный излучатель, а другой оставался пустым. По разности температур калориметров можно было с достаточной точностью измерить искомую величину. Оказалось, что полная энергия, приходящаяся в среднем на один акт β-распада, составляет 0,35 МэВ. С другой стороны, максимальная энергия β-частиц (верхняя граница β-спектра) для $^{210}_{83}$Bi составляет 1,05 МэВ, т. е. в три раза больше среднего значения, найденного калориметрически. Зная же полный β-спектр рассматриваемого излучателя, можно было вычислить среднюю энергию, уносимую одним электроном при β-распаде. Она оказалась равной 0,39 МэВ. Это значение в пределах погрешностей измерений хорошо согласуется с величиной, найденной калориметрически. Отсюда следует, что никакой дополнительной энергии, о которой говорилось выше в обоих предположениях, при β-распаде не выделяется. Оба предположения должны быть отвергнуты.

8. Не останавливаясь более на истории вопроса, приведем сразу решение его, предложенное Паули в 1930 г. Паули выдвинул гипотезу, позднее доказанную экспериментально, согласно которой при β-распаде наряду с электроном вылетает еще какая-то неизвестная нейтральная частица, не регистрируемая в калориметре. Благодаря этому закон сохранения энергии соблюдается и при β-распаде. В редких случаях вся освобождающаяся энергия уносится электроном. Такая энергия соответствует верхней границе электронного β-спектра. Подтверждением этого может служить опытный факт, что указанная граница совпадает с разностью энергий материнского и дочернего ядер. В других редких случаях вся энергия уносится гипотетической частицей. Но чаще всего энергия уносится и этой частицей, и электроном. Распределение энергии между ними носит случайный характер, чем и объясняется форма β-спектра.

Чтобы согласовать свою гипотезу с результатами опытов Эллиса и Вустера, Паули предположил, что гипотетическая частица очень слабо взаимодействует с веществом. Она не ионизует атомы среды, с которыми сталкивается, и поэтому свободно проходит через свинцовую оболочку и не улавливается последней, как это и было в опытах Эллиса и Вустера. Это заставило предположить, что частица Паули не обладает электрическим зарядом, так как заряженная частица с энергией порядка миллиона электронвольт не могла бы пройти через толстый слой свинца. Гипотеза Паули появилась еще до открытия нейтрона. Ферми назвал эту незаряженную гипотетическую частицу *нейтрино* (что в переводе с итальянского означает уменьшительное «нейтрончик»). Масса нейтрино, если таковая имеется у этой частицы, должна быть во всяком случае меньше массы электрона. Это видно уже из того, что при β-распаде, когда должен соблюдаться и закон сохранения импульса, электроны уносят меньше половины освобождающейся энергии. Нейтрино не может быть нейтроном, так как в противном

случае при испускании нейтрино заметно изменялась бы масса ядра, а это при β-распаде не наблюдается. Кроме того, если бы нейтрино и нейтрон были одной и той же частицей, то она обнаружилась бы при столкновении с другими атомными ядрами.

Поскольку нейтрино не ионизует атомы, магнитный момент этой частицы также должен равняться нулю (или, во всяком случае, быть весьма малым). Спин нейтрино должен быть полуцелым. Действительно, характер спина ядра (целый или полуцелый) целиком определяется значением массового числа A (см. § 68). При β-распаде A не меняется, а потому не должен меняться и характер спина ядра. Но вылетающий электрон (позитрон) уносит спин, равный $1/2$. Поэтому спин другой частицы — нейтрино, — во всяком случае, должен быть полуцелым. Теоретические расчеты энергетического спектра электронов (позитронов), рождающихся при β-распаде, выполненные при разных предположениях относительно спина нейтрино, показали, что спин этой частицы равен $1/2$.

9. На основе гипотезы Паули в 1933 г. Ферми построил количественную теорию β-распада. Подробное изложение ее далеко выходит за рамки этой книги; ограничимся общими замечаниями. Основная идея Ферми состоит в том, что β-частицы и нейтрино не существуют в атомных ядрах, а рождаются в них в процессе β-распада, подобно тому как фотон не является составной частью атома, а появляется в процессе лучеиспускания. Ферми потребовалось ввести гипотезу о существовании особого типа короткодействующих сил, которые и вызывают в ядре процессы превращения нейтрона в протон или протона в нейтрон с испусканием β-частиц и нейтрино в обоих случаях. Соответствующие силы называются *слабыми силами*, а взаимодействия, осуществляемые под их действием, — *слабыми взаимодействиями.* Чтобы составить представление о величине слабых взаимодействий, укажем, что теоретические соображения и последующие опытные измерения показали, что средняя длина свободного пробега нейтрино с энергией 1 МэВ в воде равна примерно 10^{21} см (100 световых лет). Это намного превышает линейные размеры звезд, т. е. длины порядка 10^{13} см. Такие нейтрино свободно пронизывают Солнце, а тем более земной шар. С уменьшением энергии нейтрино их проникающая способность становится еще меньше. Радиус действия слабых взаимодействий не превышает 10^{-15} см.

10. Для полноты заметим, что постулированная Паули частица, появляющаяся при β^--распаде вместе с электроном, позднее стала называться *электронным антинейтрино* ($\overline{\nu}_\mathrm{e}$), а частица, появляющаяся при β^+-распаде вместе с позитроном, — *электронным нейтрино* (ν_e). Конечно, деление на частицы и античастицы условно. Что называть частицей и что античастицей — это вопрос соглашения, но условиться об этом необходимо. В соответствии с принятым соглашением процессы β^-- и β^+-распадов пишутся в виде

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}, \tag{74.4}$$

$$\mathrm{p} \to \mathrm{n} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}. \tag{74.5}$$

Дело в том, что в дальнейшем были открыты другие типы нейтрино и антинейтрино: *мюонные нейтрино* (ν_μ) и *антинейтрино* ($\overline{\nu}_\mu$), *таонные нейтрино* (ν_τ) и *антинейтрино* ($\overline{\nu}_\tau$). Эти частицы появляются в процессах взаимодействия совместно с другими частицами: мюонами и $\tau^\pm$-лептонами (масса τ-лептона $m_{\tau^\pm} = 1{,}78$ ГэВ, среднее время жизни порядка $3 \cdot 10^{-13}$ с).

Лептонами называют класс элементарных частиц, не участвующих в сильных взаимодействиях, т. е. участвующих в электромагнитном, слабом и гравитационном взаимодействиях. Нейтрино и антинейтрино сверх того не участвуют и в электромагнитном взаимодействии (если масса нейтрино отлична от нуля, то не исключено наличие у нейтрино магнитного момента, не превышающего $10^{-10}\ \mu_B$). Все лептоны имеют спин $1/2$, т. е. являются фермионами. К лептонам относятся электрон, мюон, тяжелый лептон (τ), электронное, мюонное и τ-нейтрино и соответствующие им античастицы.

Мюонные нейтрино и антинейтрино появляются при распаде заряженных пионов одновременно с мюонами. *Пионами* (старое название *π-мезоны*) называют семейство из трех нестабильных элементарных частиц — двух заряженных (π^+ и π^-) и одной незаряженной (π^0). Времена жизни обеих заряженных частиц равны $2{,}6 \cdot 10^{-8}$ с, масса $m_{\pi^\pm} = 273 m_\mathrm{e}$, а для нейтрального пиона соответственно $0{,}83 \cdot 10^{-16}$ с, $m_{\pi^0} = 264 m_\mathrm{e}$. Пионы относятся к классу *мезонов*, который в свою очередь относится к обширной группе *адронов*, т. е. частиц, участвующих в сильных взаимодействиях. Пионы — наиболее легкие адроны. Интересующие нас процессы распада заряженных пионов записываются следующим образом:

$$\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu, \tag{74.6}$$

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu. \tag{74.7}$$

Что электронные и мюонные нейтрино (а также их античастицы) не тождественны — это доказано экспериментально. Поэтому заменять ν_e и $\overline{\nu}_\mathrm{e}$ соответственно на ν_μ и $\overline{\nu}_\mu$, и обратно нельзя. Так, например, процессы

$$\mathrm{n} \nrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mu, \quad \mathrm{p} \nrightarrow \mathrm{n} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mu,$$

$$\pi^- \nrightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}, \quad \pi^+ \nrightarrow \mu^+ + \nu_\mathrm{e},$$

получающиеся из (74.4)–(74.7) путем такой замены, не идут, что доказано и экспериментально. Поэтому они и снабжены перечеркнутой стрелкой. Доказано также, что ν_e и ν_μ не тождественны со своими античастицами $\overline{\nu}_\mathrm{e}$ и $\overline{\nu}_\mu$. Существование ν_τ и $\overline{\nu}_\tau$ прямыми экспериментами пока не доказано, но подтверждается теоретическими соображениями и косвенными экспериментальными данными.

Каждый лептон характеризуется определенным квантовым числом, называемым *лептонным зарядом* или *лептонным числом.* Следует различать *электронный* (для e^-, e^+, ν_e, $\overline{\nu}_\mathrm{e}$), *мюонный* (для μ^-, μ^+, ν_μ, $\overline{\nu}_\mu$) и *таонный* (для τ^-, τ^+, ν_τ, $\overline{\nu}_\tau$) *лептонные заряды*, обозначаемые соответственно через L_e, L_μ, L_τ. Это существенно различные

величины, хотя им условно и приписываются одинаковые числовые значения. Условились для всех отрицательно заряженных частиц (e^-, μ^-, τ^-) считать лептонные заряды равными $+1$. Лептонные заряды всех остальных частиц находятся из экспериментально установленного факта, согласно которому в замкнутой системе разность между числом лептонов и антилептонов каждого типа остается постоянной. Для этого надо этому факту придать форму *закона сохранения лептонного заряда.* При этом лептонные заряды всех других частиц, за исключением лептонов, принимаются равными нулю, так как у этих частиц свойства, связанные с существованием лептонного заряда, не обнаруживаются. Закон сохранения лептонного заряда требует, чтобы все положительно заряженные лептоны (e^+, μ^+, τ^+) имели лептонный заряд -1. Это видно из того, что возможны реакции

$$e^- + e^+ \to 2\gamma, \quad \mu^- + \mu^+ \to 2\gamma, \quad \tau^- + \tau^+ \to 2\gamma.$$

Только тогда суммарный лептонный заряд в левой части будет равен нулю, а это необходимо, так как γ-квант лептонного заряда не имеет. Из возможности процессов (74.5) и (74.7) следует, что лептонный заряд ν_e и ν_μ равен $+1$, а из возможности реакций (74.4) и (74.6) — что лептонный заряд $\overline{\nu}_e$ и $\overline{\nu}_\mu$ равен -1. Аналогично, надо приписать ν_τ лептонный заряд $+1$, а $\overline{\nu}_\tau$ — лептонный заряд -1. Таким образом, лептонные заряды всех отрицательно заряженных лептонов и всех нейтрино равны $+1$, а положительно заряженных лептонов и всех антинейтрино -1.

Примером процессов, в которых соблюдается закон сохранения лептонных зарядов L_e и L_μ, могут служить процессы

$$\mu^- \to e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu, \quad \mu^+ \to e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu,$$

которые действительно происходят.

Процесс (74.4) происходит в ядерных реакторах. При делении ядер освобождаются нейтроны, после распада которых возникают антинейтрино. Антинейтрино $\overline{\nu}_e$ образуется в ядерных реакторах также и в процессах распада β^--активных продуктов реакции деления. Таким образом, ядерный реактор является источником антинейтрино. В недрах Солнца происходят термоядерные реакции, конечным результатом которых является превращение водорода в гелий:

$$4p \to {}^4_2He + 2e^+ + 2\nu_e. \tag{74.8}$$

Закон сохранения лептонного заряда требует, чтобы из недр Солнца исходил поток уже *нейтрино*, а не антинейтрино.

11. Для упрощения теории β-распада Ферми построил ее в предположении, что масса нейтрино равна нулю. Но это предположение не является обязательным требованием теории и не может считаться доказанным. Нет принципа, заставляющего полагать массу нейтрино равной нулю, тогда как в случае фотона такой принцип существует.

Вопрос о массе нейтрино постоянно обсуждался с момента появления гипотезы Паули. Верхний предел для массы электронного нейтрино (и антинейтрино) был получен из анализа формы электронного спектра β-распада трития. Оказалось, что верхний предел для массы электронного нейтрино $m_{\nu_e} < 35$ эВ, что примерно в 15 000 раз меньше массы электрона. В 1980 г. Е.Ф. Третьяков, В.А. Любимов и другие сотрудники Института экспериментальной и теоретической физики опубликовали результаты своих многолетних измерений массы электронного нейтрино. Согласно этим измерениям масса электронного нейтрино хотя и очень мала по сравнению с массой электрона, но все же *отлична от нуля.* (Было найдено, что $14 < m_{\nu_e} < 46$ эВ.) Этот результат не всеми признается как окончательный. Вопрос о массе электронного нейтрино остается открытым.

Оценка верхнего предела массы ν_μ была получена в результате исследования распадов π-мезонов. Оказалось, $m_{\nu_\mu} < 0{,}57$ МэВ. Оценка верхнего предела массы ν_τ производилась из рассмотрения распада $\tau^- \to e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\tau$. Оказалось, $m_{\nu_\tau} < 250$ МэВ.

Нейтрино играло первостепенную фундаментальную роль в происхождении Вселенной и продолжает играть эту роль и сейчас в ее развитии, чего, разумеется, не мог предполагать Паули и даже Ферми при создании теории β-распада. Если масса нейтрино отлична от нуля, то многие теоретические представления о процессах с участием нейтрино должны быть пересмотрены. Роль нейтрино во Вселенной окажется более значительной, чем в случае безмассовых нейтрино.

Если бы масса нейтрино была равна нулю, то эта частица не могла бы находиться в состоянии покоя. Она всегда двигалась бы со скоростью света c относительно любой системы отсчета. Проекция вектора спина этой частицы на направление движения может быть равна либо $+1/2$, либо $-1/2$. В первом случае условились говорить, что частица имеет *правую*, или *положительную спиральность* $\lambda = +1$, во втором — *левую*, или *отрицательную*, *спиральность* $\lambda = -1$. Понятие спиральности, конечно, имеет определенный смысл только для безмассовых частиц. Только в этом случае частица имеет определенную спиральность независимо от системы отсчета. Если же масса частицы отлична от нуля, то понятие определенной спиральности лишено смысла: одна и та же частица имела бы то правую, то левую спиральность, в зависимости от того, в какой системе отсчета рассматривается ее движение. Прямым опытом установлено, что $\overline{\nu}_e$ имеет спин, направленный по импульсу. Поэтому если $m_\nu = 0$, то нейтрино будет обладать левой, а антинейтрино — правой спиральностью.

12. Введенное Ферми слабое взаимодействие оказалось более универсальным, чем предполагалось в первоначальной теория β-распада. Оказалось, что слабые взаимодействия с участием нейтрино всех видов проявляются не только при β-распаде, но и во многих других процессах, связанных с превращением элементарных частиц. Не входя в существо вопроса, ограничимся замечанием, что представилось возможным установить *единую природу слабых и электромагнитных сил* и создать теорию *единого электрослабого взаимодействия.* Согласно этой теории

слабые взаимодействия возникают в результате обмена виртуальными тяжелыми частицами со спином, равным 1: промежуточными заряженными $W^{\pm}$-бозонами и нейтральным промежуточным бозоном Z^0, а электромагнитные взаимодействия — в результате обмена виртуальными фотонами — безмассовыми частицами также со спином, равным 1. Например, распад $\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$ происходит следующим образом: нейтрон превращается в протон и на короткое время испускает промежуточный W^--бозон, который распадается затем на электрон и антинейтрино $\overline{\nu}_\mathrm{e}$. Теория предсказала и массы $\mathrm{W}^{\pm}$- и Z^0-бозонов. Бозоны $W^{\pm}$ и Z^0 были открыты в 1983 г. Их массы оказались близкими к предсказанным теорией: $M_{W^{\pm}} \approx 80$ ГэВ, $M_{Z^0} \approx 90$ ГэВ.

Основные представления и главные результаты теории β-распада Ферми сохранили свое значение и в современных теориях (при энергиях, значительно меньших M_W).

13. В заключение этого параграфа остановимся на вопросе об экспериментальном доказательстве существования нейтрино. В дальнейшем имеются в виду только электронные нейтрино и антинейтрино. Соответствующие опыты очень трудно осуществить из-за слабости взаимодействия нейтрино с веществом (см. п. 9). Поэтому вначале опыты по обнаружению нейтрино носили косвенный характер. Первый опыт такого рода был поставлен в 1936 г. А. И. Лейпунским (1903–1972), который исследовал реакцию β-распада ${}^{11}_{6}\mathrm{C} \to {}^{11}_{5}\mathrm{B} + \mathrm{e}^+$. Не останавливаясь на деталях опыта, ограничимся изложением лишь его идеи. Если бы не было нейтрино, то импульсы позитрона e^+ и ядра отдачи ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$ были бы равны по модулю, но противоположны по знаку. Поскольку обе частицы заряжены, их импульсы можно измерить и таким образом сравнить энергетические спектры ядра ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$ и позитрона. С другой стороны, можно было бы и непосредственно измерить распределение по энергии ядер отдачи ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$. Это распределение оказалось не соответствующим безнейтринной схеме расчета, хотя количественные результаты получить и не удалось.

Более совершенная, но все же косвенная идея опыта принадлежала А. И. Алиханову (1904–1970) и А. И. Алиханьяну (1908–1978), предложившим использовать процесс K-захвата электрона ядром ${}^{7}_{4}\mathrm{Be}$, при котором возникает ядро ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$. Спин ядра с нечетным A полуцелый. При K-захвате A не меняется, а потому не должна меняться и четность спина ядра. С другой стороны, электрон имеет спин 1/2. Поэтому спин ядра после поглощения электрона должен меняться на 1/2, т. е. стать четным. Противоречие устраняется, если предположить, что и при K-захвате образуется нейтрино, которое и уносит нечетный спин. Преимущество схемы опыта, предложенного Алихановым и Алиханьяном, состоит в том, что при K-захвате образуются только две частицы: ядро отдачи ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$ и нейтрино, а потому распределение кинетической энергии между ними определяется однозначно. Полная кинетическая энергия, выделяющаяся при K-захвате ядер ${}^{7}_{4}\mathrm{Be}$, равна

$$\mathscr{E} = [M_\text{ат}({}^{7}_{4}\mathrm{Be}) - M_\text{ат}({}^{7}_{3}\mathrm{L})]c^2 = 0{,}864 \text{ МэВ}. \tag{74.9}$$

В силу закона сохранения импульса $\mathbf{P}_{\text{яд}} + \mathbf{p}_\nu = 0$, где $\mathbf{P}_{\text{яд}}$ — импульс ядра отдачи, а $\mathbf{p}_\nu$ — импульс нейтрино. Ядро отдачи получает кинетическую энергию

$$\mathscr{E}_{\text{яд}} = \frac{\mathbf{P}^2_{\text{яд}}}{2M_{\text{яд}}} = \frac{p^2_\nu}{2M_{\text{яд}}} = \frac{c^2 p^2_\nu}{2M_{\text{яд}} c^2}. \tag{74.10}$$

Но нейтрино — релятивистская частица, так что ее кинетическая энергия $\mathscr{E}_\nu = cp_\nu$. Она уносит подавляющую часть энергии, а потому в предыдущем соотношении с большой точностью можно принять $cp_\nu = \mathscr{E}_\nu = \mathscr{E}$. Таким образом, на долю ядра отдачи ${}^7_3\text{Li}$ приходится кинетическая энергия

$$\mathscr{E}_{\text{яд}} = \frac{\mathscr{E}^2}{2M_{\text{яд}} c^2}. \tag{74.11}$$

Кинетическую энергию ядра отдачи ${}^7_3\text{Li}$ можно измерить непосредственно и сравнить ее с выражением (74.11). К этому и сводится идея опыта. При этом, как показывает формула (74.11), выгодно использовать легкие ядра. Вот почему в качестве исходного ядра Алиханов и Алиханьян предложили взять наиболее легкое ядро ${}^7_4\text{Be}$, в котором наблюдается K-захват.

Из-за начавшейся войны самими Алихановым и Алиханьяном опыт поставлен не был. Он был осуществлен только в 1942 г. Алленом (р. 1908) в США и привел к положительному результату, т. е. указывал на участие нейтрино в процессе K-захвата. Однако и качественный опыт Лейпунского и количественный опыт Аллена еще не могут рассматриваться как экспериментальное доказательство существования нейтрино, поскольку в этих опытах еще не наблюдалось взаимодействие свободного нейтрино с веществом. Опыт Аллена доказывает только, что в реакции K-захвата гипотеза нейтрино согласуется с законами сохранения энергии и импульса.

14. Зарегистрировать действие свободных антинейтрино стало возможным только после появления мощных ядерных реакторов. Осколки деления тяжелых ядер перегружены нейтронами, а потому они испытывают β^--распад. Радиоактивные продукты β^--распада в свою очередь подвергаются β^--распаду, пока этот процесс не закончится образованием стабильных ядер. В процессе же β^--распада испускаются антинейтрино. При каждом акте деления испускаются в среднем 5–6 антинейтрино. Поэтому ядерные реакторы являются мощными источниками антинейтрино. При мощности реактора около 100 МВт плотность потока антинейтрино за толстой стеной, защищающей от нейтронов и γ-квантов, но легко проницаемой для нейтрино, составляет примерно 10^{19} с$^{-1}$ · см$^{-2}$.

Впервые опыт был осуществлен в США Рейнесом (р. 1918) и Коуэном (р. 1919) в 1953 г. и повторен ими в более совершенном виде в 1954 г. (краткое описание этого второго опыта и приводится ниже). Им удалось зарегистрировать реакцию обратного β^--распада

$$\overline{\nu} + \text{p} \to \text{n} + \text{e}^+. \tag{74.12}$$

Эта реакция возможна, если энергия антинейтрино превышает 1,8 МэВ, так как именно на такую величину масса $(\mathrm{n}+\mathrm{e}^+)$ больше массы протона p.

Схема установки Рейнеса и Коуэна представлена на рис. 135. Она состояла из трех больших ($1{,}9 \times 1{,}3 \times 0{,}6$ м) баков-детекторов D_1, D_2 и D_3, наполненных сцинтиллирующим водным раствором, объем которого «просматривался» 110 фотоумножителями. Между детекторами помещались мишени M_1 и M_2 — два слоя воды (толщиной 7 см каждый), содержащие растворимую соль кадмия $\mathrm{CdCl_2}$, для поглощения нейтронов. Каждый слой — мишень с двумя соседними баками-детекторами — образовывал независимую триаду. Для защиты от нейтронного и γ-излучения установка была заключена в свинцово-парафиновую оболочку и помещена глубоко под землей. Там она и облучалась потоком антинейтрино от ядерного реактора.

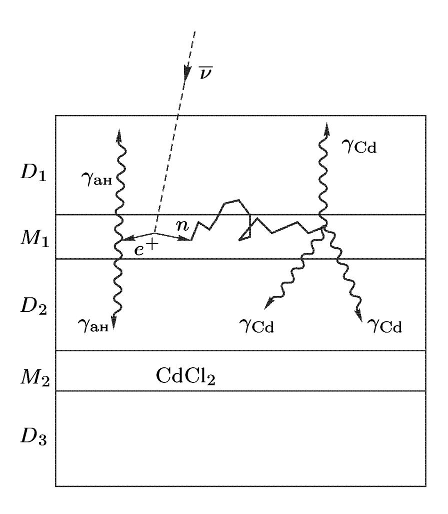


Рис. 135

Позитрон, возникающий в реакции (74.12) через короткое время порядка 10^{-8} с, аннигилировал с электроном с образованием двух γ-квантов (энергия которых равна энергии аннигиляции), которые регистрировались детекторами D_1 и D_2, включенными в схему совпадений. Нейтрон, возникающий в той же реакции (74.12), замедляется в результате последовательных столкновении с протонами, диффундирует и в конце концов за время порядка 10^{-6} с поглощается кадмием. При этом испускаются несколько γ-квантов (с суммарной энергией до 10 МэВ), которые также регистрируются детекторами. Сигналы с детекторов передавались по коаксиальным кабелям на вход специального электронного устройства, где они анализировались по высоте и времени сдвига совпадений. Проводилось фотографирование сигналов с помощью трехлучевого осциллографа, каждая из пластин которого была соединена с одним из детекторов. Акт взаимодействия антинейтрино с веществом (74.12) обнаруживался по появлению в установке двух скоррелированных импульсов, сдвинутых по времени на время замедления и диффузии нейтрона (от 1 до 25 мкс). В процессе длительной (около 1400 ч) работы установки детектор регистрировал в среднем $2{,}88 \pm 0{,}22$ импульса в час. Этому соответствует эффективное сечение реакции (74.12) $\sigma_{\overline{\nu}} \sim 10^{-43}$ см^2.

Для повышения точности полученных результатов авторами ставились многочисленные и разнообразные контрольные опыты, на описании которых мы останавливаться не будем.

Следует заметить, что в противоположность реакции (74.12) реакция

$$\nu + \mathrm{p} \nrightarrow \mathrm{n} + \mathrm{e}^+ \tag{74.13}$$

запрещена, как это показал Дэвис. Это указывает на то, что нейтрино и антинейтрино — действительно разные частицы, отличающиеся одна от другой характером взаимодействия.

15. В порядке краткой информации скажем еще об обнаружении солнечных нейтрино, т. е. нейтрино, исходящих из недр Солнца при термоядерных реакциях. Здесь речь идет именно о *нейтрино*, а не об антинейтрино, как об этом уже говорилось в п. 10. Вопрос этот систематически исследуется Дэвисом с группой сотрудников из Брукхейвенской национальной лаборатории (США), а сами опыты производятся в шахте на глубине 1490 м для уменьшения фона космических лучей (сами измерения, не считая подготовительной работы, длятся уже более 15 лет). Для регистрации нейтринного излучения от Солнца используется хлор-аргоновый метод, предложенный Б. М. Понтекорво (р. 1913) еще в 1946 г. Детектором служит резервуар, заполненный 615 т жидкого перхлорэтилена (C_2Cl_4). В него предварительно вводится около 1 см^3 неактивного изотопа аргона $^{37}_{18}\mathrm{Ar}$. Под действием солнечных нейтрино происходит реакция

$$^{37}_{17}\mathrm{Cl} + \nu_\mathrm{e} \rightarrow {}^{37}_{18}\mathrm{Ar} + \mathrm{e}^-, \tag{74.14}$$

в которой образуется изотоп $^{37}_{18}\mathrm{Ar}$. Последний радиоактивен и испытывает K-захват с периодом полураспада 35 дней. Накопившийся радиоактивный $^{37}_{18}\mathrm{Ar}$ извлекается методом носителя, в качестве которого применяется неактивный изотоп аргона $^{36}_{18}\mathrm{Ar}$. В этом методе через объем бака с C_2Cl_4 в течение нескольких часов пропускается гелий. Последний в виде мелких пузырьков проходит через жидкий C_2Cl_4 и «вылавливает» из него атомы аргона вместе с радиоактивными атомами $^{37}_{18}\mathrm{Ar}$. Затем гелий поступает в ловушки, заполненные активированным углем и охлаждаемые жидким азотом. Аргон конденсируется и адсорбируется углем, а гелий свободно проходит через ловушки. Повторив такую операцию несколько раз, ловушки отделяют, соединяют с детектором и нагревают. Уголь выделяет адсорбированный аргон и последний поступает в пропорциональный счетчик. Зная количество аргона, добавленного к C_2Cl_4 и поступившего в счетчик, а также число актов, зарегистрированных счетчиком, можно получить и полное количество радиоактивных атомов $^{37}_{18}\mathrm{Ar}$, образовавшихся в C_2Cl_4. Было найдено, что под действием солнечных нейтрино в одной тонне C_2Cl_4 образуется в среднем 0,330 атомов $^{37}_{18}\mathrm{Ar}$ в год. Это примерно в 3–4 раза меньше теоретических предсказаний, основанных на традиционных представлениях о свойствах нейтрино и структуре центральных областей Солнца (см. § 102, п. 4). Такое расхождение получило название «загадки солнечных нейтрино». Мы не будем более останавливаться на этом вопросе, так как его еще нельзя считать решенным ни теоретически, ни экспериментально.

Заметим только, что в Приэльбрусье близится к завершению строительство Баксанской нейтринной обсерватории Института ядерных исследований АН СССР. Обсерватория располагается на глубине около 2 км под горой Андырчи. Хлор-аргоновая установка по объему будет в пять раз превышать установку Дэвиса. С помощью реакции превращения хлора в аргон можно зарегистрировать лишь относительно малоинтенсивную часть спектра солнечных нейтрино, обладающих высокими энергиями. Поэтому будет использован еще и новый метод, предложенный В.А. Кузьминым, основанный на превращении $^{71}_{31}\mathrm{Ga}$ в $^{71}_{32}\mathrm{Ge}$. Метод позволит регистрировать и основную часть нейтринного излучения Солнца — нейтрино более низких энергий от реакции $\mathrm{p} + \mathrm{p} \to d + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$, задающей скорость энерговыделения в Солнце.

Можно надеяться, что эти исследования прояснят «загадку солнечных нейтрино», а также приведут к выяснению вопросов о внутреннем строении Солнца, что можно сделать только методами «нейтринной астрономии».

§ 75. Гамма-излучение ядер и внутренняя конверсия электронов

1. *Гамма-излучением* называется электромагнитное излучение, возникающее при переходе атомных ядер из возбужденных в более низкие энергетические состояния. В таких процессах числа протонов и нейтронов в ядре не изменяются, но испускаются γ-кванты. Спектр γ-излучения всегда *дискретный*, так как дискретны энергетические уровни самого ядра. Обычно энергия γ-квантов, испускаемых атомными ядрами, лежит в пределах примерно от 10 кэВ до 5 МэВ ($10^{-8} \gtrsim \lambda \gtrsim 2 \cdot 10^{-11}$ см).

Переход ядра из возбужденного состояния в нормальное при γ-излучении может быть *однократным*, когда ядро после испускания одного кванта сразу переходит в нормальное состояние (рис. 136 *а*). Но снятие возбуждения может быть и *каскадным*, когда переход осуществляется в результате последовательного испускания нескольких γ-квантов (рис. 136 *б*).

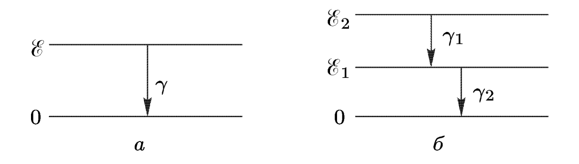


Рис. 136

Изолированный свободный нуклон испускать γ-квант не может, так как в противном случае было бы нарушено одновременное выполнение законов сохранения энергии и импульса (см. § 1). Однако этот процесс

может происходить и действительно происходит внутри ядра, поскольку испущенный (или поглощенный) γ-квант может обмениваться импульсом не только с рассматриваемым нуклоном, но и с остальными нуклонами ядра. Таким образом, в противоположность β-распаду, испускание γ-лучей есть *внутриядерный*, а не внутринуклонный процесс.

2. Возбужденные ядра образуются при β-распаде в тех случаях, когда распад материнского ядра в основное состояние дочернего ядра оказывается запрещенным. Дочернее ядро в этом случае может получиться как в нижнем, так и в одном из верхних возбужденных состояний. В последнем случае совершается каскадный процесс переходов через несколько возбужденных состояний дочернего ядра, если только такие переходы разрешены. При этих переходах и происходит испускание γ-квантов. Типичным примером может служить изотоп $^{24}_{11}$Na. Основное состояние его имеет характеристику 4^+. В результате β-распада возникает изотоп $^{24}_{12}$Mg. Однако этот изотоп получается не сразу в основном состоянии, так как основной уровень $^{24}_{12}$Mg имеет характеристику 0^+. Поэтому переход на этот уровень практически не происходит, так как при таком переходе спин должен был бы сразу измениться на 4, что крайне маловероятно. Но изотоп $^{24}_{12}$Mg имеет два возбужденных уровня 4,12 и 1,37 МэВ с характеристиками 4^+ и 2^+. Бета-переход ядра $^{24}_{11}$Na на второй из них также запрещен по спину, хотя и не столь сильно, как переход на основной уровень 0^+. Бета-распад (с полупериодом 15 ч) идет почти исключительно на разрешенный уровень 4,12 МэВ (с характеристикой 4^+). С этого уровня происходит испускание γ-кванта при переходе на уровень 1,37 МэВ, а с него — на основной уровень 0. В результате испускаются γ-кванты с энергиями 2,75 и 1,37 МэВ (рис. 137). Если изотоп $^{24}_{11}$Na поместить в стеклянную ампулу, то β^--частицы задержатся стеклом, а γ-излучение выйдет наружу. Поэтому ампула с изотопом $^{24}_{11}$Na может служить удобным портативным источником γ-излучения. Напомним, что 0–0-переходы при излучении γ-квантов абсолютно запрещены (см. § 39, п. 1).

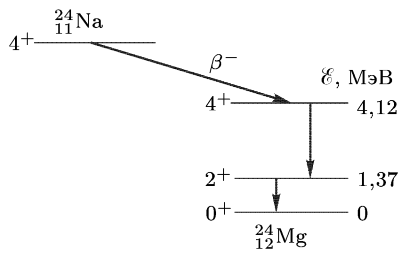


Рис. 137

Возбужденные ядра, способные к γ-излучению, могут возникать также в результате предшествующего α-распада. Однако γ-кванты, испускаемые таким путем, обычно обладают невысокими энергиями ($\mathscr{E}_\gamma \lesssim 0,5$ МэВ). Это связано с тем, что для испускания γ-квантов высоких энергий материнские ядра должны испускать α-частицы также очень высоких энергий. Энергия α-частицы должна быть достаточной не только для преодоления потенциального барьера, но и для сильного возбуждения возникающего дочернего ядра. Обычно α-частицы, испускаемые атомными ядрами, этому условию не удовлетворяют. Энергия γ-квантов, испускаемых дочерними ядрами после

β-распада, может быть больше и может достигать 2–2,5 МэВ. Объясняется это тем, что вероятность β-распада определяется более слабо меняющейся функцией энергии β-частицы, чем вероятность α-распада. Возбужденные ядра, способные к испусканию γ-квантов, могут также возникать в результате захвата нейтронов, в результате кулоновского возбуждения ядер при столкновениях с заряженными частицами в различных ядерных реакциях.

3. Возбужденное ядро может перейти в основное состояние не только путем испускания γ-кванта, но и путем непосредственной передачи энергии возбуждения одному из электронов атомных оболочек K-, L-, M-электрону и т. д.). Этот процесс, конкурирующий с γ-излучением, называется *внутренней конверсией* электронов, а сами электроны — *электронами внутренней конверсии.* Внутренняя конверсия может конкурировать с γ-излучепием. Но она может происходить и без него (например, в случае 0–0-переходов, когда испускание γ-квантов вообще невозможно). Отношение среднего числа электронов внутренней конверсии к среднему числу испускаемых γ-квантов для конкретного перехода называется *коэффициентом внутренней конверсии* перехода.

Коэффициент конверсии зависит от энергии и мультипольности перехода. Поэтому измеряя на опыте коэффициент конверсии, можно установить мультипольность и, таким образом, спин возбужденного ядра.

Энергия электрона внутренней конверсии $\mathscr{E}_\mathrm{e}$ определяется выражением

$$\mathscr{E}_\mathrm{e} = \mathscr{E} - \varepsilon, \qquad (75.1)$$

где $\mathscr{E}$ — энергия, освобождаемая при ядерном переходе, а ε — энергия связи электрона в электронной оболочке атома. Очевидно, что электроны внутренней конверсии моноэнергетичны. Это и позволяет отличить их от электронов, испускаемых при β-распаде ядер, спектр которых непрерывен. Если энергия возбуждения ядра $\mathscr{E}$ меньше энергии связи электрона ε_K в K-слое, то, очевидно, внутренняя конверсия на электронах K-слоя энергетически невозможна. Такой случай может иметь место для тяжелых ядер. Однако в этом случае может происходить внутренняя конверсия на электронах других слоев.

Внутренняя конверсия сопровождается *рентгеновским излучением*, которое возникает в результате переходов электрона с вышележащих электронных слоев и оболочек на место, освобожденное электроном внутренней конверсии. Этот процесс вполне аналогичен обычному возбуждению рентгеновского характеристического спектра атомов (см. § 48). В результате внутренней конверсии могут появиться и электроны Оже (см. § 48).

Если энергия $\mathscr{E}$ возбуждения ядра превышает удвоенную собственную энергию электрона, т. е.

$$\mathscr{E} > 2mc^2 = 1{,}02 \text{ МэВ},$$

то может происходить процесс *парной конверсии*, при котором ядро теряет энергию возбуждения путем одновременного испускания электрона и позитрона. Электронная оболочка атома на такой процесс не оказывает никакого влияния, а потому он может происходить на ядре, лишенном атомных электронов. Однако вероятность парной конверсии не превышает примерно тысячной доли вероятности испускания γ-кванта.

4. Среднее время жизни γ-активных ядер обычно невелико (порядка 10^{-7}–10^{-11} с). Однако при сочетании высокой степени запрета с малыми расстояниями между энергетическими уровнями могут возникать долгоживущие или *метастабильные* γ-активные ядра со временами жизни макроскопического масштаба (до нескольких часов и даже больше). Такие возбужденные метастабильные ядра называются *изомерами.* Явление изомерии было открыто в 1921 г. Отто Ганом (1879–1968). Он обнаружил, что при β-превращениях

$$ {}^{234}_{90}\mathrm{Th} \begin{matrix} \xrightarrow{\beta^-} \mathrm{UZ_1} \\ \xrightarrow[\beta^-]{} \mathrm{UX_2} \end{matrix} $$

получаются два радиоактивных вещества, названных им $\mathrm{UZ_1}$ и $\mathrm{UX_2}$, которые состоят из одинаковых ядер ${}^{234}_{91}\mathrm{Pa}$, но имеют различные периоды полураспада (6,7 ч и 1,22 мин соответственно). В 1935 г. аналогичное явление было открыто И. В. Курчатовым с сотрудниками на искусственных радиоактивных ядрах ${}^{80}_{35}\mathrm{Br}$ и ${}^{82}_{35}\mathrm{Br}$, получаемых путем облучения нейтронами естественной смеси изотопов брома ${}^{79}_{35}\mathrm{Br}$ и ${}^{81}_{35}\mathrm{Br}$. Объяснение природы изомерии существованием у ядер метастабильных состояний было дано в 1936 г. Вейцзеккером.

Обычно изомерный уровень имеет спин, сильно отличающийся от спинов нижележащих уровней, и характеризуется низкой энергией возбуждения. Этому условию удовлетворяют значения Z и N, лежащие непосредственно перед магическими числами 50, 82 и 126 со стороны меньших Z и N. Как правило, изомерные состояния совпадают с первым возбужденным уровнем ядра. Такие закономерности следует ожидать и с точки зрения оболочечной модели ядра. Но существуют и изомеры, не подчиняющиеся этим правилам (таков, например, изомер кюрия ${}^{244}_{96}\mathrm{Cm}$ с энергией возбуждения 1,04 МэВ).

В некоторых случаях ядра могут иметь по два метастабильных уровня и, следовательно, обнаруживать три периода полураспада. Примером может служить ядро ${}^{124}_{51}\mathrm{Sb}$, испускающее электроны с периодами полураспада 60 дней, 21 и 1,3 мин.

Ядерная изомерия — не столь редкое явление, как может показаться на первый взгляд. Известно около сотни достаточно долгоживущих ядер. Наибольшее число изомерных состояний встречается у ядер с нечетным массовым числом A. Изомеры достаточно часто встречаются у нечетно-нечетных ядер и очень редко у четно-четных. Время жизни возбужденного ядра изменяется в широких пределах (от очень малых долей секунды до многих тысяч лет). Так, изомер ${}^{236}_{93}\mathrm{Np}$ имеет период

полураспада 5000 лет, а изомер ^{135}Cs — $2{,}8 \cdot 10^{-10}$ с. Можно ожидать, что с развитием методики эксперимента будут обнаружены изомеры с еще более длинными и короткими периодами полураспада.

Метастабильные состояния наблюдаются и у β-стабилыших ядер. В этих случаях метастабильное ядро переходит в основное состояние путем испускания γ-квантов и конверсионных электронов. Примером может служить β-стабильное ядро $^{113}_{49}$In $(9/2^+)$, которое имеет метастабильный изомер с энергией возбуждения 0,393 МэВ и временем жизни 104 мин $(1/2^+)$. Изомерия может также проявляться в форме существования у ядра нескольких периодов полураспада относительно спонтанного деления.

§ 76. Эффект Мёссбауэра

1. В 1958 г. было обнаружено *резонансное поглощение* γ-лучей, получившее название *эффекта Мёссбауэра* (р. 1929) — по имени ученого, который сделал это открытие. Явление это аналогично *оптической резонансной флуоресценции.* Оно состоит в том, что если возбужденный атом (или ядро) испустил фотон, то другой такой же, но невозбужденный атом (или ядро) способен с большой вероятностью его поглощать.

Для выяснения условий, при которых возможно резонансное поглощение γ-квантов (фотонов), надо принять во внимание, что в процессе испускания энергия возбужденного ядра передается не только γ-кванту, но и самому ядру — в виде кинетической энергии поступательного движения последнего, или энергии отдачи. Аналогично, при поглощении энергия γ-кванта идет не только на внутреннее возбуждение ядра, но и на сообщение ему поступательного движения. Допустим, что первое ядро до испускания, а второе до поглощения γ-кванта неподвижны. Тогда энергия испущенного γ-кванта окажется недостаточной, чтобы возбудить второе ядро. Для внутреннего возбуждения поглощающего ядра до того же энергетического уровня, на котором находилось испускающее ядро, требуется γ-квант большей энергии. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Пусть неподвижное ядро испустило γ-квант. Если $\mathscr{E}$ — разность энергий ядра до и после испускания, то на основании законов сохранения энергии и импульса можно написать

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_\gamma + K_{\text{яд}}, \quad \mathbf{P}_\gamma + \mathbf{P}_{\text{яд}} = 0,$$

где $K_{\text{яд}}$ и $\mathbf{P}_{\text{яд}}$ — кинетическая энергия и импульс ядра после испускания γ-кванта, а $\mathbf{P}_\gamma$ — импульс испущенного γ-кванта. (Предполагается, что до испускания γ-кванта ядро покоилось.) Таким образом, кинетическая энергия ядра отдачи

$$K_{\text{яд}} = \frac{P_{\text{яд}}^2}{2M_{\text{яд}}} = \frac{P_\gamma^2}{2M_{\text{яд}}},$$

где $M_{яд}$ — масса ядра. Импульс и энергия γ-кванта связаны соотношением $\mathcal{E}_\gamma = cP_\gamma$. Поэтому

$$K_{яд} = \frac{\mathcal{E}_\gamma^2}{2M_{яд}c^2}.$$

Но подавляющую долю энергии при испускании уносит γ-квант. На долю кинетической энергии ядра (из-за большой массы $M_{яд}$) приходится ничтожная часть. Следовательно, с достаточной точностью

$$K_{яд} = \frac{\mathcal{E}^2}{2M_{яд}c^2}. \tag{76.1}$$

Рассмотрим теперь поглощение γ-кванта ядром. В этом случае все величины будем обозначать теми же, но штрихованными буквами. Исключение оставим для величины $\mathcal{E}$, так как она имеет в точности тот же смысл, что и раньше, а именно равна разности между теми же энергетическими уровнями ядра. Это есть внутреннее свойство ядра и не зависит от того, рассматривается ли оно в процессе испускания или поглощения γ-кванта. Таким образом, при поглощении

$$\mathcal{E}'_\gamma = \mathcal{E} + K'_{яд}, \quad \mathbf{P}'_\gamma = \mathbf{P}'_{яд},$$

откуда

$$K'_{яд} = \frac{P'^2_{яд}}{2M_{яд}} = \frac{P'^2_\gamma}{2M_{яд}} = \frac{\mathcal{E}'^2_\gamma}{2M_{яд}c^2},$$

или с прежней точностью

$$K'_{яд} = \frac{\mathcal{E}^2}{2M_{яд}c^2} = K_{яд}. \tag{76.2}$$

Линии испускания и поглощения γ-квантов сдвинуты относительно друг друга на величину

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}'_\gamma - \mathcal{E}_\gamma = K'_{яд} + K_{яд} = 2K_{яд}. \tag{76.3}$$

2. Полученные результаты полностью применимы к испусканию и поглощению γ-квантов в оптической области спектра. Только в этом случае испускание и поглощение производится не ядрами, а электронными оболочками атомов. В соответствии с этим во всех формулах, приведенных выше, массу ядра следует заменить на массу атома (что практически не имеет абсолютно никакого значения). Кроме того, вместо термина «γ-квант» в оптической области спектра используется термин «фотон». В идеальном случае для получения резонансного поглощения требуется совпадение линий испускания и поглощения, т. е. $\Delta\mathcal{E} = 0$. Величина $\Delta\mathcal{E}$ в оптической области ничтожна, так как энергия испускаемого фотона (равная энергии возбуждения атома $\mathcal{E}$) порядка одного или нескольких электронвольт. Даже для самого легкого атома — атома водорода ($Mc^2 \sim 10^9$ эВ) — получается

$$\Delta\mathcal{E} \approx 1^2/10^9 \approx 10^{-9} \text{ эВ}.$$

По этой причине в оптической области спектра резонансное поглощение света атомами легко наблюдается. Не так обстоит дело для γ-лучей. Энергия γ-квантов, испускаемых ядрами, примерно в 10^6 раз больше, а следовательно, сдвиг $\Delta\mathscr{E}$ в 10^{12} раз больше, чем в оптической области. Поэтому долгое время считалось, что осуществить резонансное поглощение γ-квантов невозможно.

Казалось бы, что сдвиг $\Delta\mathscr{E}$ можно устранить, приведя в движение излучающее ядро в направлении к поглощающему. Тогда из-за эффекта Доплера энергия излучаемого γ-кванта увеличится, а скорость движения можно подобрать так, чтобы величина $\Delta\mathscr{E}$ обратилась в нуль. Того же самого можно достигнуть приближением поглощающего ядра к испускающему. Однако здесь не принято во внимание, что источник испускает, а поглотитель поглощает не бесконечно тонкую линию, а линию конечной ширины. Для возможности резонансного поглощения необходимо, конечно, чтобы линии испускания и поглощения перекрывались, т. е. должно быть

$$\Gamma \gtrsim K_{\text{яд}}, \tag{76.4}$$

где Γ — полуширина линии.

3. Уширение линии обусловлено различными причинами. Прежде всего существует *доплеровское уширение* спектральных линий, обусловленное тепловым движением атомов. *Доплеровская полуширина линии* $\Delta\nu$ может быть оценена по формуле

$$\frac{\Delta\nu_{\text{доп}}}{\nu} \approx \frac{1}{c}\sqrt{\frac{2kT}{M_{\text{яд}}}}, \tag{76.5}$$

где k — постоянная Больцмана, а T — термодинамическая температура источника (см. т. IV, § 89). Если полуширину выражать в энергетических единицах ($\Gamma = h\Delta\nu$), то эта формула преобразуется в

$$\Gamma_{\text{доп}} \approx \frac{\mathscr{E}}{c}\sqrt{\frac{2kT}{M_{\text{яд}}}}, \tag{76.6}$$

так как в рассматриваемом случае энергию γ-кванта можно с большой точностью положить равной энергии возбуждения ядра. Доплеровское уширение играет основную роль в случае источника, содержащего много атомов или атомных ядер. Оно, очевидно, пропадает, когда излучателем является изолированный атом или изолированное ядро, так как в этом случае говорить о тепловом движении не имеет смысла. Движение изолированного атома или ядра сказывается на смещении спектральных линий, но не на их уширении.

В случае изолированного ядра ширина линии называется *естественной шириной.* Она может быть оценена по времени жизни τ возбужденного ядра с помощью соотношения неопределенностей

$$\Gamma_{\text{ест}} \approx \frac{\hbar}{\tau}. \tag{76.7}$$

Посмотрим теперь на примере, выполняется ли условие (76.4) в оптической области и в области γ-лучей. В качестве примера возьмем

ядро изотопа железа ${}^{57}_{26}\mathrm{Fe}$. Энергия возбуждения первого уровня этого ядра равна 14 кэВ, т. е. для γ-лучей это совсем малая величина. Время жизни его $\tau \approx 10^{-8}$ с, а естественная ширина линии

$$\Gamma_{\text{ест}} \approx 10^{-8} \text{ эВ}.$$

Кинетическая энергия ядра железа, приобретаемая им согласно формуле (76.1) при испускании γ-кванта, будет

$$K_{\text{яд}} = \frac{(14 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 57 \cdot 938 \cdot 10^6} = 0{,}00183 \text{ эВ},$$

т. е. примерно в 10^5 раз превышает естественную ширину спектральной линии. О выполнении условия (76.4) не может быть и речи. Поэтому резонансное поглощение γ-квантов на изолированных неподвижных ядрах невозможно.

Иначе обстоит дело в случае оптических фотонов. В этом случае, согласно той же формуле (76.1), кинетическая энергия ядра отдачи порядка

$$K_{\text{яд}} \approx \frac{1^2}{2 \cdot 57 \cdot 938 \cdot 10^6} \approx 10^{-11} \text{ эВ}.$$

Взяв для естественной ширины линии прежнее значение 10^{-8} эВ (это — очень узкая линия), видим, что условие (76.4) хорошо выполняется. Поэтому-то резонансное поглощение оптических фотонов происходит и на изолированных атомах.

4. Обратимся теперь к испусканию и поглощению γ-квантов макроскопическими телами — кристаллами. Казалось бы, что в этом случае достаточно естественную ширину спектральной линии заменить на доплеровскую. Для температуры $T = 300$ К в случае изотопа железа ${}^{57}_{26}\mathrm{Fe}$

$$\Gamma_{\text{доп}} \approx 0{,}018 \text{ эВ},$$

что на порядок больше кинетической энергии ядра $K_{\text{яд}}$. Условие (76.4) выполняется, хотя и на пределе. Поэтому следует ожидать, что в рассматриваемом случае резонансное поглощение γ-квантов на отдельных ядрах должно наблюдаться и в кристаллах. Однако при переходе к достаточно жестким γ-квантам и при понижении температуры условие (76.4) перестает выполняться, а резонансное поглощение в кристалле, казалось бы, должно сделаться невозможным. Например, для ядра иридия ${}^{194}\mathrm{Ir}$ энергия возбуждения $\mathscr{E} = 129$ кэВ, так что в этом случае

$$K_{\text{яд}} = \frac{(129 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 191 \cdot 938 \cdot 10^6} = 0{,}046 \text{ эВ}.$$

Поэтому даже при $T = 300$ К условие $\Gamma_{\text{доп}} > K_{\text{яд}}$ не выполняется, так как для более тяжелого иридия при одинаковых температурах $\Gamma_{\text{доп}}$ меньше, чем для железа. Но и в тех случаях, когда условие $\Gamma_{\text{доп}} > K_{\text{яд}}$ выполняется, следовало бы ожидать очень широкие и пологие максимумы резонансного поглощения.

При понижении температуры источника и поглотителя область перекрытия доплеровских линий испускания и поглощения уменьшается.

Казалось бы, что при этом должна уменьшаться и доля поглощаемых γ-квантов. На самом деле, как показали опыты Мёссбауэра в 1958 г., она увеличивается. Этот неожиданный результат, как понял сам Мёссбауэр, указывает на *статистический характер* испускания и поглощения γ-квантов в кристалле. Большая часть γ-квантов испускается и поглощается так, как описано выше, т. е. отдельными ядрами. Однако поскольку ядра в кристаллической решетке связаны между собой, наряду с такими индивидуальными процессами происходят и *коллективные процессы*, напоминающие возбуждение квазичастиц в теории теплоемкостей твердых тел, допускаемые квантовой механикой. Какой процесс произойдет — индивидуальный или коллективный, — зависит от случая. Соотношение между числом тех и других процессов управляется *статистическими законами.*

В коллективных процессах возбужденное ядро возвращается в нормальное состояние, энергия возбуждения уносится γ-квантом, но импульс воспринимается *кристаллом в целом* или, во всяком случае, большой группой атомов. Аналогично, энергия испущенного фотона поглощается отдельным ядром, а его импульс передается *кристаллу в целом.* На кинетическую энергию всего кристалла (ввиду большой массы последнего), возникающую в этих процессах, приходится ничтожная доля, малая по сравнению с естественной шириной линии (измеренной в энергетических единицах). Явление происходит так, как если бы какая-то часть ядер испускала и поглощала энергию, но не испытывала отдачи импульса. *Испускание и поглощение γ-квантов без отдачи импульса и составляет сущность эффекта Мёссбауэра.* Поскольку явления испускания и поглощения γ-квантов происходят так, как если бы масса ядра была бесконечно велика, они не сопровождаются доплеровским уширением спектральных линий. Остается только естественная ширина линии. В таких процессах проявляются, таким образом, очень узкие спектральные линии испускания и поглощения γ-квантов.

5. Это объяснение Мёссбауэра убедительно подтверждается опытами по резонансному поглощению γ-квантов. Принципиальная схема опыта для наблюдения этого явления приведена на рис. 138. Источник

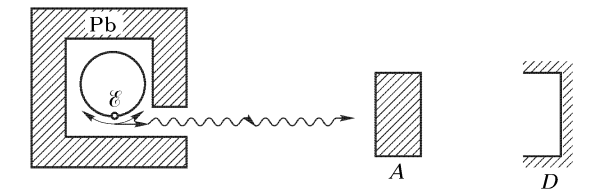


Рис. 138

резонансного γ-излучения $\mathscr{E}$ медленно движется по окружности с помощью часового механизма относительно поглотителя A. За поглотителем расположен счетчик γ-квантов D. Измеряется зависимость скорости счета от скорости движения источника в моменты приближения

и удаления его от поглотителя. Если источник движется достаточно быстро, то линия испускания сдвигается относительно линии поглощения и резонансное поглощение не наблюдается. При уменьшении скорости источника обе эти линии сближаются, а при их совпадении появляется острый максимум поглощения. Это проявляется в резком уменьшении скорости счета счетчика. На рис. 139 изображена экспериментальная кривая, полученная таким путем. Источником излучения является ядро ${}^{57}_{27}\mathrm{Co}$, которое в результате K-захвата превращается

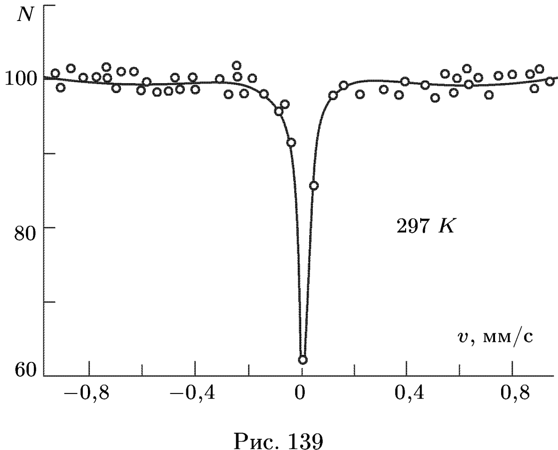


Рис. 139

в ядро железа ${}^{57}_{26}\mathrm{Fe}$, испускающее γ-кванты с энергией $\mathscr{E} = 14$ кэВ. Поглотителем служит соль $\mathrm{K_3\,{}^{57}Fe\,(CN)_6}$. Кривая получена при $T =$ $= 297$ К. По вертикальной оси отложена относительная интенсивность γ-излучения, прошедшего через поглотитель (максимальная интенсивность принята за 100).

Из рисунка видно, что резонанс нарушается уже при ничтожных скоростях источника v — порядка 0,1 мм/с. Отсюда следует, что относительная ширина самих линий испускания и поглощения $v/c \approx 10^{-11}$–10^{-12}, а абсолютная $\Gamma = \mathscr{E}v/c \approx 14\,000v/c \approx 10^{-7}$–$10^{-8}$ эВ, т. е. того же порядка, что и естественная ширина линии. Значит, в опыте действительно наблюдалось резонансное испускание и поглощение *без отдачи импульса.* Впервые такое экспериментальное доказательство эффекта было дано Мёссбауэром в 1958 г. Излучателем и поглотителем γ-квантов у него были изотопы ${}^{191}\mathrm{Ir}$, охлажденные до 88 К. Постановка этого фундаментального опыта и может считаться временем открытия эффекта Мёссбауэра.

Эффект Мёссбауэра наблюдается на многих веществах, причем для многих из них были зафиксированы еще более узкие линии испускания и поглощения, чем у рассмотренных выше изотопов железа и иридия. Рабочие температуры для разных веществ колеблются в пределах от комнатных до гелиевых (около 4 К и ниже). С ростом температуры

эффект постепенно ослабевает и наконец совсем пропадает. Для наблюдения эффекта Мёссбауэра благоприятным является высокое значение f-коэффициента, определяющего относительную долю процессов испускания γ-квантов, происходящих без отдачи импульса. В свою очередь этот коэффициент тем выше, чем ниже энергия возбуждения ядра $\mathscr{E}$, а также чем выше дебаевская температура T_D, поскольку она характеризует прочность связи ядра в кристаллической решетке.

Разрешающая способность метода мёссбауэровской спектроскопии характеризуется относительной шириной линии $\Gamma/\mathscr{E}$. Так, для изотопа железа ${}^{57}_{26}\mathrm{Fe}$ $\Gamma \approx 10^{-8}$ эВ, его период полураспада $T_{1/2} = 10^{-7}$ с, $T_D \approx 500$ К, $f > 0{,}6$ вплоть до комнатной температуры 300 К. В связи с такими хорошими характеристиками этот изотоп железа широко используется в работах по эффекту Мёссбауэра. Другим веществом, применяющимся при комнатной температуре, является изотоп олова ${}^{119}\mathrm{Sn}$ ($\mathscr{E} = 23{,}8$ кэВ, $T_{1/2} = 1{,}8 \cdot 10^{-8}$ с, $\Gamma = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ эВ, $\Gamma/\mathscr{E} \approx 10^{-12}$), а также изотоп ${}^{181}\mathrm{Ta}$ ($\mathscr{E} = 6{,}2$ кэВ, $T_{1/2} = 6{,}8 \cdot 10^{-8}$ с, $\Gamma = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ эВ, $\Gamma/\mathscr{E} \approx 10^{-14}$, $f \approx 5\,\%$ при комнатной температуре). Уникальной разрешающей способностью обладает ${}^{67}\mathrm{Zn}$ ($\mathscr{E} = 93$ кэВ, $T_{1/2} = 9{,}4 \cdot 10^{-6}$ с, $\Gamma \approx 5 \cdot 10^{-11}$ эВ, $\Gamma/\mathscr{E} \approx 5 \cdot 10^{-16}$). Однако дебаевская температура у ${}^{67}\mathrm{Zn}$ настолько низка, что даже при гелиевых температурах (около 4 К) f составляет только около 0,3 %.

6. Основное применение эффекта Мёссбауэра связано с тем, что он дает уникальный метод измерения ничтожных изменений энергии, которые не могут быть измерены никаким другим методом. Ограничимся двумя примерами.

С помощью эффекта Мёссбауэра удалось обнаружить в лабораторных условиях *гравитационное смещение спектральных линий*, предсказанное теорией относительности Эйнштейна (см. § 7, а также т. I, § 72). По этой теории фотон, распространяющийся вертикально в поле тяжести Земли, при прохождении расстояния h меняет свою энергию $\mathscr{E}$ на величину

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}}{c^2}\,gh, \tag{76.8}$$

что проявляется в изменении его частоты. При падении вниз частота фотона увеличивается (фиолетовое смещение), при поднятии вверх уменьшается (красное смещение). Паунд (р. 1919) и Ребке в 1959 г. поставили соответствующий опыт в башне Гарвардского университета ($h = 22{,}6$ м), использовав в качестве излучателя и поглотителя образцы из изотопа железа ${}^{59}_{26}\mathrm{Fe}$, охлажденные до гелиевых температур. Относительное изменение энергии фотона в этом случае составляло

$$\frac{\Delta\mathscr{E}}{\mathscr{E}} = \frac{gh}{c^2} \approx 2{,}46 \cdot 10^{-15},$$

а абсолютное $\Delta\mathscr{E} \approx 14\,000 \cdot 2{,}46 \cdot 10^{-15} \approx 3{,}4 \cdot 10^{-11}$ эВ, что примерно в 300 раз меньше естественной ширины линии. Для компенсации этого изменения энергии доплеровским смещением требуется скорость

источника $v \approx c\Delta\mathscr{E}/\mathscr{E} \approx 0{,}75$ мкм/с. Для надежного обнаружения гравитационного смещения необходимо было измерять изменения энергии с погрешностью $10^{-3}\Gamma_{\text{ест}} \approx 10^{-11}$ эВ. Тем не менее эффект был с уверенностью обнаружен, в согласии с предсказанием Эйнштейна. Обнаруженный в лабораторных условиях эффект был примерно в 10^9 раз меньше гравитационного смещения, вызываемого полем тяготения Солнца, который измеряется уже астрономическими методами. В 1965 г. опыт был повторен в усовершенствованной форме Паундом и Снайдером.

Методами мёссбауэровской спектроскопии удалось обнаружить влияние электронных оболочек атомов на процессы, происходящие внутри атомных ядер. Линии мёссбауэровских спектров одного и того же ядра заметно сдвигаются и меняются по ширине при переходе от одного химического соединения к другому, при изменении структуры кристаллической решетки, при изменении температуры, при наложении и снятии механических напряжений и т. п. В качестве примера на рис. 140 приведены мёссбауэровские спектры изотопа железа $^{57}_{26}\mathrm{Fe}$ для нержавеющей стали (слева) и железосодержащего

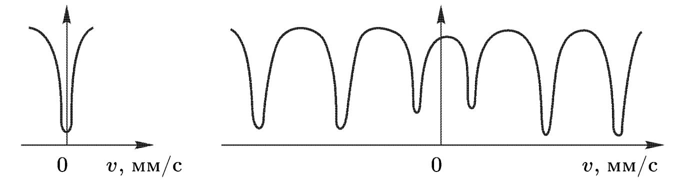


Рис. 140

соединения Fe_2O_3 — гематита (справа). По горизонтальной оси отложена скорость источника относительно поглотителя, по вертикальной — интенсивность γ-лучей, прошедших через поглотитель. Для нержавеющей стали получается одиночная линия. Для окиси железа Fe_2O_3 под действием магнитного поля электронных оболочек линия расщепляется уже на шесть линий. Впрочем, и спектральная линия нержавеющей стали испытывает также расщепление при наклепе вследствие изменения внутренней структуры кристалла из-за пластической деформации. Методы мёссбауэровской спектроскопии нашли широкое применение в исследованиях по физике твердого тела.

Глава X
КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЯДЕРНЫХ МОДЕЛЯХ

§ 77. Общие сведения

1. Необходимость ядерных моделей была обоснована в § 63. Она обусловлена тем, что до настоящего времени мы не располагаем последовательной физической теорией ядра. Трудность построения такой теории связана в первую очередь с недостаточной полнотой и определенностью данных о ядерных силах. Сюда добавляются математические трудности, поскольку ядро является многочастичной квантовой системой с сильным взаимодействием. Поэтому на основе первичных физических принципов до сих пор рассматривалась структура только простейших ядер — дейтрона ^{2}H, тритона ^{3}H и ^{4}He. В случае более сложных ядер для систематизации опытных фактов и предсказания новых (хотя бы качественных) приходится прибегать к *модельным представлениям.* Каждая модель имеет ограниченную область применимости, т. е. может претендовать на приближенное описание только более или менее узкой области явлений. Из всего многообразия параметров, характеризующих атомное ядро, она учитывает, и притом в схематизированной форме, только некоторые, являющиеся для этой области явлений главными и определяющими, и пренебрегает влиянием всех остальных параметров. Конечно, возможность и правильность самого выбора определяющих параметров в конце концов доказывается сопоставлением результатов, к которым приводит принятая модель, с опытными фактами, на объяснение которых она претендует. Модель тем лучше, чем большее количество фактов она объясняет.

2. Модели ядра можно разделить на *одночастичные*, *коллективные и обобщенные.* В одночастичных моделях учитываются степени свободы, описывающие движение индивидуальных нуклонов; в коллективных — степени свободы, определяющие коррелированное движение всех нуклонов ядра. Одночастичные модели называют также *моделями независимых частиц*, коллективные — *моделями с сильным взаимодействием.* Если пользоваться наглядной терминологией физики сплошных сред, то можно сказать, что коллективные модели следует применять в тех случаях, когда средний свободный пробег каждого нуклона в ядре мал по сравнению с размерами самого ядра. В этом случае определяющее значение имеют частые и интенсивные взаимодействия каждого нуклона с его ближайшими соседями. В противоположном случае, когда средний свободный пробег нуклона значительно больше размеров ядра, применяются одночастичные модели, в которых

принимается, что нуклоны движутся независимо в некотором усредненном *самосогласованном поле.* Более трудным является случай, когда свободный пробег нуклона и размер ядра — величины одного порядка.

Таким образом, если пользоваться классическими представлениями, то в одночастичных и коллективных моделях о движении нуклонов в ядре вводятся противоположные и взаимно исключающие предположения. Допустимость обоих предположений в ядерной физике обосновывается тем, что на движение нуклонов в ядре нельзя буквально переносить представления, заимствованные из классической физики сплошных сред. Во-первых, потому, что в ядре, даже самом тяжелом, не так много частиц, чтобы без всяких оговорок оперировать с ним как со сплошной средой и использовать статистические методы. Во-вторых, и это главное, движение нуклона в ядре существенно квантовое. Действительно, средняя кинетическая энергия нуклона в ядре $\mathscr{E} \approx 25$ МэВ, а масса нуклона $m = 1{,}68 \cdot 10^{-24}$ г. Этому соответствует средняя длина волны де Бройля нуклона в ядре $\lambda = h/\sqrt{2m\mathscr{E}} \approx 0{,}5 \cdot 10^{-12}$ см — величина порядка радиуса ядра. При таких условиях о классическом движении нуклона в ядре говорить не приходится.

Отметим, в частности, что в невозбужденном ядре согласно принципу Паули все нижние состояния заняты. При движении в ядре нуклон должен вытеснить другой одноименный нуклон из занимаемого им состояния и встать на его место. Но согласно квантовой механике такой обмен местами одноименных нуклонов не приводит к новому состоянию, а это не согласуется с представлениями классической физики. Кроме того, в некоторых одночастичных моделях ядра состояния ядра выражаются через одночастичные состояния не самих нуклонов, а квазичастиц. Введение же квазичастиц соответствует уже коллективному способу описания ядра. При таком понимании резкое разграничение моделей ядра на одночастичные и коллективные фактически утрачивается.

Комбинированием одночастичных и коллективных моделей получаются *обобщенные модели ядра*, в которых одновременно принимаются во внимание как одночастичные, так и коллективные степени свободы, существенные для рассматриваемой группы явлений.

Подробное описание ядерных моделей с указанием областей и границ их применимости должно даваться в специальных руководствах по ядерной физике. Здесь, в общем курсе физики, можно затронуть эти вопросы весьма бегло и схематично, ограничиваясь общими представлениями.

3. Простейшей и исторически первой из коллективных моделей является *капельная модель ядра*, о которой уже говорилось в § 64. Она была предложена в 1936 г. Нильсом Бором и независимо от него Я.И. Френкелем (1894–1952). Капельной моделью мы и ограничимся при рассмотрении коллективных моделей. Здесь будет сделано несколько кратких дополнительных замечаний об этой модели.

В капельной модели принимается, что ядро ведет себя подобно капле несжимаемой заряженной жидкости. Воспользуемся формула-

ми (65.1) и (65.2) для определения некоторых параметров «ядерной жидкости». Для концентрации нуклонов в ядре получаем

$$n = \frac{A}{4\pi R^3/3} = \frac{3}{4\pi r_0^3} = 0{,}87 \cdot 10^{38} \approx 10^{38}\ \text{см}^{-3},$$

для плотности вещества в ядре

$$\rho = nm \approx 1{,}45 \cdot 10^{14}\ \text{г/см}^3,$$

где m — масса нуклона, а в качестве r_0 взято $r_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-13}$ см. Среднее расстояние между нуклонами равно

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{4\pi R^3}{3A}} = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}\, r_0 \approx 2{,}3 \cdot 10^{-13}\ \text{см}.$$

Таким образом, если исключить из рассмотрения самые легкие ядра, то концентрация нуклонов, плотность вещества в ядре, а также среднее расстояние между нуклонами практически одинаковы во всех ядрах. Это и позволяет в капельной модели считать ядро несжимаемым.

Несжимаемость «ядерной жидкости» и отражает тот факт, что между нуклонами ядра существует очень сильное взаимодействие, а потому капельная модель и относится к числу коллективных. Она простейшим образом выясняет физический смысл первых трех членов в полуэмпирической формуле Вейцзеккера (64.6) для энергии связи ядра. Остальные два члена в этой формуле — энергия симметрии и энергия спаривания — уже не могут быть интерпретированы на основе чисто капельной модели. Энергия симметрии обычно связывается с принципом Паули. Наличие энергии спаривания свидетельствует о зависимости сил взаимодействия между нуклонами от относительной ориентации их спинов. С учетом этих двух дополнительных членов капельная модель неплохо описывает зависимость усредненной энергии связи ядра от зарядового и массового чисел Z и A. Более тонкие индивидуальные (а не усредненные) изменения энергии связи, как и другие индивидуальные свойства атомных ядер, в капельной модели остаются необъясненными. В этом один из недостатков этой модели.

4. С точки зрения капельной модели ядро в невозбужденном состоянии должно было бы иметь сферическую форму. И действительно, до 1950 г. в ядерной физике господствовало представление о сферической симметрии равновесной формы ядра. Однако позднее от этого представления пришлось отказаться. По оболочечным соображениям многие ядра уже в невозбужденном состоянии должны иметь не сферическую форму, а форму эллипсоида вращения и даже трехосного эллипсоида (это не общепринято). Такие ядра стали называть *деформированными.* Эта неудачная терминология, к сожалению, применяется иногда и теперь. Неудачность ее заключается в том, что несферическая форма основного состояния ядра есть его внутреннее свойство, а не проявление результата какого-то внешнего деформирующего воздействия. О некоторых фактах, которые заставили признать многие ядра несферическими, будет сказано в следующем параграфе (п. 12).

Согласно квантовой механике, ввиду тождественности одинаковых частиц, не имеет смысла говорить о вращении сферически-симметричного ядра — в сферически-симметричных ядрах не наблюдаются вращательные энергетические уровни. Напротив, в сферически-несимметричных ядрах такие вращательные уровни наблюдаются. Они принадлежат к низким уровням возбуждения.

Другими возбуждениями ядра, допускаемыми капельной моделью, являются *деформации* и *колебания поверхности ядра.* Объемные колебания ядра, ввиду предположенной несжимаемости «ядерной жидкости», практически невозможны. Простейшими являются *квадрупольные* малые колебания ядра, когда его поверхность попеременно принимает форму вытянутого и сплюснутого эллипсоида вращения. При таких колебаниях у ядра возникают *квадрупольные моменты.* Более сложными являются малые *октупольные* колебания, при которых ядро принимает грушевидную форму и приобретает *октупольный момент*, а также колебания с возбуждением высших *мультипольных* моментов. Колебания должны быть квантованы, а энергия возбуждения колебаний, как следовало бы ожидать, должна определяться формулой $\mathscr{E} = n\hbar\omega$, где n — целое квантовое число. Однако даже при малых квантовых числах n $(0, 1, 2)$ полученные таким образом значения в несколько раз расходятся с тем, что дает опыт. При сильных колебаниях нарушается их гармоничность. Такие колебания могут возбуждаться, например, при попадании нейтрона в ядро. В результате ядро может разделиться на две части. Таким образом, капельная модель ядра объясняет деление некоторых тяжелых ядер (см. гл. XIV).

Наконец, в рамках капельной модели возможно возбуждение еще одного типа колебаний. Ядро состоит из смеси двух «несжимаемых жидкостей» — *нейтронной* и *протонной*, проникающих друг в друга. Такие колебания напоминают *оптическую ветвь частот* при колебаниях кристаллических решеток, построенных из различных атомов (см. § 56). Они приводят к возбуждению у ядра электрических дипольных моментов, т. е. к *поляризации ядра.* Поляризационным возбуждениям соответствуют довольно высокие энергии — примерно 15–20 МэВ для тяжелых и 20–25 МэВ для легких ядер.

§ 78. Оболочечная модель ядра

1. Из одночастичных моделей наибольшее значение имеет *оболочечная модель ядра.* Оказывается, что ядра обладают известной периодичностью, аналогичной периодичности атомов, нашедшей свое отражение в периодической системе Менделеева. Ядра, содержащие магическое число нейтронов или протонов (2, 8, 20, 50, 82 и 126 для нейтронов), и в особенности дважды магические ядра, выделяются среди остальных ядер особой прочностью. Кроме того, для ядер, содержащих магическое число протонов, характерна сферическая симметрия распределения зарядов в невозбужденных состояниях, т. е. отсутствие квадрупольных

электрических моментов. В этом отношении магические ядра напоминают атомы инертных газов, характеризующиеся сферической симметрией, химической пассивностью и связанными с ней наибольшими энергиями ионизации. Однако зарядовые числа инертных атомов ($Z = 2, 10, 18, 36, 54, 86$), за исключением $Z = 2$, не совпадают с магическими числами для ядер.

2. Магические свойства ядер проявляются прежде всего в том, что энергия присоединения последнего нуклона (равная энергии его отделения) при образовании магического ядра аномально велика по сравнению с энергией присоединения последнего нуклона для предыдущих и последующих соседних нуклонов. Рассмотрим, например, ряд самых легких ядер ($^1_1$H, $^2_1$H, $^3_2$He, $^4_2$He, каждое из которых получается из предыдущего присоединением одного нейтрона или протона. Оказывается, что в этом случае энергии присоединения одного нуклона к предыдущему ядру соответственно равны 2,2; 5,5; 20,6 МэВ, т. е. резко возрастают по мере приближения к дважды магическому ядру $^4_2$He ($Z = N = 2$). Однако при дальнейшем добавлении к ядру $^4_2$He нейтрона или протона, т. е. при образовании ядер $^5_2$He и $^5_3$Li, в обоих случаях энергия присоединения отрицательна, так что оба ядра $^5_2$He и $^5_3$Li неустойчивы и в природе не встречаются (см. § 64, задача 5). Особая прочность дважды магического ядра $^4_2$He проявляется также в том, что такие ядра (α-частицы) испускаются при α-распаде.

Увеличение энергии присоединения последнего нуклона по мере приближения к магическому ядру имеет место и для других ядер, хотя для тяжелых ядер оно выражено и не так резко, как для легких. При иллюстрации такого увеличения необходимо принять во внимание повышенную прочность стабильных ядер с четными числами нуклонов определенного типа по сравнению с нечетными числами нуклонов того же типа. А так как все магические числа четные, то приходится сравнивать только ядра с четным числом протонов или с четным числом нейтронов. В качестве примера укажем, что энергии присоединения протона к четно-четным ядрам $^8_4$Be и $^{12}_6$C соответственно равны $-0{,}18$ и $+1{,}9$ МэВ, тогда как для магического ядра $^{16}_8$O энергия присоединения протона (в результате чего образуется ядро $^{17}_9$F) минимальна и составляет 0,6 МэВ. Аналогичная картина наблюдается и в случае присоединения нейтрона к тем же ядрам. Эти факты и свидетельствуют о повышенной прочности магического ядра $^{16}_8$O по сравнению с соседними четно-четными ядрами.

В случае тяжелых стабильных ядер, когда числа Z и N значительно отличаются друг от друга, приходится сравнивать ядра с четными числами протонов при неизменном числе нейтронов или ядра с четными числами нейтронов при неизменном числе протонов. Так, при переходе от $Z = 80$ к магическому числу $Z = 82$ энергия присоединения протона при всех N резко падает, что свидетельствует о повышенной стабильности ядра с магическим числом протонов $Z = 82$. Аналогичное явление имеет место в окрестности магического числа $N = 126$. Здесь также

энергия присоединения нейтрона к ядру для всех Z резко уменьшается при переходе от ядра с $N = 124$ к магическому ядру с $N = 126$.

3. Магические свойства ядер проявляются и в относительной распространенности химических элементов. Большей распространенностью обладают стабильные ядра с магическими числами Z или N по сравнению с ядрами с соседними четными значениями этих чисел. Например, для $Z = 20$ ($_{20}$Ca) имеются пять стабильных изотопов, для которых число нейтронов N четное. Как уже указывалось выше, сравнивать следует ядра, у которых N или Z отличаются от магического числа на два, так как четно-четные ядра обладают большей стабильностью, а потому и большей распространенностью в природе. При $Z = 18$ и при $Z = 22$ число стабильных ядер с четным N равно трем. Особенность области около $Z = 20$ проявляется даже и у ядер с нечетным массовым числом, так как при $N = 19$ или $N = 21$ не существует ни одного стабильного ядра. Существующий в природе изотоп калия $^{40}_{19}$K ($Z = 19$, $N = 21$) радиоактивен, хотя и обладает очень большим периодом полураспада ($1{,}4 \cdot 10^9$ лет). Магические свойства проявляются и для нейтронов при $N = 20$. Существуют пять изотопов при $N = 20$, два при $N = 18$ и два при $N = 22$.

Аргументация приведенного типа для случая $N = 50$ не очень убедительна, но существуют другие, не менее убедительные аргументы. При $N = 82$ приведенная аргументация вновь становится весьма убедительной. Имеется семь стабильных ядер с $N = 82$, три с $N = 80$ и два с $N = 84$. Олово ($Z = 50$) имеет наибольшее число стабильных изотопов (10), причем три из них — с нечетным A. Но, как и для случая $N = 50$, это не может считаться достаточно убедительной аргументацией, так как кадмий ($Z = 48$) и теллур ($Z = 52$) имеют каждый восемь изотопов.

Последним стабильным ядром с $Z = N$ является дважды магическое ядро $^{40}_{20}$Ca. Его содержание среди естественной смеси изотопов кальция составляет 97 %. Предшествующее четно-четное ядро с $Z = N$ ($^{36}_{18}$Ar) в естественной смеси изотопов аргона составляет 0,34 %, а следующий четно-четный $^{44}_{22}$Ti среди изотопов титана совсем не встречается.

Среди различных изотопов данного элемента обычно самым распространенным является изотоп со средним значением массового числа A. Исключение составляют случаи, когда среди изотопов элемента имеются изотопы, содержащие магические числа нейтронов $N = 50$ или $N = 82$. В этих случаях, как правило, самыми распространенными являются изотопы с $N = 50$ и $N = 82$, независимо от значения массового числа A.

4. Существует общее правило, что если наиболее тяжелый (или наиболее легкий) стабильный изотоп элемента с четным Z имеет N нейтронов, то наиболее тяжелый (или наиболее легкий) стабильный изотоп элемента с зарядовым числом $Z + 2$ имеет не меньше $N + 2$ нейтронов. Однако существуют пять исключений из этого правила, в которых ядра указанного типа имеют одно и то же число нейтронов. Сюда относятся

три пары наиболее тяжелых из сравниваемых изотопов:

$$^{48}_{20}\mathrm{Ca} - ^{50}_{22}\mathrm{Ti}, \quad ^{86}_{36}\mathrm{Kr} - ^{88}_{38}\mathrm{Sr}, \quad ^{136}_{54}\mathrm{Xe} - ^{138}_{56}\mathrm{Ba}$$

и две пары наиболее легких:

$$^{90}_{40}\mathrm{Zr} - ^{92}_{42}\mathrm{Mo}, \quad ^{142}_{60}\mathrm{Nd} - ^{144}_{62}\mathrm{Sm}.$$

У обоих ядер первой пары $N = 28$, у двух пар $N = 50$, а у двух остальных $N = 82$. Существование таких исключений указывает на более слабую связь для 29-, 51- и 83-го нейтронов по сравнению с обычной, а следовательно, более сильную связь для 28-, 50- и 82-го нейтронов. Но последние два числа как раз и являются магическими, а число 28 также часто относят к магическим для нейтронов.

5. Отметим, наконец некоторые закономерности α- и β-распада.

1) Все три радиоактивных семейства, встречающихся в природе, заканчиваются свинцом $_{82}\mathrm{Pb}$, т. е. элементом с магическим числом $Z = 82$. Ядра с $Z < 82$ из числа встречающихся в природе, как правило, стабильны.

2) Энергия испускаемых α-частиц увеличивается с ростом Z, как и должно быть согласно полуэмпирической формуле Вейцзеккера. Исключение составляют ядра с $Z = 84$, $N = 84$, $N = 128$, которые после α-распада переходят в магические ядра с $Z = 82$, $N = 82$, $N = 126$ и испускают при этом α-частицы с большей энергией по сравнению с соседними ядрами. Изотопы же полония $^{210}_{84}\mathrm{Po}$ и $^{212}_{84}\mathrm{Po}$ испускают также и длиннопробежные α-частицы.

3) Аналогичные результаты справедливы для максимальной энергии электронов, возникающих при β-распаде. Такая энергия достигает наибольшей величины при β-переходах с образованием магических ядер и наименьшей величины при β-распадах самих магических ядер.

6. Можно было бы привести и другие аргументы, свидетельствующие о существовании магических ядер. Но мы не будем делать этого. Периодическую повторяемость свойств атомных ядер и многие другие экспериментальные факты, связанные с существованием магических ядер, и пытается объяснить оболочечная модель ядра. Она строится по аналогии с теорией периодической системы химических элементов. Последняя, как известно, предполагает, что имеет смысл говорить не только о состоянии электронной оболочки в целом, но и о состоянии *каждого электрона в отдельности.* Каждый электрон независимо движется в *самосогласованном центрально-симметричном* поле, как если бы между электронами не существовало никакого взаимодействия. На самом деле взаимодействие есть, и отнюдь не слабое. Но оно эффективно учитывается посредством самосогласованного поля. Это поле образуется кулоновским полем ядра и усредненным электрическим полем всех электронов за исключением рассматриваемого. Этим и обеспечивается кажущаяся независимость движения электронов, при которой сохраняется энергия, а в силу центральной симметрии поля — и момент импульса отдельного электрона при его орбитальном движении. Это в свою очередь дает возможность характеризовать состояние каждого

электрона квантовыми числами, что и делается при построении периодической системы химических элементов. Хотя такой способ учета взаимодействия электронов в атоме и представляется логически не совсем последовательным, но при построении теории периодической системы химических элементов он приводит к правильным результатам. Причина этого уже была указана в § 47.

Казалось бы, что для ядра теория, построенная по аналогичной схеме, невозможна. Во-первых, потому, что у ядра нет силового центра для формирования центрально-симметричного самосогласованного поля, в котором двигались бы нуклоны. Во-вторых, в отличие от атомных оболочек, где электроны расположены далеко друг от друга, в ядре нуклоны упакованы очень плотно (концентрация нуклонов в ядре $n \approx 10^{38}$ см$^{-3}$), а ядерные силы, действующие между ними, очень велики. По этим причинам средняя длина свободного пробега нуклона в ядре от столкновения до столкновения, если ее оценивать классически, порядка размеров самого ядра и даже меньше. При таких условиях, казалось бы, не имеет смысла говорить о регулярном независимом орбитальном движении нуклонов в ядре.

Однако как уже отмечалось в предыдущем параграфе, необходимо принять во внимание следующие обстоятельства. В невозбужденном ядре нуклоны занимают все энергетически самые низкие состояния, а принцип Паули запрещает двум одинаковым нуклонам находиться в одном и том же квантовом состоянии (поскольку спин нуклона равен 1/2). При столкновении двух нуклонов один из них должен терять энергию и перейти в энергетически более низкое состояние. А такой процесс невозможен, поскольку в невозбужденном ядре все такие состояния уже заняты. Если же потери энергии нет, то нуклоны просто обмениваются местами, а это, как также отмечалось в предыдущем параграфе, совсем не меняет состояния ядра, как если бы вообще никакого столкновения не было. В результате если ядро находится в невозбужденном состоянии, то эффективно все это проявляется так, как будто бы средняя длина свободного пробега нуклона в ядре стала больше и даже во много раз превосходила размеры самого ядра. В таком случае в нулевом приближении можно говорить как бы о независимом движении нуклонов в ядре. (Это справедливо и для квазичастиц.) Сильное же взаимодействие между нуклонами, а также малый радиус действия ядерных сил позволяют надеяться ввести центрально-симметричное нуклонное поле, в котором в нулевом приближении независимо и движутся нуклоны.

7. Шаткость приведенных соображений, конечно, не обеспечивает надежности теории, которая строится на их основе. Речь идет о рассматриваемой здесь оболочечной модели ядра. Тем не менее такая модель была создана. В ней реальные силы, действующие между нуклонами, заменяются самосогласованным полем, в котором независимо друг от друга и движутся нуклоны. Конечно, оболочечная модель ядра по своей обоснованности и результатам значительно уступает теории периодической системы химических элементов. Причина этого ясна из изложенного выше. Другая причина состоит в том, что в отличие от

атома, где действуют детально изученные электрические силы, силы между нуклонами в ядре изучены еще очень мало. Поэтому самосогласованное поле в ядре мы вынуждены подбирать эмпирически, руководствуясь при этом только тем, чтобы возможно лучше согласовать результаты оболочечной модели с экспериментальными фактами. Приблизительное соответствие результатов оболочечной модели опытным фактам и должно рассматриваться как ее истинное обоснование.

С учетом электрических взаимодействий между нуклонами самосогласованные поля должны подбираться различно для протонов и нейтронов. Однако как уже отмечалось, ядерные силы между протонами одинаковы с ядерными силами между нейтронами. Протоны отличаются от нейтронов дополнительными силами электрического отталкивания. А последние на малых расстояниях, на которых проявляются ядерные силы, в сотни раз слабее ядерных. Электрические силы, благодаря их дальнодействующему характеру, могут быть заметными только для самых тяжелых ядер. Поэтому в первом приближении можно учитывать только ядерные силы, пренебрегая электрическими. В этом приближении самосогласованные поля для протонов и нейтронов одинаковы. Это проявляется в том, что, как показывает опыт, магические числа протонов совпадают с магическими числами нейтронов. Поэтому в дальнейшем говорится о *нуклонном самосогласованном поле*, причем под нуклоном с равным основанием можно подразумевать как протон, так и нейтрон.

8. Замена реальных сил самосогласованным полем, одинаковым для всех нуклонов ядра, сводит задачу многих тел к задаче об *одной частице*, движущейся в этом самосогласованном поле. Соответствующий этому полю нуклонный потенциал, как уже сказано выше, подбирается эмпирически. Прежде всего для сферических ядер самосогласованный нуклонный потенциал $V(r)$ должен быть сферически-симметричным. А из-за малости радиуса действия ядерных сил $V(r)$ приближенно должен меняться в зависимости от расстояния r до центра ядра аналогично плотности ядерного вещества (см. § 65). Для средних и тяжелых ядер принимается, что $V(r)$ приблизительно постоянен внутри ядра, а в окрестности границы последнего очень круто (но все же плавно) спадает практически до нуля. Для легких ядер самосогласованный потенциал по форме напоминает потенциал трехмерного осциллятора, т.е. внутри ядра $V(r)$ представляется приближенной формулой $V(r) = (1/2)kr^2$ с постоянным k. Разумеется, вне ядра $V(r) = 0$. Приближенный вид обычно применяемого эмпирического самосогласованного нуклонного потенциала представлен кривой на рис. 141.

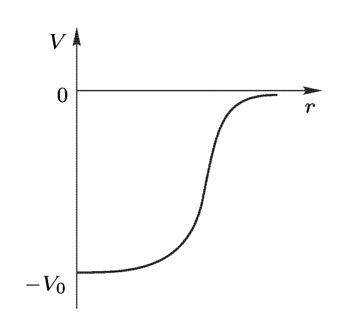


Рис. 141

После выбора самосогласованного нуклонного потенциала задача сводится к решению одночастичного уравнения Шредингера. Посмотрим сначала, к каким магическим числам приводит предположение, что $V(r)$ представляется потенциалом трехмерного гармонического осциллятора, т. е. внутри ядра $V = (1/2)kr^2$, а вне ядра $V = 0$. Представляя V в форме $V = (1/2)k(x^2 + y^2 + z^2)$, видим, что в уравнении Шредингера переменные x, y, z разделяются, так что надо решить три одинаковых уравнения Шредингера для одномерного гармонического осциллятора, отличающиеся одно от другого только обозначениями независимых переменных. Энергия одномерного гармонического осциллятора в стационарном состоянии равна $\mathscr{E}_x = (n_x + 1/2)\hbar\omega$, и аналогично для y и z. Полная энергия трехмерного осциллятора представится в виде $\mathscr{E} = \mathscr{E}_x + \mathscr{E}_y + \mathscr{E}_z = (n + 3/2)\hbar\omega$, где $n = n_x + n_y + n_z$, причем все квантовые числа n_x, n_y, n_z могут принимать только целые положительные значения и нуль ($n = 0$). Самое существенное для нашей задачи состоит в том, что уровни энергии трехмерного осциллятора вырождены. Кратность вырождения (без спина) равна $(1/2)(n + 1)(n + 2)$. В частности, при $n = 1$ вырождение трехкратное. Одному и тому же значению n соответствуют различные состояния, отличающиеся одно от другого значениями квантовых чисел n_x, n_y, n_z (а также проекцией спина, которая может быть равна либо $+1/2$, либо $-1/2$). Возможные состояния (без учета спина) приведены в табл. 11 для n, равных 0, 1, 2. Таблицу легко продолжить и для бóльших значений n.

Таблица 11

n	n_x	n_y	n_z	Число состояний в оболочке
0	0	0	0	1
1	1	0	0	3
	0	1	0	
	0	0	1	
2	2	0	0	6
	0	2	0	
	0	0	2	
	1	1	0	
	0	1	1	
	1	0	1	

Естественно принять, что каждому значению n соответствует определенная оболочка ядра. Если учесть спин, то число состояний надо удвоить. Поэтому в модели трехмерного гармонического осциллятора числа нуклонов в последовательных оболочках должны были бы иметь значения 2, 6, 12, 20, 30, 42. Соответствующие магические числа получаются прибавлением каждого из этих чисел к сумме предыдущих. Таким образом, при рассматриваемой форме потенциала магические

числа должны были бы иметь значения 2, 8, 20, 40, 70, 112. Первые три числа совпадают с экспериментально установленными. Но остальные числа отличаются от экспериментально найденных значений магических чисел 50, 82, 126.

9. Указанное расхождение естественно отнести за счет неправильного выбора формы самосогласованного нуклонного потенциала и неучета **ls**-связи. При другом выборе этого потенциала разделение переменных в декартовых координатах при решении уравнения Шредингера уже не получится. Но разделение переменных останется в сферической системе координат, независимо от формы самосогласованного нуклонного потенциала, лишь бы только последний был сферически-симметричным. Возможные стационарные состояния нуклона в этом случае можно характеризовать совершенно так же, как это делается в случае одноэлектронных атомов, а именно четырьмя квантовыми числами: главным квантовым числом n, орбитальным квантовым числом l, квантовым числом j полного момента, слагающегося из орбитального и спинового, и квантовым числом m_j, которое определяет проекцию полного момента на избранное направление. Возможность такого описания состояния нуклона в ядре обеспечивается именно сферически-симметричной формой самосогласованного нуклонного потенциала, в силу которой для каждого нуклона имеет место сохранение орбитального и полного моментов импульса.

Главное квантовое число n может принимать целочисленные значения $1, 2, 3, \ldots$ Оно на единицу больше числа узлов радиальной волновой функции ядра. В частности, при $n = 1$ радиальная волновая функция совсем не имеет узлов. Следовательно, в случае ядра главное квантовое число имеет иной смысл, чем в атомной физике. (В случае атома квантовое число, определяющее число узлов радиальной волновой функции, называется радиальным и обозначается через n_r, а главное квантовое число определяется выражением $n = n_r + l + 1$.) Как и в атомной спектроскопии, состояния с $l = 0, 1, 2, \ldots$ обозначаются соответственно через s, p, d, f и далее по алфавиту. Число j при заданном $l \neq 0$ может принимать два значения, $l + 1/2$ и $l - 1/2$, в зависимости от ориентации спина нуклона: по орбитальному моменту или против него. При $l = 0$ возможно только единственное значение $j = 1/2$. При заданном j квантовое число m_j может принимать все значения: $-j, -(j-1), \ldots \ldots, +(j-1), +j$, т. е. всего $2j + 1$ значений.

Для обозначения стационарных состояний нуклона применяется символика, аналогичная той, какая употребляется в атомной физике. На первом месте в качестве коэффициента ставится главное квантовое число n, затем (для определения l) идет одна из букв $s, p, d, \ldots$ с индексом внизу, который обозначает квантовое число j. Например, символ $2d_{5/2}$ означает состояние, у которого $n = 2$, $l = 2$, $j = 5/2$. Заметим, что ввиду сферической симметрии самосогласованного нуклонного потенциала энергия нуклона от квантового числа m_j не зависит.

10. В невозмущенном состоянии ядра с числом протонов Z и числом нейтронов N, согласно принципу Паули, должны быть заполнены все Z

энергетически самых низких протонных состояний и все N также энергетически самых низких нейтронных состояний. Поскольку энергия не зависит от m_j, каждый энергетический уровень характеризуется квантовыми числами n, l и j. Энергетические уровни нуклона, как требует опыт, надо сгруппировать в *оболочки.* Оболочками называются совокупности близких по энергии уровней, разделенных энергетическими интервалами, значительно превышающими расстояния между энергетическими уровнями внутри самих оболочек. Ядра с полностью застроенными протонной или нейтронной оболочками являются *магическими.* Действительно, на ядрах с полностью застроенными нуклонными оболочками должно происходить резкое увеличение энергии отделения нуклона от ядра. А это как раз то свойство, которое выделяет магические ядра среди остальных. Несовпадение ядерных магических чисел с порядковыми номерами атомов благородных газов, у которых также застроены электронные оболочки, связано с отличием самосогласованного поля ядра от соответствующего поля электронной оболочки атома.

Нуклонный самосогласованный потенциал надо подобрать так, чтобы получилась оболочечная структура, соответствующая опытным данным. При этом недостаточно ограничиться зависимостью самосогласованного поля от радиуса r. Надо еще учесть спин-орбитальное взаимодействие. На это в 1949 г. независимо друг от друга обратили внимание Мария Гёпперт-Майер (1906–1972) и Х. Йенсен (1907–1973), разработавшие наиболее удачный вариант оболочечной модели ядра. Спин нуклона может быть направлен либо по орбитальному моменту, либо против него. В первом случае энергетические уровни спускаются ниже, во втором поднимаются выше. Этот сдвиг надо подобрать так, чтобы получилась правильная последовательность наблюдаемых магических чисел, что и было сделано Гёпперт-Майер и Йенсеном. Спин-орбитальное взаимодействие математически учитывается выбором гамильтониана $\widehat{\mathscr{H}}$ в уравнении Шредингера $\widehat{\mathscr{H}}\psi = \mathscr{E}\psi$. Этот гамильтониан выбирают в виде

$$\widehat{\mathscr{H}} = V(r) + U(r)\mathbf{sl}, \tag{78.1}$$

где $\mathbf{s}$ — вектор спина нуклона, $\mathbf{l}$ — его орбитальный момент. Как уже указывалось выше, векторы $\mathbf{s}$ и $\mathbf{l}$ могут быть либо параллельны, либо антипараллельны. Потенциал $V(r)$ схематически представлен на рис. 141. Он имеет вид ямы с практически плоским дном, круто поднимается вблизи ее границы, а затем быстро и плавно обращается в нуль; $U(r)$ — центрально-симметричный потенциал, более слабый, чем $V(r)$. По аналогии с атомом обычно полагают

$$U(r) = b\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}, \tag{78.2}$$

где постоянная b называется *постоянной спин-орбитального взаимодействия.* На основе нуклонного самосогласованного потенциала вида (78.2) и была разработана оболочечная модель ядра.

11. Расположение энергетических уровней нуклона, каким оно получается в результате решения уравнения Шредингера с простейшим эмпирически подобранным гамильтонианом вида (78.1), представлено в табл. 12. В каждой строке приведены состояния нуклонов, входящих

Таблица 12

Оболочки	Состояния	Число нуклонов в оболочке	Число нуклонов в ядре
I	$1s_{1/2}$	2	2
II	$1p_{3/2}1p_{1/2}$	$4+2=6$	8
III	$1d_{5/2}1d_{3/2}2s_{1/2}$	$6+4+2=12$	20
IV	$1f_{7/2}1f_{5/2}2p_{3/2}2p_{1/2}1g_{3/2}$	$8+6+4+2+10=30$	50
V	$1g_{7/2}2d_{5/2}1h_{11/2}2d_{3/2}3s_{1/2}$	$8+6+12+4+2=32$	82
VI	$2f_{7/2}1h_{9/2}1i_{13/2}3p_{3/2}2f_{5/2}3p_{1/2}$	$8+10+14+4+6+2=44$	126

в определенную оболочку. Энергии состояния (отрицательные) растут слева направо. Нумерация оболочек начинается с оболочки I и растет для последующих оболочек. В предпоследнем столбце указаны числа нуклонов в каждом состоянии (определяемые числом j) и в каждой оболочке, а в последнем — полное число нуклонов (протонов и нейтронов в отдельности) в ядре, заканчивающемся застроенной оболочкой. Расположение энергетических уровней и их группирование в оболочки приведено также на рис. 142. Отсчет энергии на рис. 142 ведется от дна потенциальной ямы. Таблица и рисунок относятся к любому типу нуклонов: как к протонам, так и к нейтронам. Обращаем внимание на расщепление уровня с определенным l на два подуровня с $j = l + 1/2$ и $j = l - 1/2$, обусловленное спин-орбитальным взаимодействием. Это расщепление растет с увеличением квантового числа l. Уже при $l = 3$ расщепление $1f$-состояния на $1f_{7/2}$ и $1f_{5/2}$ столь значительно, что обнаруживается повышенная стабильность ядра с числом нуклонов 28. Поэтому иногда при рассмотрении некоторых свойств ядер число 28 относят к магическим, хотя на нем и не оканчивается заполнение протонной или нейтронной оболочки. Из-за известной неопределенности в выборе эмпирических потенциалов $V(r)$ и $U(r)$ в гамильтониане (78.1) распределения квантовых состояний по энергетическим уровням в различных литературных источниках слегка отличаются друг от друга. Здесь приведено одно из возможных распределений.

Успехи оболочечной модели ядра при объяснении магических чисел явились исторически первым и самым важным аргументом в пользу признания этой модели. Но оболочечная модель объясняет и некоторые другие факты. Сюда относятся, например, предсказания спинов и четностей ядер, а также вычисление их магнитных моментов. На этих вопросах мы останавливаться не будем. Многие факты остаются необъясненными и в оболочечной модели. Это вполне естественно,

если иметь в виду эмпирический характер модели и недостаточную обоснованность ее исходных положений.

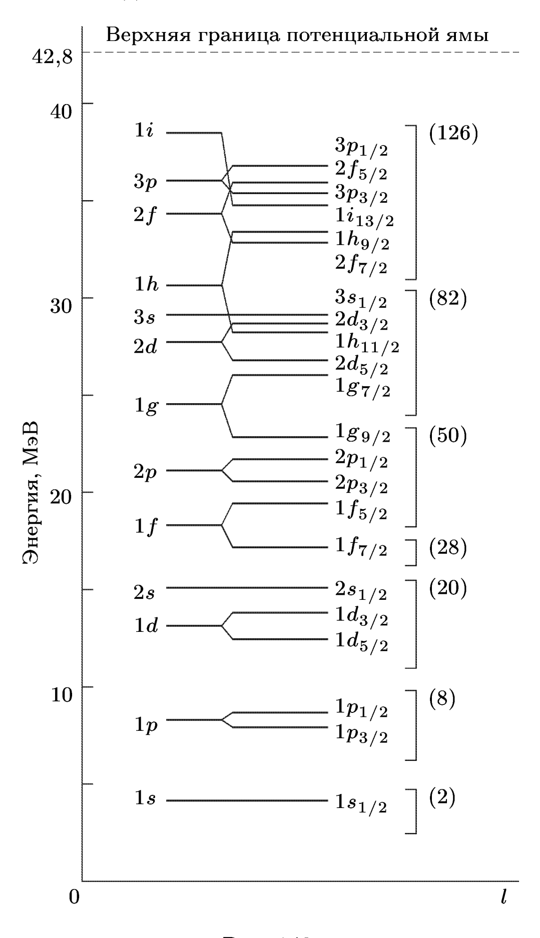


Рис. 142

Таблица 12 заканчивается шестой оболочкой для нейтронов. Вопрос о существовании оболочек более высокого порядка остается открытым, так как эти оболочки относятся к таким трансурановым ядрам, которые еще не получены и неизвестно, будут ли они вообще получены. Кроме того, надо иметь в виду, что с увеличением массовых чисел увеличивается число энергетических уровней, которые должны сформировать оболочку, а также уменьшается просвет между соседними оболочками. Поэтому при достаточно больших массовых числах, если даже соответствующие трансурановые ядра будут получены, само представление об оболочечной структуре ядра может потерять смысл. Для оболочки низкого порядка значения магических чисел при разумных выборах

самосогласованного потенциала почти не зависят от его формы. Для высших же оболочек предсказание значений магических чисел не вполне однозначно, так как с увеличением номера оболочки порядок ее заполнения становится более чувствительным к тонким деталям формы протонного и нейтронного самосогласованных потенциалов. Все же делаются попытки предсказать значения магических чисел гипотетических VI-й протонной и VII-й нейтронной оболочек. Наиболее вероятным значением магического числа для VI-й протонной оболочки считается $Z = 114$, а для VII-й нейтронной $N = 284$. Магическое число $Z = 114$ не совпадает с магическим числом $N = 126$ для того же VI-го номера нейтронной оболочки. Это связано с наличием кулоновского потенциала в случае протонов. Ожидают, что время жизни трансуранового элемента с $Z = 114$, если он будет получен, окажется на много порядков больше времен жизни соседних трансурановых элементов. Такой элемент, возможно, будет практически вести себя как стабильный и найдет научно-технические применения. Этот вопрос остается открытым.

12. Закончим эту главу краткой характеристикой так называемой обобщенной модели ядра, начала которой были заложены Рейнуотером (р. 1917) и которая была разработана главным образом Оге Бором (р. 1922) и Б. Моттельсоном (р. 1926). В обобщенной модели предполагается, что ядро состоит из внутренней устойчивой части — остова, образованного нуклонами заполненных оболочек, и внешних нуклонов, движущихся в поле, создаваемом остовом. Движение остова описывается коллективной моделью. Однако под влиянием наружных нуклонов остов может колебаться, изменяя свою форму. За счет этих колебаний изменяется и поле остова, в котором движутся наружные нуклоны. Согласно одночастичной оболочечной модели квадрупольный электрический момент ядра полностью определяется состоянием движения наружного нуклона. Поэтому в этой модели он не может по модулю превышать примерно 10^{-23} см^2 для всех ядер с нечетным числом протонов и должен обращаться в нуль для всех ядер с нечетным числом нейтронов. На самом деле имеются ядра с нечетным числом нейтронов, у которых квадрупольный электрический момент в десятки раз превышает одночастичное значение для одного протона. Например, у ядер ^{235}U и ^{233}U с числами нейтронов, равными соответственно 143 и 141, квадрупольные моменты равны $9 \cdot 10^{-21}$ и $14 \cdot 10^{-21}$ см^2. Очень велики квадрупольные электрические моменты и у многих ядер с нечетным числом протонов. Обобщенная модель объяснила большие квадрупольные моменты некоторых ядер сильной деформацией остова, вызываемой внешними нуклонами ядер. В результате этого остов становится несферическим, принимая форму вытянутого, сплюснутого или трехосного эллипсоида. Обобщенная модель позволила провести классификацию уровней энергии ядра — ввести понятие одночастичных (связанных с возбуждением наружных нуклонов) и коллективных (вращательных и колебательных, связанных с возбуждением остова) уровней ядра, определить энергии уровней, спин и четность.

Глава XI

ПРОХОЖДЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ И ГАММА-КВАНТОВ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО

§ 79. Введение

В настоящей главе рассматривается прохождение через вещество заряженных частиц, γ- и рентгеновских квантов высоких энергий, т. е. таких энергий, которые на несколько или много порядков превосходят средний ионизационный потенциал электрона в электронной оболочке атома. Наибольший практический интерес для ядерной физики представляет интервал энергий от нескольких килоэлектронвольт до около 10 МэВ.

Несмотря на необычайную сложность процессов, связанных с прохождением рассматриваемых частиц через вещество, эти процессы поддаются сравнительно точным расчетам или, во всяком случае, оценкам. Это связано, во-первых, с тем, что основную роль при прохождении заряженных частиц, γ- и рентгеновских квантов через вещество играют хорошо изученные электромагнитные взаимодействия. Роль ядерных взаимодействий в большинстве случаев относительно невелика из-за короткодействующего характера ядерных сил, а также из-за того, что электронов в веществе значительно больше, чем атомных ядер. Поэтому рассматриваемые расчеты скорее относятся к атомной, а не к ядерной физике. Они важны для ядерной физики только потому, что именно она имеет дело с высокими энергиями заряженных частиц и γ-квантов. Вторая причина связана с тем, что высокая энергия проходящих через вещество заряженных частиц и γ-квантов позволяет часто пренебрегать энергией связи электронов в электронных оболочках атомов, рассматривая эти электроны как свободные. Даже в тех случаях, когда точный расчет процесса прохождения через вещество практически невыполним из-за его сложности и необходимые величины приходится находить опытным путем, качественное уяснение явлений позволяет определить, какие именно постоянные надо находить эмпирически.

По характеру механизма прохождения через вещество все частицы разделяются на: 1) *легкие заряженные частицы* (электроны и позитроны); 2) *тяжелые заряженные частицы* (к ним относятся все частицы кроме электронов и позитронов) и 3) *γ-кванты* (и кванты жестких рентгеновских лучей).

Нейтроны взаимодействуют только с атомными ядрами посредством ядерных сил, а поэтому их прохождение через вещество будет

рассмотрено в гл. XIV. Нейтрино подвергаются только слабым взаимодействиям и могут свободно проходить в веществе астрономические расстояния.

Знание закономерностей прохождения через вещество заряженных частиц и γ-квантов необходимо для понимания действия приборов ядерной физики, применяемых для регистрации и изучения свойств таких частиц, а также для расчета защиты от ядерных излучений при научных исследованиях, в атомной энергетике и при прочих применениях ядерной физики.

§ 80. Прохождение тяжелых заряженных частиц через вещество

1. Тяжелая заряженная частица массы M и высокой энергии взаимодействует с электрическими полями электронов и атомных ядер. Она либо *ионизует*, либо *возбуждает атомы.* Осуществляется также и чисто ядерное взаимодействие частицы с *атомным ядром.* За счет этих процессов энергия частицы уменьшается и ее движение замедляется. Если частица заряжена положительно, то в результате замедления она начинает энергично захватывать электроны, отбирая их от атомов окружающей среды. В результате она превращается в *ион* или *нейтральный атом* и приходит в тепловое равновесие с окружающей средой. Такова же судьба и быстрой отрицательной частицы. Регулярное движение частицы через среду прекращается — ее путь обрывается. Но процессы, происходящие с частицей в самом конце ее пути, здесь не рассматриваются. Не рассматриваются также ядерные превращения, которые может претерпевать движущаяся частица при столкновениях с атомными ядрами среды, так как из-за короткого действия ядерных сил такие превращения осуществляются гораздо реже, чем процессы, вызываемые кулоновскими силами. Заметим только, что для адронов высоких энергий заметную роль играют и ядерные взаимодействия.

В этом параграфе предполагается, что основную роль в замедлении частицы играют процессы *ионизации* и *возбуждения электронных оболочек атома.* Все они получили собирательное название *ионизационных потерь.* Только такие процессы и учитываются в настоящем параграфе [1]. Из-за дальнодействующего характера кулоновских сил частица взаимодействует сразу со многими электронами атомных оболочек, которые в свою очередь воздействуют на частицу. Это воздействие носит случайный, хаотический характер, так что путь частицы в веществе практически прямолинеен. Прямолинейность пути связана также с большой массой тяжелой частицы по сравнению с массой

[1] В § 80 и 81 совершенно не затронут *процесс многократного рассеяния* частиц, в основе которого лежит резерфордовское рассеяние частиц на ядрах. Следует иметь в виду, что этот процесс приводит к заметному искривлению следов даже тяжелых частиц, а *угол многократного рассеяния* используется для определения характеристик частиц, оставивших след.

легкого электрона, вследствие чего при каждом взаимодействии с электроном она отклоняется очень мало и теряет очень небольшую долю от первоначальной энергии.

Основной интерес представляют средние ионизационные потери энергии частицы $-d\mathcal{E}/dx$, отнесенные к единице пути, а также ее полный пробег R в веществе. Приближенное нахождение зависимости этих величин от характеристик частицы и среды и является целью настоящего параграфа. Рассмотрим решение этой задачи в предположении справедливости классической механики, а затем качественно учтем влияние квантовых эффектов. Последовательный квантовый расчет выходит за рамки этой книги.

2. Сначала рассчитаем потери энергии, вносимые отдельным электроном, а затем просуммируем эти потери по всем электронам среды. Таким образом, расчет будем проводить в приближении *парных столкновений*, т. е. будем считать, что взаимодействие каждого электрона с рассматриваемой частицей происходит так, как если бы других электронов не было. А поскольку энергия частицы предполагается высокой, электрон, с которым она взаимодействует, можно считать *свободным*. Более того, можно предполагать, что этот электрон покоится. Оправданием этого может служить следующее замечание: электрон входит в состав атомов и молекул и в среднем перемещается с ними с тепловыми скоростями. Сама же движущаяся частица имеет скорость, близкую к скорости света, или отличается от нее примерно на порядок.

Только после ионизации электрон теряет связь с молекулой или атомом и начинает быстро набирать скорость, а потому предположение о неподвижности электрона может и не совсем выполняться. Но процесс ионизации происходит на малых расстояниях от движущейся частицы, так что ускорение электрона совершается кратковременно, и можно думать, что оно не играет существенной роли. Саму частицу, как уже было выяснено выше, при расчете можно считать движущейся прямолинейно с постоянной скоростью v. Зарядовое число движущейся частицы будем обозначать малой буквой z, оставляя большую букву Z для обозначения зарядового числа атомных ядер окружающей среды.

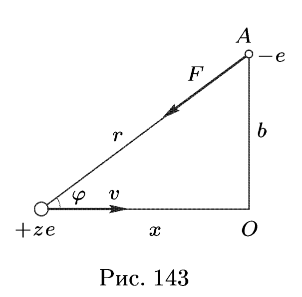


Рис. 143

Частица с зарядом ze, движущаяся мимо электрона A в направлении оси x (рис. 143), притягивает электрон с силой $F = ze^2/r^2$. Последняя за время dt сообщает ему импульс $F\,dt$. Продольная составляющая этого импульса не имеет значения, так как при переходе частицы через точку O она меняет знак. В результате приращение продольной составляющей будет компенсировано ее убыванием. Только поперечная составляющая импульса электрона представляет интерес в нашей задаче. Обозначим поперечную составляющую импульса просто через p. Тогда $dp = -F\sin\varphi\,dt$,

или

$$dp = -\frac{F\sin\varphi}{v}\,dx,$$

где dx — путь, пройденный частицей за время dt. Но $x = b\,\mathrm{ctg}\,\varphi$, $r = b/\sin\varphi$, а b в нашем приближении предполагается постоянным. Таким образом, приняв за независимую переменную угол φ, получим

$$dp = \frac{ze^2\sin\varphi}{bv}\,d\varphi.$$

Полный поперечный импульс, полученный электроном, найдется интегрированием по φ в пределах от 0 до π. Таким путем находим

$$p = \frac{2ze^2}{bv}. \tag{80.1}$$

Электрон получит энергию $p^2/2m$, и такую же энергию потеряет частица (m — масса электрона).

3. Допустим теперь, что частица пересекает бесконечный плоскопараллельный слой вещества толщиной dx, в единице объема которого содержится n электронов. В части этого слоя, ограниченной цилиндрическими поверхностями с радиусами b и $b + db$, находится $dN = 2\pi nb\,db\,dx$ электронов. Если, как было предположено выше, электроны действуют независимо друг от друга, то взаимодействие частицы с dN электронами вызовет потерю ее энергии на величину $-\,dNp^2/2m$. Полная потеря энергии частицы на единице пути будет, таким образом,

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dx} = \frac{4\pi nz^2e^4}{mv^2}\int\frac{db}{b}, \tag{80.2}$$

где интегрирование распространено на всю область, заполненную электронами, существенно влияющими на торможение частицы. Строго говоря, этот способ выражения не совсем точен, так как он предполагает, что в этой области взаимодействие частицы с электронами происходит именно по той схеме, которая применялась при вычислении. Но это далеко не так. Такая схема заведомо неприменима при слишком больших и слишком малых значениях параметра b, а при промежуточных значениях применима только приближенно. Тем не менее, сознательно идя на потерю математической строгости, мы примем эту схему при промежуточных значениях, поскольку здесь она физически оправдана. Нельзя только производить интегрирование в пределах от $b = 0$ до $b = +\infty$, так как это приводит к расходящемуся интегралу, что физически означает мгновенное торможение частицы, а это бессмысленно. Поэтому интегрирование в формуле (80.2) следует производить в пределах от некоторого минимального значения $b = b_{\text{мин}}$ до некоторого максимального значения $b = b_{\text{макс}}$. Определение этих пределов представляет наиболее трудную часть задачи, которая вряд ли может быть решена с полной математической строгостью и достаточной физической ясностью. К счастью, в подавляющем большинстве случаев достаточно ограничиться сравнительно грубыми физически

оправданными оценками. Приведем одну из наиболее простых таких оценок.

4. Выясним прежде всего, почему необходимо ограничить верхний предел в интеграле (80.2). Это ограничение связано с *квантовыми свойствами атомов среды.* Для возбуждения атома внешнее воздействие должно быть достаточно сильным. Оно должно быть в состоянии перевести атом с одного энергетического уровня на другой. В противном случае атом возбуждаться не будет. Такой атом не влияет на замедление движущейся частицы и не вносит никакого вклада в интеграл (80.2). Следующая элементарная оценка позволяет уяснить суть дела. Движущаяся частица эффективно воздействует на электрон в течение времени $\tau \sim b/v$. Кулоновская сила, действующая на электрон, $F \sim ze^2/b^2$. Импульс, приобретаемый электроном, пропорционален $F\tau \sim ze^2/bv$, т.е. он тем меньше, чем больше b. Если b превышает некоторую величину $b_{\text{макс}}$, то соответствующий электрон не должен приниматься во внимание. Но если электрон рассматривается в течение времени τ, то его энергия не строго определена, и эта неопределенность $\Delta\mathscr{E}$ ограничена соотношением $\tau \cdot \Delta\mathscr{E} \approx \hbar$. Ориентировочно атом будет возбуждаться только тогда, когда $\Delta\mathscr{E}$ не меньше $\overline{I}$, где $\overline{I}$ — средний ионизационный потенциал атома. Полагая $\Delta\mathscr{E} = \overline{I}$, получаем оценку $\tau \approx \hbar/\overline{I}$ для времени эффективного взаимодействия электрона с рассматриваемой частицей. За это время частица проходит расстояние $b = v\hbar/\overline{I}$. Эту величину и можно принять в качестве грубого приближения для верхнего предела b:

$$b_{\text{макс}} = \hbar v/\overline{I} \quad (\text{нерелятив.}). \tag{80.3}$$

Для средней энергии ионизации атома обычно принимают эмпирически установленную формулу

$$\overline{I} = 13{,}5Z \text{ эВ}. \tag{80.4}$$

Формула (80.3) получена в нерелятивистском приближении, что и отмечено в скобках. Когда частица движется с релятивистской скоростью, в эту формулу следует ввести поправку. Дело в том, что при ее выводе использовался закон Кулона для электрического поля точечного заряда. При релятивистских скоростях движущегося заряда электрическое поле его изменяется. Электрические силовые линии движущегося точечного заряда по-прежнему остаются прямолинейными, но вся картина силовых линий сжимается в направлении движения. Это показано на схематическом рис. 144. Кроме того, продольное поле, направленное вдоль линии движения частицы, уменьшается в $1/(1-\beta^2)$ раз, а поперечное экваториальное поле увеличивается в $1/\sqrt{1-\beta^2}$ раз. Первый эффект приводит

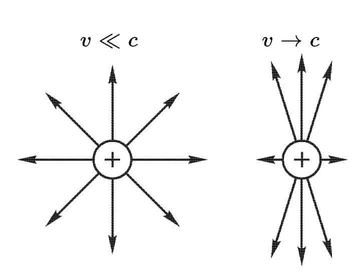


Рис. 144

к уменьшению эффективного времени взаимодействия частицы с электроном в $1/(1-\beta^2)$ раз, а второй эффект — к увеличению поперечной напряженности электрического поля в $1/\sqrt{1-\beta^2}$ раз. В результате прежняя величина $F\tau$ приобретает множитель $(1-\beta^2)/\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-\beta^2}$, а вместо выражения (80.1) получается

$$p = \frac{2ze^2}{bc}\sqrt{1-\beta^2}, \tag{80.5}$$

причем скорость частицы v мы заменили на c, поскольку ее движение теперь релятивистское. Что касается электрона, то мы по-прежнему предполагаем, что его движение, возникающее после столкновения с частицей, нерелятивистское. Поэтому приобретаемая им кинетическая энергия определяется прежним выражением $p^2/2m$. Таким образом, переход к релятивистскому случаю производится формальной заменой в формуле (80.1) величины b на $b\sqrt{1-\beta^2}$. В результате верхний предел $b_{\text{макс}}$ в рассматриваемом случае увеличивается в $1/\sqrt{1-\beta^2}$ раз, т. е.

$$b_{\text{макс}} = \frac{\hbar v}{\bar{I}}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{(релятив.)}. \tag{80.6}$$

5. Определим теперь нижний предел интеграла в формуле (80.2). При классическом рассмотрении скорость, сообщаемая электрону при лобовом столкновении с тяжелой частицей, не может превышать $2v$. Поэтому энергия, передаваемая электрону, не может превосходить $(1/2)m(2v)^2 = 2mv^2$. Значит, формула (80.1) может иметь смысл только при условии

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{2ze^2}{bv}\right)^2 < 2mv^2, \text{ т. е. при } b > \frac{ze^2}{mv^2}.$$

Поэтому в качестве нижнего предела интеграла с классической точки зрения естественно принять выражение

$$b_{\text{мин}}^{\text{кл}} = \frac{ze^2}{mv^2} \quad \text{(нерелятив.)}. \tag{80.7}$$

К иному выражению приводит квантовое рассмотрение. Согласно соотношению неопределенностей импульс частицы $p = mv/\sqrt{1-\beta^2}$ и ее расстояние b до электрона должны удовлетворять условию $bp \gtrsim \hbar$. Поэтому с квантовой точки зрения в качестве нижнего предела естественно принять выражение

$$b_{\text{мин}}^{\text{кв}} = \frac{\hbar\sqrt{1-\beta^2}}{mv} \quad \text{(релятив.)}. \tag{80.8}$$

Из двух выражений (80.7) и (80.8) следует выбирать наибольшее. Сравнение этих выражений в нерелятивистском приближении приводит к результату

$$\frac{b_{\text{мин}}^{\text{кв}}}{b_{\text{мин}}^{\text{кл}}} = \frac{\hbar v}{ze^2} = \frac{\hbar c}{e^2}\frac{\beta}{z} = 137\frac{\beta}{z}. \tag{80.9}$$

В релятивистском приближении это отношение еще больше. Значит, ограничения, накладываемые квантовой механикой, начинают сказываться раньше. Поэтому следует выбрать квантовое выражение (80.8). В результате путем комбинации формул (80.2), (80.6) и (80.8) получается формула Бора:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dx} = \frac{4\pi n z^2 e^4}{mv^2} \ln \frac{b_{\text{макс}}}{b_{\text{мин}}} = \frac{4\pi n z^2 e^4}{mv^2} \ln \frac{mv^2}{\overline{I}(1-\beta^2)}. \tag{80.10}$$

Не следует слишком смущаться грубостью оценок пределов в $b_{\text{мин}}$ и $b_{\text{макс}}$, которые были произведены при выводе формулы (80.10), так как в нее входит логарифм отношения этих пределов, который слабо зависит от погрешностей, вносимых при оценках $b_{\text{мин}}$ и $b_{\text{макс}}$. Существует несколько более точных выражений для $-d\mathscr{E}/dx$. Ограничимся приведением простейших из них:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dx} = \frac{4\pi n z^2 e^4}{mv^2} \left[\ln \frac{2mv^2}{\overline{I}(1-\beta^2)} - \beta^2\right]. \tag{80.11}$$

Для протонов с энергией 1 МэВ в воздухе при нормальных температуре и давлении логарифмический член в последней формуле равен приблизительно 9.

Последовательная квантовая теория ионизационных потерь энергии заряженных частиц в веществе была разработана Бете и Блохом. На этом вопросе мы останавливаться не можем, поскольку изложение теории Бете–Блоха требует знания математического аппарата квантовой механики.

6. Формула Бора, по крайней мере качественно, а отчасти и количественно, позволяет понять, какими величинами определяется торможение тяжелых заряженных частиц за счет ионизационных потерь в веществе в широком диапазоне энергий частицы (от 1 МэВ до десятков и сотен гигаэлектронвольт).

Как видно из (80.10) или (80.11), основные потери определяются зарядом и скоростью частицы, числом электронов в единице объема среды и средним ионизационным потенциалом $\overline{I}$ атомов среды. Зависимость от $\overline{I}$ логарифмическая, а потому слабая. Зависимость от n сводится к зависимости от плотности среды ρ посредством формулы

$$n = \frac{Z\rho N_A}{A}, \tag{80.12}$$

где N_A — постоянная Авогадро, A — атомная масса, Z — порядковый номер атомов среды. Следовательно, величина $-d\mathscr{E}/d(\rho x)$ примерно одинакова для всех веществ. Величину ρx обычно вводят в качестве меры толщины вещества вместо линейной толщины x. Так поступают, например, рассчитывая толщину необходимой защиты от радиоактивных излучений, хотя в этих случаях в основном требуется защита от γ-квантов и нейтронов, а не от потоков заряженных частиц. Потери сильно зависят от скорости частицы — они тем больше, чем меньше скорость частицы. Вот почему толщина треков тяжелых заряженных

частиц в камере Вильсона или в фотоэмульсии значительно возрастает к их концу. При увеличении скорости частицы логарифмический член в (80.10) или (80.11) сначала убывает. Но при приближении скорости к релятивистскому пределу, т. е. при $v \to c$, убывание сменяется возрастанием, так как числитель $2mv^2$ становится практически постоянным, а знаменатель $1 - \beta^2$ приближается к нулю. В результате при $v \to c$ потери энергии $-d\mathscr{E}/dx$ проходят через минимум, который расположен примерно около $\mathscr{E} = 2Mc^2$. Это чисто релятивистский эффект.

Как видно из формулы (80.10) или (80.11) при заданных скорости и заряде частицы потери не зависят от ее массы M. Поэтому в случае протонов и пионов, например, потери одинаковы, если только эти частицы движутся с одинаковыми скоростями. Если же в нерелятивистском случае в формулу (80.10) ввести кинетическую энергию частицы $\mathscr{E} = Mv^2/2$, то получится

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dx} = \frac{2\pi n z^2 e^4 M}{\mathscr{E} m} \ln \frac{2\mathscr{E} m}{M\bar{I}}. \tag{80.13}$$

Отсюда видно, что в нерелятивистском случае при одних и тех же заряде и массе частицы потери с логарифмической точностью пропорциональны массе частицы M. Поэтому треки у более тяжелой частицы жирнее и короче, чем у легкой. Наконец, квадратичная зависимость от z проявляется в сильном торможении α- и многозарядных частиц в веществе.

При очень малых и очень больших скоростях частицы формулы (80.10) и (80.11) дают завышенные значения для потерь энергии частицы.

7. При малых скоростях начинает сказываться захват электронов движущейся частицей. Такой захват в какой-то мере эквивалентен уменьшению числа z, а это приводит к меньшим потерям энергии по сравнению с тем, что дает формула Бора. Особенно сильно захват происходит в случае движения многократно заряженных положительных ионов, т. е. атомов, потерявших много электронов. Впрочем, иногда вместо захвата наблюдается и потеря электронов. Благодаря захвату электронов при уменьшении скорости частицы кривая потерь не уходит в бесконечность, как это было бы согласно формуле (80.10), а достигает максимума, после чего начинает постепенно снижаться.

При очень больших скоростях проявляется влияние поляризации среды, вызываемой электрическим полем частицы. Оно ослабляет или, как говорят, экранирует поле частицы, что уменьшает потери энергии последней. При нерелятивистских скоростях радиус экранирования (дебаевский радиус, см. т. III, § 121) превышает размеры атома. В этих случаях экранировка может проявиться лишь на расстояниях, больших $b_{\text{макс}}$, где ионизационные потери так и не возникают. Но в ультрарелятивистских случаях электрическое поле частицы сильно сплющено в направлении движения, растянуто в поперечном направлении и становится сильно неоднородным. В результате поляризация среды начинает сказываться уже на сравнительно малых расстояниях. Влияние

поляризации и в особенности захвата электронов среды трудно поддается теоретическому расчету. Эти эффекты учитываются эмпирически, и результаты выражаются в виде кривых пробег — энергия.

8. Расстояние, проходимое в веществе частицей до ее полной остановки, т. е. до того момента, когда она приходит в тепловое равновесие с окружающей средой, называется *пробегом.* Для вычисления пробега R замечаем, что на пути dx кинетическая энергия частицы $\mathscr{E} = Mv^2/2$ меняется на величину $d\mathscr{E}$, так что $dx = (dx/d\mathscr{E})\,d\mathscr{E} = (dx/d\mathscr{E})Mv\,dv$. Подставляя сюда вместо $d\mathscr{E}/dx$ выражение (80.10), приходим к дифференциальному уравнению

$$dx = -\frac{Mmv^3\,dv}{4\pi nz^2e^4\ln\left[mv^2/\overline{I}(1-\beta^2)\right]},$$

интегрирование которого дает

$$R = \frac{M}{z^2}\,f(v_0), \tag{80.14}$$

где v_0 — начальная скорость движения частицы, а функция f определяется интегралом

$$f(v_0) = -\int\limits_{v_0}^{0}\frac{mv^3}{4\pi ne^4\ln\left[mv^2/\overline{I}(1-\beta^2)\right]}\,dv. \tag{80.15}$$

Существенно, что эта функция для заданной среды одинакова для всех частиц. Если пренебречь слабой логарифмической зависимостью от скорости частицы, то

$$R \approx \frac{M}{z^2}\,v_0^4. \tag{80.16}$$

Однако как мы видели, применимость формулы (80.10) ограничена эффектами захвата электронов среды. Уточненную формулу для R можно получить из следующих простых соображений. Разделим весь путь движения частицы на две части: на часть, где захвата электронов практически не происходит и применима формула (80.10), и на оставшуюся часть, где существенную роль играют захваты. К первой части применимо выражение (80.14). Длина второй части пути от начальной скорости v_0 не зависит, т. е. является некоторой постоянной C. Значение этой постоянной различно для разных частиц и сред, в которых они движутся. Таким путем для полного пробега получается приближенная формула

$$R = \frac{M}{z^2}\,f(v_0) + C. \tag{80.17}$$

Для α-частицы в воздухе при комнатной температуре и нормальном давлении опыт дает $C = 0{,}2$ см. В алюминии пробег протона с энергией 5 МэВ равен 0,06 мм, а с энергией 10 МэВ — 0,17 мм.

Формула (80.17) справедлива при условии $R \ll \lambda_{\text{яд}}$, где $\lambda_{\text{яд}}$ — длина пробега относительного ядерного столкновения. Это условие не выполняется для адронов высоких энергий.

§ 81. Прохождение легких заряженных частиц через вещество

1. Благодаря малой массе при каждом столкновении движущейся легкой частицы (электрона или позитрона) изменение ее импульса относительно велико. Поэтому путь легкой частицы в среде не прямолинейный, а извилистый. Если пучок частиц направить на однородную среду, то он ведет себя по-разному в зависимости от того, состоит ли он из тяжелых частиц или из легких. В случае тяжелых частиц интенсивность пучка остается постоянной, если пройденный им путь x меньше длины пробега R. В очень же тонком слое вблизи границы $x = R$ частицы выбывают из пучка, и он резко обрывается. В случае же пучка из легких частиц интенсивность пучка убывает плавно и непрерывно на всем его протяжении. Поэтому об определенном пробеге R легкой частицы говорить не приходится. Можно ввести понятие *максимального* (или *экстраполированного*) *пробега* и *среднего пробега*. Максимальным пробегом называется минимальная толщина слоя вещества, в котором задерживаются все частицы. Он, очевидно, совпадает с полной длиной криволинейного пути, проходимого в веществе отдельной частицей. Чтобы получить средний пробег, надо взять длину прямолинейного пути, проходимого частицей в веществе до того, как она выбывает из пучка, и этот путь усреднить по всем частицам пучка.

Вторая особенность в поведении легких частиц состоит в том, что при изменении импульса в результате столкновения электрон (или позитрон) излучает. Поэтому помимо ионизационных, появляются *радиационные потери*, т. е. потери энергии на излучение фотонов.

Наконец, в-третьих, при движении электрона в среде проявляются *квантовые обменные эффекты*, наблюдающиеся во всякой системе тождественных частиц. Такие эффекты, разумеется, не возникают при движении позитрона в среде, поскольку электрон и позитрон — не тождественные частицы. Зато в этом случае возможен *процесс аннигиляции* позитрона с электроном. Впрочем, роль процессов аннигиляции, а также эффектов обмена относительно невелика. Поэтому торможение электрона и позитрона в среде происходит практически одинаково. Ниже для конкретности имеется в виду торможение электронов, так как позитронные пучки применяются в эксперименте значительно реже.

2. Качественно механизм ионизационных потерь в случае легких частиц такой же, что и в случае других заряженных частиц. Поэтому для электронов применима прежняя формула (80.2) с той только разницей, что из-за малости массы электрона и квантовомеханических эффектов обмена пределы интеграла $b_{\text{мин}}$ и $b_{\text{макс}}$ должны определяться иначе. С учетом этих и некоторых других факторов Бете (р. 1906) получил

следующую формулу для ионизационных потерь электронов:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dx} = \frac{2\pi n e^4}{mv^2}\left[\ln\frac{mv^2\mathscr{E}}{2\overline{I}(1-\beta^2)} - \ln 2(2\sqrt{1-\beta^2} - 1 + \beta^2) + \right.$$
$$\left. + 1 - \beta^2 + \frac{1}{8}(1 - \sqrt{1-\beta^2})\right], \quad (81.1)$$

где $\overline{I}$ — средний ионизационный потенциал атомов поглотителя, даваемый прежней приближенной формулой (80.5), а $\mathscr{E}$ — релятивистская кинетическая энергия электрона:

$$\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - mc^2. \quad (81.2)$$

В нерелятивистском пределе $\beta \to 0$:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dx} = \frac{4\pi n e^4}{mv^2}\ln\frac{mv^2}{2\overline{I}} \quad \text{(нерелятив.)}. \quad (81.3)$$

В ультрарелятивистском случае

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dx} = \frac{2\pi n e^4}{mc^2}\left[\ln\frac{\mathscr{E}^2}{2\overline{I}^2\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{1}{8}\right] \quad \text{(ультрарелятив.)}. \quad (81.4)$$

Ввиду малости массы электрона все три формулы (81.1), (81.3) и (81.4) находят практическое применение. Например, для электрона $mc^2 = 0{,}511$ МэВ, а потому электроны с энергиями в несколько мегаэлектронвольт уже являются ультрарелятивистскими.

3. При сравнении ионизационных потерь тяжелой и легкой частиц главное внимание следует обратить на то, что в формулах (80.10) и (80.11), с одной стороны, и (81.1), (81.3), (81.4) — с другой, определяющим является множитель перед логарифмом, так как логарифм медленно меняется с изменением параметров, характеризующих движение частиц. А этот множитель в случае движения однократно заряженных частиц фактически одинаков во всех формулах. Поэтому при одинаковых скоростях движения ионизационные потери тяжелой и легкой частиц примерно одинаковы. Это и понятно. Ионизационные потери возникают из-за воздействия электрического поля движущейся частицы на электроны среды. А эти поля́ совершенно одинаковы в случае тяжелой и легкой частиц, если только одинаковы их заряды и скорости движения.

Не так обстоит дело, когда сравниваются ионизационные потери легкой и тяжелой однозарядных частиц одинаковой энергии. В том случае, когда движение обеих частиц нерелятивистское, скорости частиц находятся в обратном отношении квадратных корней из их масс. Благодаря этому тяжелая частица более длительно эффективно воздействует на каждый электрон среды и поэтому быстрее теряет энергию. В этом

случае, как мы видели в предыдущем параграфе, ионизационные потери энергии пропорциональны массе частицы. Например, ионизационные потери протона примерно в 2000 раз превосходят ионизационные потери электрона той же энергии.

Более интересен случай, когда электрон ультрарелятивистский, но протон той же энергии еще может считаться нерелятивистским. В этом случае электрическое поле движущегося протона сферически-симметрично, тогда как у электрона оно сильно сплющено в направлении движения и растянуто в поперечном направлении. За счет этого ионизационные потери энергии электрона сильно возрастают. Сравним, например, электрон и протон с кинетической энергией $\mathscr{E} = 5$ МэВ. При такой энергии электрон уже может считаться ультрарелятивистским, тогда как протон остается нерелятивистским. Так как энергия покоя электрона $\mathscr{E}_0 = 0{,}5$ МэВ, а кинетическая энергия практически совпадает с полной, то $\mathscr{E} \approx \mathscr{E}_0/\sqrt{1-\beta^2}$, так что $1/\sqrt{1-\beta^2} \approx 10$. Сравнивая формулы (80.13) и (81.4), получаем

$$\frac{(d\mathscr{E}/dx)_\text{p}}{(d\mathscr{E}/dx)_\text{e}} = \frac{Mc^2}{\mathscr{E}}\,\frac{\ln A}{\ln B},$$

где

$$A = \frac{2\mathscr{E}m}{M\overline{I}} = \frac{2\cdot 5\cdot 10^6}{2000\cdot 10} \approx 5\cdot 10^2$$

(мы положили $\overline{I} = 10$ эВ),

$$B = \frac{\mathscr{E}^2}{2\overline{I}^2\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{5^2\cdot 10^{12}\cdot 10}{2\cdot 10^2} \approx 2{,}5\cdot 10^{12},$$

т. е.

$$\ln A = 2\ln 10 + \ln 5 = 2\cdot 2{,}3 + 1{,}6 = 6{,}2,$$

$$\ln B = 12\ln 10 + \ln 2{,}5 = 12\cdot 2{,}3 + 0{,}9 = 28{,}5.$$

Таким образом, отношение логарифмов равно всего около $1/5$, а множитель при логарифмах $Mc^2/\mathscr{E} = 938/5 \approx 200$. Ионизационные потери протона превышают ионизационные потери электрона приблизительно в 40 раз.

Наконец, рассмотрим случай, когда обе частицы, тяжелая и легкая, — ультрарелятивистские и обладают одной и той же кинетической энергией, которую в рассматриваемом случае можно считать равной полной энергии: $\mathscr{E} = mc^2/\sqrt{1-\beta_\text{e}^2} = Mc^2/\sqrt{1-\beta_\text{p}^2}$, где β_e — отношение v/c для легкой частицы, а β_p — для тяжелой. Таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta_\text{e}^2}} = \frac{\mathscr{E}}{mc^2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\beta_\text{p}^2}} = \frac{\mathscr{E}}{Mc^2}.$$

Для тяжелой частицы (протона) пользуемся формулой (80.10), полагая в ней $v = c$, для легкой — формулой (81.4) и получаем

$$\frac{(d\mathscr{E}/dx)_\mathrm{p}}{(d\mathscr{E}/dx)_\mathrm{e}} = 2\frac{\ln A}{\ln B},$$

где

$$A = \frac{mc^2}{\overline{I}(1-\beta_\mathrm{p}^2)} = \frac{m}{M}\,\frac{\mathscr{E}^2}{\overline{I}Mc^2},$$

$$B = \frac{\mathscr{E}^2}{2\overline{I}^2\sqrt{1-\beta_\mathrm{e}^2}} = \frac{\mathscr{E}^3}{2\overline{I}^2mc^2}.$$

Возьмем числовой пример: $\mathscr{E} = 10$ ГэВ $= 10^{10}$ эВ, $\overline{I} = 10$ эВ, $m/M = 1/2000$, $Mc^2 = 1$ ГэВ $= 10^9$ эВ, $mc^2 = 0{,}5$ МэВ $= 0{,}5 \cdot 10^6$ эВ. Тогда $\ln A = 15{,}4$, $\ln B = 50{,}6$ и

$$\frac{(d\mathscr{E}/dx)_\mathrm{p}}{(d\mathscr{E}/dx)_\mathrm{e}} \approx 0{,}6.$$

Ионизационные потери ультрарелятивистского электрона в этом случае даже больше (примерно в два раза), чем ультрарелятивистского протона той же энергии. Причина этого в том, что по сравнению с электрическим полем неподвижной частицы электрическое поле ультрарелятивистского электрона изменяется более значительно (сплющивается сильнее в направлении движения и расширяется в поперечном направлении), чем электрическое поле ультрарелятивистского протона той же энергии ($\beta_\mathrm{e} > \beta_\mathrm{p}$).

Отличие в поведении заряженных частиц различных энергий проявляется, например, при их регистрации. Так, протон с энергией 5 МэВ оставляет в ядерной фотоэмульсии отчетливый след, а электрон с той же энергией практически незаметен. Ультрарелятивистские же частицы (например, в пузырьковой камере) трудно отличить друг от друга по оставляемым ими трекам, так как треки всех заряженных ультрарелятивистских частиц имеют практически одинаковую толщину.

4. Ускоренно движущаяся заряженная частица, как известно, испускает электромагнитные волны. В частности, это происходит при ее столкновениях с частицами вещества, через которые она проходит. Возникающее электромагнитное излучение называется *тормозным*, а потери энергии частицы на тормозное излучение — *радиационными.* Примером тормозного излучения может служить непрерывный рентгеновский спектр, возникающий при торможении электронов на антикатоде рентгеновской трубки. Торможение электронов высоких энергий используется в электронных ускорителях для получения пучков γ-лучей. В т. III, § 141 показано, что интенсивность тормозного излучения (т. е. электромагнитная энергия, испускаемая частицей в единицу времени) в нерелятивистском неквантовом приближении определяется выражением

$$w = \frac{2}{3}\,\frac{z^2e^2}{c^3}\,\dot{\mathbf{v}}^2, \tag{81.5}$$

где ze — заряд частицы, а $\dot{\mathbf{v}}$ — ее ускорение. Ускорение равно $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}/m$, где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на частицу, а m — ее масса. Отсюда следует, что практически все радиационное торможение приходится на излучение электронов, так как излучение протона при равных действующих силах в $(m_\text{p}/m_\text{e})^2 = 1836^2 \approx 3{,}4 \cdot 10^6$ раз слабее, чем у электрона. Ионизационные потери энергии движущегося электрона обусловлены столкновениями его с электронами атомных оболочек. Они в основном пропорциональны числу электронов Z в атоме среды. Радиационные потери, напротив, в основном обусловлены столкновениями движущегося электрона с атомными ядрами среды. Они пропорциональны квадрату кулоновской силы притяжения между движущимся электроном и ядром. Эта сила в свою очередь пропорциональна Ze, а потому радиационные потери должны возрастать пропорционально второй, а не первой степени Z. Этот вывод остается справедливым и в последовательной релятивистской квантовой теории радиационного торможения, развитой Бете и Гайтлером (1904–1981).

5. Тормозное излучение, возникающее в каждом индивидуальном акте столкновения электрона с атомом, существенно зависит от степени экранирования электрического поля ядра атомными электронами. С классической точки зрения эта зависимость определяется соотношением между прицельным расстоянием налетающего электрона b и «радиусом ядра» a. Если $b/a \ll 1$, то экранирование несущественно, а при $b/a \gg 1$ экранирование полное. Все же основное значение имеет торможение электрона электрическим полем ядра. В пренебрежении экранированием энергия, теряемая электроном на радиационное торможение при прохождении одного и того же пути b в веществе, пропорциональна числу ядер, мимо которых пролетает электрон. Иными словами, эта энергия пропорциональна плотности вещества ρ и проходимому электроном пути dx. Поэтому радиационные потери энергии электрона определяются выражением

$$-\left(\frac{d\mathscr{E}}{dx}\right)_\text{рад} = \frac{\mathscr{E}}{l_r}, \tag{81.6}$$

где постоянная l_r называется *радиационной длиной.* Как уже говорилось в предыдущем параграфе (п. 6), при рассмотрении процессов поглощения вместо истинной толщины x вводят ее произведение на плотность вещества ρx (называя эту величину также толщиной). Во избежание недоразумений радиационную длину, понимаемую в таком смысле, мы будем обозначать большой буквой L_r. В таблицах обычно дают значения L_r в граммах на квадратный сантиметр. Не приводя теоретических выражений для L_r, к которым приводит теория Бете и Гайтлера ограничимся приведением числовых значений L_r для некоторых веществ (см. табл. 13). Из этой таблицы находим, например, что для сухого воздуха при температуре 18 °C и нормальном давлении ($\rho = 0{,}001213$ г/см^3)

$$l_r = \frac{36{,}5}{0{,}00121} = 30\,200 \text{ см } = 302 \text{ м.}$$

Согласно формуле (81.6) радиационные потери линейно растут с энергией, тогда как ионизационные потери при высоких энергиях

Таблица 13

Радиационные длины и критические энергии для различных веществ

Вещество	$\mathscr{E}_{кр}$, МэВ	L_r, г/см^2	Вещество	$\mathscr{E}_{кр}$, МэВ	L_r, г/см^2
H	340	58	Al	47	23,9
He	220	83	Fe	24	13,8
C	103	42,5	Cu	21,5	12,8
Воздух	83	36,5	Pb	6,9	5,8

меняются с энергией логарифмически, т. е. от энергии практически не зависят. Для сравнения можно пользоваться приближенным соотношением

$$\frac{(d\mathscr{E}/dx)_{рад}}{(d\mathscr{E}/dx)_{ион}} \approx \frac{Z\mathscr{E}}{800}, \qquad (81.7)$$

где энергия $\mathscr{E}$ измеряется в мегаэлектронвольтах. Из формулы видно, что при $\mathscr{E} > 800/Z$ радиационные потери превышают ионизационные. Энергия $\mathscr{E}_{кр}$, при которой радиационные потери становятся равными ионизационным, называется *критической*. Для этой энергии приближенная формула (81.7) в мегаэлектронвольтах дает $\mathscr{E}_{кр} \approx 800/Z$. При очень высоких энергиях ионизационными потерями можно пренебречь и уравнение (81.6) проинтегрировать. Тогда получится

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{-x/l_r}. \qquad (81.8)$$

§ 82. Прохождение гамма-квантов через вещество

1. Ориентировочно к γ-излучению относят электромагнитные волны, длина которых значительно меньше межатомных расстояний, т. е. $\lambda \ll 10^{-8}$ см. В современных ускорителях получаются γ-кванты с энергией $\mathscr{E} \sim 20$ ГэВ, т. е. с длиной волны $\lambda = 2\pi\hbar c/\mathscr{E} \approx 6 \cdot 10^{-15}$ см $=$ $= 0{,}06$ Фм. Для практических приложений наибольший интерес представляет область от десятков килоэлектронвольт до 200–300 МэВ.

Теория прохождения γ-квантов в веществе [1]) есть проблема квантовой электродинамики, а потому здесь мы не можем ей касаться. Отметим только, что пучок γ-квантов поглощается веществом за счет электромагнитных взаимодействий. Однако по сравнению с заряженными частицами γ-кванты не имеют электрического заряда. По этой причине они не подвержены влиянию дальнодействующих кулоновских сил. Взаимодействие γ-кванта с электроном ограничено областью, линейные размеры которой порядка комптоновской длины волны электрона,

[1]) Изложенное в этом параграфе в равной мере относится к рентгеновскому излучению эквивалентной энергии.

т. е. порядка 10^{-11} см. Поэтому, проходя через вещество, γ-кванты сравнительно редко сталкиваются с электронами и атомными ядрами. Зато эти столкновения, как правило, сопровождаются резкими изменениями направления движения γ-квантов, что выводит их из пучка. Вторая особенность γ-квантов состоит в том, что они, как безмассовые частицы, могут двигаться только со скоростью c. Они не могут замедляться, а могут только либо поглощаться, либо отклоняться в сторону, либо порождать пары частица — античастица.

Таким образом, γ-кванты выбывают из пучка, как правило, в результате единичных актов столкновения с электронами или атомными ядрами вещества, через которое они проходят. Для γ-квантов нельзя ввести понятие пробега аналогично тому, как это делается для тяжелых заряженных частиц, испытывающих ионизационное торможение в веществе. Число γ-квантов, выбывающих из моноэнергетического пучка при прохождении слоя вещества толщиной dx, пропорционально dx и интенсивности пучка, падающего на этот слой. Поэтому с расстоянием x интенсивность параллельного моноэнергетического пучка γ-квантов должна убывать экспоненциально:

$$I(x) = I(0)e^{-n\sigma x}, \tag{82.1}$$

где σ — полное эффективное сечение ослабления (поглощения и рассеяния) γ-квантов на атоме, а n — число атомов поглотителя в единице объема. Величина $\tau = n\sigma$ называется *линейным коэффициентом поглощения γ-квантов.* Вместо нее удобнее пользоваться массовым коэффициентом поглощения $\mu = \tau/\rho$. Если расстояние x выражать в граммах на квадратный сантиметр, то формулу (82.1) можно переписать в виде

$$I(x) = I(0)e^{-\mu x}. \tag{82.2}$$

Основными процессами, выводящими γ-кванты из параллельного пучка, являются *фотоэффект*, *эффект Комптона* и *рождение электронно-позитронных пар.*

2. Фотоэффект уже рассматривался в § 2. Однако там речь шла преимущественно о фотоэффекте с поверхности металлов. Здесь же нас интересует главным образом фотоэффект на атомах среды, в которой распространяется пучок γ-квантов.

Свободный электрон принципиально не может поглощать и испускать γ-квант, так как в противном случае было бы нарушено одновременное выполнение законов сохранения энергии и импульса (см. § 1, п. 5). При фотоэффекте же на электроне атома вся энергия и импульс падающего γ-кванта передаются электрону и атомному остатку. Поэтому электрон должен быть обязательно связан. Кинетическая энергия $\mathscr{E}_{\mathrm{e}}$, которую получает освободившийся электрон, определяется соотношением

$$\mathscr{E}_{\mathrm{e}} = \mathscr{E}_\gamma - I_i, \tag{82.3}$$

где I_i — энергия ионизации той оболочки, с которой был вырван электрон (под i надо понимать $K, L_{\mathrm{I}}, L_{\mathrm{II}}, L_{\mathrm{III}}, \ldots$). Энергией отдачи,

которую приобретает атом, точнее, образовавшийся ион, ввиду ее малости мы пренебрегаем.

Ясно, что фотоэффект с i-й оболочки невозможен, если $\mathscr{E}_\gamma < I_i$, так как по своему смыслу кинетическая энергия $\mathscr{E}_e$ существенно положительна. Если же $\mathscr{E}_\gamma > I_i$, то естественно ожидать, что с возрастанием $\mathscr{E}_\gamma$ вероятность фотоэффекта должна убывать, так как при этом электрон становится все менее и менее связанным и его поведение должно приближаться к поведению свободного электрона. Опыт и теория оправдывают это ожидание.

На схематическом рис. 145 показан ход эффективного сечения фотоэффекта на атоме $\sigma_ф$ в зависимости от энергии падающего γ-кванта $\mathscr{E}_\gamma$. При очень больших $\mathscr{E}_\gamma$ сечение $\sigma_ф$ мало. С уменьшением $\mathscr{E}_\gamma$ оно возрастает, но при $\mathscr{E}_\gamma = I_K$ внезапно резко падает. Это падение происходит потому, что при $\mathscr{E}_\gamma < I_K$ вырывание электрона с K-слоя атома становится невозможным. После этого падения с дальнейшим уменьшением $\mathscr{E}_\gamma$ снова начинается возрастание $\sigma_ф$, пока не наступит новое резкое падение на L-слое.

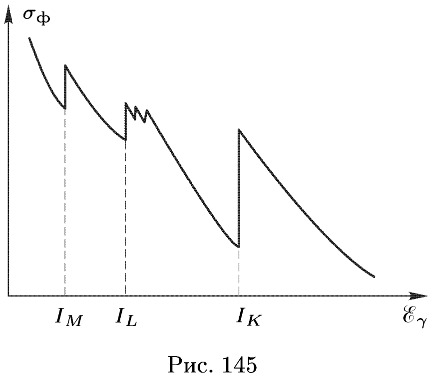


Рис. 145

Поскольку этот слой состоит из трех близко расположенных оболочек L_I, L_II, L_III, на кривой $\sigma_ф = \sigma_ф(\mathscr{E}_\gamma)$ появляются три зубца, изображенные на рис. 145. После прохождения слоя L, при дальнейшем уменьшении $\mathscr{E}_\gamma$ опять происходит увеличение $\sigma_ф$, пока не будет достигнут слой M и не произойдет соответствующее ему резкое падение $\sigma_ф$, и т. д. При $\mathscr{E}_\gamma < 0{,}2$ МэВ эффективное сечение фотоэффекта падает с ростом энергии приблизительно как $\mathscr{E}_\gamma^{-7/2}$, а при $\mathscr{E}_\gamma > 0{,}5$ МэВ — приблизительно как $\mathscr{E}_\gamma^{-1}$. При этом, когда $\mathscr{E}_\gamma > I_K$, основную часть (около 80 %) в сечение $\sigma_ф$ вносит вырывание электронов из K-слоя (для $Z > 60$). Вероятность фотоэффекта растет с ростом Z приблизительно пропорционально Z^n, где n заключено между 4 и 5. Такая сильная зависимость опять-таки объясняется тем, что в легких элементах электроны в атомах связаны слабее, чем в тяжелых. Поэтому фотоэффект особенно существен при взаимодействии γ-излучения с тяжелыми атомами.

С описанным ходом эффективного сечения γ-излучения мы уже встречались в § 48, когда говорили о поглощении рентгеновских лучей в веществе.

В области энергий порядка энергий связи электронов в атомных оболочках сечение фотоэффекта очень велико по сравнению с сечением при более высоких энергиях. Например, для алюминия

$\sigma_{\text{ф}} \approx 6 \cdot 10^{-18}$ см^2 при $\mathscr{E}_\gamma = 1$ кэВ и $\sigma_{\text{ф}} \approx 6 \cdot 10^{-25}$ см^2 при $\mathscr{E}_\gamma =$ $= 0{,}1$ МэВ. Таким образом, фотоэффект является преобладающим механизмом поглощения при низких энергиях γ-излучения, а при высоких энергиях его роль становится ничтожной.

3. С увеличением энергии γ-квантов фотоэлектрическое поглощение отходит на задний план. Оно уступает место *эффекту Комптона*, разобранному в § 3. Эффект Комптона начинает играть существенную роль, когда энергия γ-квантов начинает превосходить энергию связи электрона в атоме. Когда энергия связи электрона в атоме мала по сравнению с энергией γ-кванта, электрон может считаться свободным, как мы и полагали в § 3. Ослабление пучка γ-квантов в веществе, обусловленное явлением Комптона, приводит и к рассеянию γ-излучения (при этом оно выбывает из параллельного пучка) и к частичному уменьшению энергии γ-излучения (т. е. к поглощению) за счет передачи части энергии комптоновским электронам отдачи.

Сечение рассеяния мягких γ-квантов ($\hbar\omega/m_\text{e}c^2 \ll 1$) на электроне определяется классической формулой Томсона

$$\sigma_\text{T} = \frac{8\pi}{3}\, r_\text{e}^2 = 0{,}665 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2, \tag{82.4}$$

где r_e — «классический радиус электрона», т. е.

$$r_\text{e} = \frac{e^2}{m_\text{e}c^2} = 2{,}82 \cdot 10^{-13} \text{ см}. \tag{82.5}$$

Формула Томсона была выведена в § 10 (п. 2). Томсоновское, или классическое, рассеяние когерентно, т. е. происходит без изменения длины волны. Если условие $\hbar\omega/m_\text{e}c^2 \ll 1$ не выполняется, то формула Томсона не справедлива. В этом случае надо пользоваться формулой Клейна–Нишины–Тамма (10.4), которую дает квантовая электродинамика. В отличие от томсоновского рассеяния, комптоновское рассеяние (при энергии γ-квантов, большей энергии связи электрона в атоме) *некогерентно* и происходит с уменьшением длины волны. Это уменьшение, как было выяснено в § 3, одинаково для всех веществ.

Заметим еще, что вероятность комптоновского рассеяния на ядрах пренебрежимо мала, так как в этом случае роль «классического радиуса электрона» r_e играет величина $Z^2e^2/M_{\text{яд}}c^2$, а она в тысячи, десятки или сотни тысяч раз меньше, чем у электрона.

4. Гамма-кванты, если их энергия достаточно велика, взаимодействуют с веществом также посредством *образования пар электрон — позитрон*. Не будем останавливаться на истории предсказания существования позитрона, которое теоретически было сделано Дираком, так как его первое толкование (позитрон — «дырка» в состояниях электрона с отрицательной энергией) пришлось оставить. Напомним только, что позитрон является античастицей по отношению к электрону. Он обладает той же массой, тем же спином, теми же по величине, но противоположными по знаку зарядом и магнитным моментом, что

и электрон. Позднейшее развитие физики элементарных частиц, показало, что каждая элементарная частица, как правило, имеет свою античастицу.

Электрон и позитрон, сталкиваясь друг с другом, могут «исчезать», превращаясь в электромагнитное излучение. Этот процесс называется (не вполне удачно) *аннигиляцией.* При аннигиляции свободных электрона и позитрона не может появиться только один γ-квант, так как в противном случае нарушалось бы одновременное выполнение законов сохранения энергии и импульса. Это наиболее очевидно, если электрон и позитрон до столкновения находились в состоянии покоя. В этом случае суммарный импульс до столкновения равен нулю, тогда как импульс образовавшегося γ-кванта отличен от нуля. Но образование одного γ-кванта невозможно и в том случае, когда до столкновения электрон и позитрон двигались с различными скоростями.

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть процесс аннигиляции в системе центра масс. В такой системе суммарный импульс до столкновения также равен нулю, а импульс образовавшегося γ-кванта по-прежнему отличен от нуля, так что заключение остается в силе. Но оно остается в силе и при рассмотрении процесса аннигиляции в любой системе отсчета, так как число образовавшихся γ-квантов от выбора системы отсчета не зависит. Таким образом, при аннигиляции электрона и позитрона должны возникать по меньшей мере два γ-кванта. Рассуждение, проведенное в обратном порядке, показывает, что свободно распространяющийся γ-квант не может породить пару, т. е. превратиться в электрон и позитрон. Но процесс образования пар может осуществляться и действительно осуществляется в электрическом поле атомного ядра. Как показывает квантово-механический расчет, согласующийся с опытом, превращение γ-квантов в электрон–позитронные пары происходит не внутри ядра, а около него в пределах области с линейными размерами порядка комптоновской длины волны электрона. Ядро воспринимает импульс отдачи, обеспечивая тем самым выполнение закона сохранения энергии — импульса, причем передача импульса отдачи ядру происходит посредством его кулоновского поля. Гамма-кванты могут рождать электрон–позитронные пары и в кулоновском поле электрона. (Возможно также рождение пар при столкновении двух γ-квантов.) Однако с наибольшей вероятностью происходит рождение пар γ-квантами в кулоновском поле ядра. Поскольку масса γ-кванта равна нулю, превратиться в электрон–позитронную пару он может только тогда, когда его энергия $\mathscr{E}_\gamma$ больше суммы энергий покоя электрона и позитрона, т. е. $2mc^2 \approx 1{,}02$ МэВ. Сечение $\sigma_{\text{пар}}$ рождения пары равно нулю, если $\mathscr{E}_\gamma < 2mc^2$. Таков действительно порог рождения пары, если оно происходит в электрическом поле тяжелой частицы — атомного ядра, так как тяжелая частица уносит малую энергию. Если же пара рождается при столкновениях γ-квантов с электроном, то электрон получает энергию того же порядка, что и частицы пары. Поэтому в этом случае рождение пары возможно только при энергии γ-кванта,

существенно превышающей $2m_e c^2$. В области энергий порядка $5m_e c^2 < \mathscr{E}_\gamma < 50m_e c^2$ теоретические расчеты в квантовой электродинамике для эффективного сечения $\sigma_{\text{пар}}$ образования пары на атомном ядре приводят к соотношению

$$\sigma_{\text{пар}} \sim Z^2 \ln \frac{\hbar\omega}{m_e c^2}. \tag{82.6}$$

По модулю сечение $\sigma_{\text{пар}}$ того же порядка, что и сечение тормозного излучения. При очень высоких энергиях величина $\ln(\hbar\omega/m_e c^2)$ заменяется постоянной из-за экранирования поля ядра электронами атомной оболочки.

Таким образом, выше порога рождения пар сечение $\sigma_{\text{пар}}$ постепенно возрастает, а при очень высоких энергиях (порядка $1000m_e c^2$) практически стремится к постоянному пределу:

$$\sigma_{\text{пар}} \approx 0{,}08 Z^2 r_e^2. \tag{82.7}$$

Наоборот, сечения фото- и комптон-эффектов при высоких энергиях γ-квантов спадают практически до нуля. При увеличении энергии рождение пар становится сначала основным, а при дальнейшем росте энергии практически единственным механизмом поглощения γ-излучения в веществе.

5. Если ограничиться только тремя основными механизмами ослабления, рассмотренными выше, то при определении полного линейного коэффициента ослабления τ γ-квантов в веществе надо принять во внимание, что в случае фотоэффекта и рождения пар рассеивающими центрами являются атомы, а в случае эффекта Комптона — электроны, которых в Z раз больше, чем атомов. Поэтому

$$\tau = n\sigma_{\text{ф}} + nZ\sigma_K^e + n\sigma_{\text{пар}}, \tag{82.8}$$

где n — число атомов в единице объема вещества, а $\sigma_{\text{ф}}, \sigma_K^e$ и $\sigma_{\text{пар}}$ — эффективные сечения фотоэффекта на атоме, эффекта Комптона на электроне и рождения пары на атомном ядре. Первое слагаемое в (82.8) преобладает при низких энергиях, второе — при средних (несколько мегаэлектронвольт), а третье — при высоких. Поэтому τ имеет минимум в области, где влияние комптоновского рассеяния наибольшее. Такой минимум особенно резко выражен для тяжелых элементов. В качестве примера на рис. 146 приведены кривые для свинца, которые наглядно показывают относительную роль всех трех рассмотренных нами механизмов ослабления в различных областях энергий γ-квантов.

6. Подводя итог последних трех параграфов, заметим, что заряженная частица, пролетая в воздухе, образует в среднем одну пару ионов противоположного знака на 33 эВ потерь. Например, α-частица с энергией 5 МэВ образует в воздухе $5 \cdot 10^6 : 33 \approx 150\,000$ пар ионов. Ионизационная способность заряженной частицы в других газовых средах примерно такая же, как и в воздухе. Гамма-кванты при прохождении через вещество передают свою энергию в основном электронам и, следовательно, вызывают ионизацию среды.

Приведем пример, иллюстрирующий это утверждение. Пусть электроны с энергией $\mathscr{E}_e = 1$ МэВ и γ-излучение той же энергии падают на поверхность алюминия. Экстраполированный пробег электро-

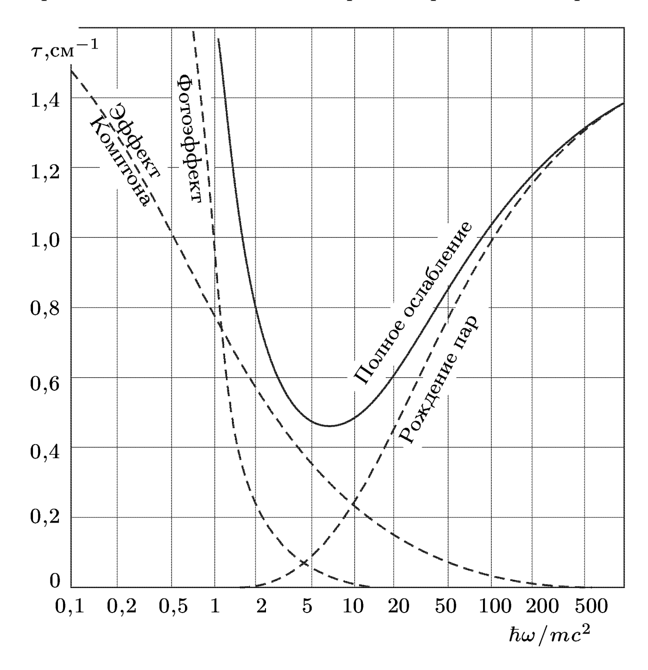


Рис. 146

на такой энергии может быть приближенно рассчитан по формуле $R\,(r/\text{см}^2) \approx 0{,}5\mathscr{E}_e\,(\text{МэВ}) - 0{,}1$.

При $\mathscr{E}_e = 1$ МэВ значение $R \approx 0{,}4r/\text{см}^2 \approx 0{,}15$ см. Средняя длина свободного пробега γ-лучей в веществе $\lambda = \dfrac{1}{n_0\sigma}$ (из формулы (82.1)) видно, что на пути $x = \lambda$ интенсивность γ-излучения уменьшается в e раз). Для γ-квантов с $\varepsilon = 1$ МэВ значения $n_0\sigma = 0{,}165$ см$^{-1}$ и $\lambda = 6$ см. Но в отличие от заряженных частиц проникающая способность γ-квантов очень велика. При облучении заряженными частицами ионизуется лишь только тонкий поверхностный слой, а при облучении γ-квантами — вся толща вещества.

§ 83. Другие проявления взаимодействия ядерных частиц с веществом

1. Заряженная частица, проходя через вещество, испытывает торможение из-за кулоновского взаимодействия не только с электронами, но и с *атомными ядрами.* Это — упругие столкновения с передачей энергии. Потери энергии частицы из-за этого эффекта выражаются

формулой типа (80.2):

$$-\left(\frac{d\mathscr{E}}{dx}\right)_{\text{яд.кул}} = \frac{4\pi z^2 Z^2 e^4 N}{M_{\text{яд}} v^2} \ln\frac{b_{\text{макс}}}{b_{\text{мин}}} = \frac{m_{\text{e}}}{m_{\text{p}}}\,\frac{Z}{A}\left(-\frac{d\mathscr{E}}{dx}\right)_{\text{эл}}, \tag{83.1}$$

где $N = n/Z$ — число ядер в единице объема, а m_{p} — масса протона. При качественном сравнении этой формулы с (80.2) логарифмический множитель не играет роли. Существен только множитель $(m_{\text{e}}/m_{\text{p}})Z/A \approx 1/4000$, стоящий перед логарифмом. Он появляется из-за различия масс и зарядов электрона и атомного ядра. Благодаря этому множителю потери энергии частиц при кулоновском торможении на атомных ядрах в тысячи раз меньше, чем на электронах. Однако из-за относительно большой массы ядра кулоновское рассеяние на ядрах может происходить на большие углы (и даже назад) уже в результате единичных актов рассеяния. Это как раз тот эффект, который привел Резерфорда к заключению о существовании атомного ядра (см. § 9).

2. Все частицы, за исключением фотонов, нейтрино, электронов, позитронов и мюонов, способны вступать в сильные (ядерные) взаимодействия. Такие частицы называются *адронами.*

Сильные взаимодействия положительно заряженных адронов с атомными ядрами начинаются с энергий 20–30 МэВ (в случае отрицательно заряженных адронов нет кулоновского барьера). Так как они проявляются на расстояниях порядка размеров атомного ядра, то частица сталкивается с ядром при сильных взаимодействиях примерно в $Z(R_{\text{ат}}/R_{\text{яд}})^2 \approx 10^{10} Z$ раз реже, чем с электронами при кулоновских взаимодействиях. Поэтому при движении в веществе частица испытывает ионизационное торможение, но ядерные столкновения претерпевает крайне редко. Это обстоятельство делает возможным рассматривать действие приборов для регистрации заряженных ядерных частиц (например, камеры Вильсона или пузырьковой камеры) без учета ядерных столкновений, а с учетом только ионизационного торможения, при котором, как известно, из-за малости массы электрона путь тяжелой частицы (трек) остается прямолинейным. Зато при каждом ядерном столкновении частица либо резко отклоняется в сторону (рассеивается на большой угол), либо поглощается, либо порождает новые частицы. Эти акты регистрируются по резкому излому трека, изменению его толщины и длины, по появлению новых треков, исходящих из одной точки («звезда»). Но при расчете радиационной защиты для релятивистских ускорителей и космических кораблей учет ядерных столкновений необходим.

3. Если скорость заряженной частицы превышает фазовую скорость света в рассматриваемой среде, то возникает *излучение Вавилова–Черенкова* (см. § 6, а также т. IV, § 38). Появляются потери энергии частицы на это излучение. Разумеется, они содержатся в найденных нами ранее ионизационных потерях и имеют тот же порядок, что и радиационные потери. По углу θ, под которым распространяется черенковское излучение, можно определить скорость частицы, что и делается в черенковских счетчиках. Если при этом известен импульс частицы

(по кривизне траектории в магнитном поле), то можно определить сорт частицы (по релятивистской ионизации частицы могут быть неразличимы). Поэтому черенковские счетчики — один из обязательных элементов установки, предназначенной для изучения релятивистских частиц.

4. Позитроны при прохождении через вещество в дополнение к ионизационным и радиационным потерям испытывают еще *аннигиляционные потери* за счет *двухфотонной аннигиляции* с электронами вещества:

$$e^+ + e^- \to \gamma + \gamma.$$

Сечение этого процесса при высоких энергиях меньше сечения ионизации. Но для медленных позитронов оно является определяющим.

5. Поглощаясь ядром, γ-кванты могут вызывать *ядерный фотоэффект*, т. е. выбивать из ядра нуклоны (обычно нейтроны), а также расщеплять атомное ядро. Но эти процессы практически не играют роли в поглощении γ-излучения. Порог ядерного фотоэффекта соответствует энергии связи нуклона в ядре, т. е. лежит в области энергий 6–10 МэВ. Эффективные сечения указанных процессов, как правило, возрастают с увеличением атомного номера Z. Если энергия γ-кванта во много раз превышает среднюю энергию связи нуклона, то возможно фоторасщепление ядра с вылетом нескольких нуклонов (нейтронов и протонов). При энергиях γ-квантов, превышающих $2m_\mu c^2 = 212$ МэВ (m_μ — масса мюона), в кулоновском поле ядра начинается процесс рождения мюонных пар ($\mu^+\mu^-$), аналогичный процессу рождения электрон–позитронных пар. При $\mathscr{E}_\gamma > m_\pi c^2 \approx 140$ МэВ (m_π — масса π-мезона) при взаимодействии с ядрами начинается фотогенерация π-мезонов. Поглощение γ-излучения за счет перечисленных процессов при высоких энергиях пренебрежимо мало по сравнению с поглощением их из-за рождения электрон–позитронных пар в кулоновском поле ядра.

6. Тормозное излучение электронов сопровождается возникновением мощных потоков γ-квантов, испускаемых преимущественно вперед. От таких потоков требуется усиленная защита, так как проникающая способность γ-квантов значительно превосходит проникающую способность электронов.

Электрон, позитрон или γ-квант, если их энергия достигает 1 ГэВ или выше, распространяясь в веществе, порождают *электрон–позитронные ливни.* Это явление заключается в следующем. Первичная частица, например электрон, тормозясь в электрическом поле ядра, испускает γ-квант высокой энергии. Этот γ-квант рождает электрон–позитронную пару в электрическом поле другого ядра. Электрон-позитронные пары в свою очередь порождают тормозные γ-кванты и т. д. Так возникает поток частиц, летящих практически в направлении первичной частицы, так как все эти частицы релятивистские. Этот поток и называется *ливнем.* В веществе поток частиц ливня после

своего возникновения сначала резко усиливается, но после прохождения некоторого расстояния начинает уменьшаться. Когда энергия отдельных частиц ливня уменьшается настолько, что ионизационные потери начинают преобладать над радиационными, ливень прекращается. Подобные множественные процессы образования частиц, но более разнообразные по составу вызываются и тяжелыми заряженными частицами (протонами, $\pi^{\pm}$-мезонами и пр.). Сначала они наблюдались в земной атмосфере и вызывались частицами космических лучей высоких энергий (см. § 103, п. 12). Каскады таких частиц, порождаемые первичными частицами с энергией $\mathscr{E} \gtrsim 10^5$ ГэВ, содержат 10^6–10^9 частиц и называются *широкими атмосферными ливнями.* Отдельный ливень покрывает площадь земной поверхности в несколько квадратных километров. С появлением ускорителей на высокие энергии основные исследования множественных процессов стали производиться на ускорителях.

7. Налетающие частицы достаточно высоких энергий при неупругих столкновениях с атомными ядрами могут частично разрушать их, например выбивать протоны, нейтроны или вызывать другие ядерные превращения. В результате образуются новые атомные ядра и новые изотопы химических элементов. Они, как правило, радиоактивны, так что в веществе возникает *наведенная радиоактивность.* Реакции выбивания протонов или нейтронов из ядра и прочие ядерные реакции, производимые электронами и γ-квантами, сильно эндотермичны и имеют порог около 10 МэВ. Но даже выше этого порога из-за слабости электромагнитных взаимодействий сечения этих процессов очень малы — на несколько порядков меньше площади эффективного сечения самого атомного ядра. Проникновению протонов и α-частиц в ядро препятствует *кулоновский потенциальный барьер*, особенно высокий в случае тяжелых ядер. Поэтому протоны и α-частицы могут создать заметную наведенную активность лишь при сравнительно высоких энергиях (во всяком случае, больше примерно 10 МэВ). Заметим еще, что α- и β-частицы, а также γ-кванты, возникающие в результате радиоактивных распадов ядер, обладают энергией всего в несколько мегаэлектронвольт. Такие радиоактивные излучения, как правило, создать дополнительную наведенную радиоактивность не могут.

Глава XII
ИСТОЧНИКИ И МЕТОДЫ РЕГИСТРАЦИИ ЯДЕРНЫХ ЧАСТИЦ

§ 84. Ускорители

1. Единственный способ изучения ядер и элементарных частиц, за исключением получения некоторых статических характеристик ядер (спины, магнитные и электрические квадрупольные моменты), состоит в осуществлении столкновений одних частиц с другими и регистрации последствий столкновений. Сначала для этой цели (в опытах Резерфорда и др.) использовались α- и β-частицы, возникающие в результате распада естественных радиоактивных ядер, а также частицы высоких энергий, содержащиеся в космических лучах. С изобретением ускорителей основные исследования рассматриваемого типа осуществляются с заряженными частицами, ускоряемыми для этой цели в электрических и магнитных полях.

Ускорители — очень сложные установки. Их устройство и работа — это вопрос не ядерной физики, а физической электротехники. Но роль ускорителей в ядерной физике и в особенности в физике элементарных частиц настолько велика (можно сказать — решающая), что понимание принципов их работы абсолютно необходимо. Краткое изложение этих принципов и является целью настоящего параграфа. При этом мы оставим в стороне многие технические и даже физические детали, хотя они и весьма существенны для работы ускорителей. Помимо физических применений, ускорители начинают все больше и больше использоваться за пределами физики (химия, биофизика, геофизика) и в прикладных целях (стерилизация продуктов, дефектоскопия, лучевая терапия и т. п.). Однако рассматривать подобные применения мы не будем.

При осуществлении столкновений более тяжелые частицы обычно покоятся и называются *частицами мишени*, а более легкие налетают на них в виде пучка *ускоренных частиц.* В ускорителях на встречных пучках частицы движутся навстречу друг другу, так что их деление на частицы мишени и частицы пучка теряет смысл. Кроме того, мишенями могут служить только частицы и ядра, которые входят в состав макроскопических тел и живут достаточно долго (не менее нескольких минут), а также протон и электрон. Из всех остальных частиц и ядер изготовить мишени не удается. В результате у нас нет, например, прямых экспериментальных данных о рассеянии нейтронов на нейтронах, тогда как рассеяние нейтронов на протонах и в особенности протонов на протонах экспериментально исследовано с большой полнотой.

Что касается ускоряемых частиц, то в большинстве ускорителей получаются пучки ускоренных протонов или электронов. В ускорителях получают также пучки дейтронов и α-частиц. Имеется небольшое количество ускорителей тяжелых ионов: многократно заряженных ионов углерода, азота, кислорода и пр. Такие ускорители применяются главным образом для синтеза сверхтяжелых трансурановых элементов (см. § 94), а также для поисков сверхтяжелого состояния ядерной материи. Созданы источники для ускорения позитронов и антипротонов. Энергии ускоренных заряженных частиц меняются в пределах от нескольких мегаэлектронвольт до сотен гигаэлектронвольт, причем верхний предел определяется не принципиальными трудностями, а уровнем развития ускорительной техники. Этот предел постоянно повышается примерно на порядок за десятилетие.

2. Первым ускорителем, получившим практические применения в ядерной физике (начиная с 30-х годов) является *электростатический генератор Ван-де-Граафа* (1901–1967). Принцип работы этого генератора уже был описан нами (см. т. III, § 11). Из внутренней области полого металлического шара, заряжаемого до очень высокого потенциала, выходит многосекционная ускорительная вакуумная трубка, в которой и происходит ускорение заряженных частиц. При работе генератора повышение напряжения на ускорительной трубке происходит до тех пор, пока ток утечки не сравняется с зарядным током, т. е. током, возникающим из-за движения заряженной транспортерной ленты, или пока не возникнет электрический пробой. Достижимый верхний предел напряжения на трубке ограничен напряжением пробоя между шаром и окружающими предметами. Обычные генераторы Ван-де-Граафа позволяют получать напряжения до 2–5 МВ, усовершенствованные — до 15–20 МВ.

Простым приемом эффективное напряжение генератора Ван-де-Граафа удается повысить в два раза. Для этого применяются две ускорительные трубки, расположенные вертикально одна на продолжении другой. Высоковольтный электрод (положительный) помещается между ними. Там же помещается тонкая металлическая фольга. На верхнем конце верхней трубки располагается источник ионов, на нижнем конце нижней трубки находится выпускное отверстие. Источник ионов и выпускное отверстие заземляются, а потому находятся при нулевом потенциале. Из источника должны выходить отрицательные ионы, т. е. частицы, содержащие избыток электронов. Чаще всего ими являются ионы водорода или дейтерия. Их получают, впуская водород или дейтерий в область, где горит электрический разряд. Там молекулы газа диссоциируют, а атомы ионизуются. Таким путем обычно получаются положительные ионы, но определенная часть ионов несет и отрицательный заряд. В последнем случае при ионизации атома водорода ион представляет собой протон, вокруг которого вращаются два электрона, слабо с ним связанные. Образовавшийся отрицательный ион направляется к положительному высоковольтному электроду и ускоряется до определенного потенциала. В конце пути он пронизывает металлическую фольгу, которая его «обдирает», т. е. лишает

обоих электронов. Здесь отрицательный ион превращается в положительный и продолжает двигаться в том же направлении к выпускному отверстию, уже отталкиваясь от высоковольтного электрода. В результате перезаряженная частица, подходя к выпускному отверстию, дополнительно приобретает такую же энергию, какую она получила на первой половине пути. Ускоритель, работающий по этому принципу, называется *перезарядным ускорителем* или *тандем-генератором*. По сравнению с обычным генератором Ван-де-Граафа он обладает тем важным преимуществом, что в нем источник газа находится не под высоким потенциалом, а при потенциале земли, а это сильно упрощает его питание и обслуживание.

Недостатком генератора Ван-де-Граафа является жесткое ограничение энергии пучка сверху. Но этот генератор обладает и важными преимуществами. Главнейшие из них — высокая степень монохроматичности пучка (до 10^6, т. е. выше, чем на любом другом ускорителе) и легкость регулирования его энергии. Благодаря этому эффективное сечение рассеяния протона на протоне (например, при низких энергиях) измерено на генераторе Ван-де-Граафа с точностью, которая недостижима при измерении любых других сечений в ядерной физике. Вот почему генератор Ван-де-Граафа до сих пор широко применяется в исследованиях при низких энергиях. Важным достоинством генератора Ван-де-Граафа является также возможность получения больших токов в пучке при высоких КПД. Ток в пучке в генераторах Ван-де-Граафа доходит до нескольких сот микроампер.

3. Перейдем к рассмотрению *линейных ускорителей*. Они относятся к классу *резонансных ускорителей*, так как в них для ускорения заряженных частиц применяются высокочастотные переменные поля, частота которых строго согласована со скоростью движения ускоряемой частицы. Простейшим из таких ускорителей является *ускоритель Видерое* (р. 1902), в котором полые цилиндрические электроды (называемые *дрейфовыми* или *пролетными трубками*) постоянно возрастающей длины располагаются друг за другом, как это указано на рис. 147. Трубки через одну соединены с одним полюсом генератора переменного напряжения, остальные трубки соединены с другим полюсом. Ускоритель является импульсным, т. е. дает не непрерывный ток ускоренных частиц, а ускоряет отдельные сгустки частиц (банчи). На верхней части рис. 147 показаны знаки зарядов на трубках и направления электрических полей в зазорах между ними в некоторый момент времени t. То же сделано на нижней части рис. 147, но через половину периода переменного напряжения генератора.

Пусть, например, положительная частица (протон) попадает в первый зазор между трубками в направлении электрического поля. Тогда в этом зазоре скорость частицы увеличится. После этого она попадает в канал цилиндрической дрейфовой трубки и будет двигаться по инерции, так как внутрь металлической трубки электрическое поле не проникает. Длина дрейфовой трубки такова, что, когда частица подходит ко второму зазору между трубками, направление электрического поля меняется на противоположное, так что в этом зазоре опять происходит

ее ускорение. То же самое происходит в третьем и во всех последующих зазорах между дрейфовыми трубками.

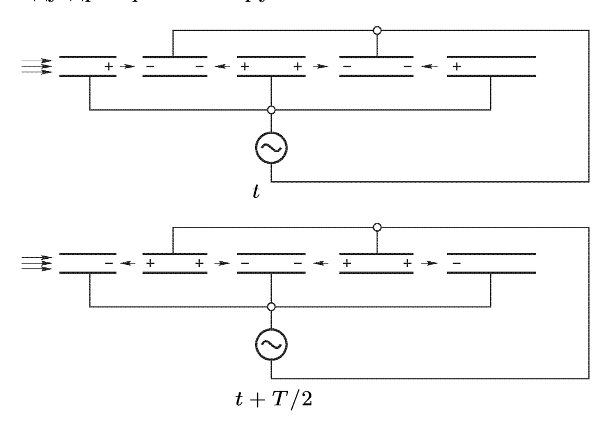


Рис. 147

Таким образом, в каждом зазоре между дрейфовыми трубками частица движется ускоренно. Для этого необходимо, чтобы длины последовательных трубок непрерывно возрастали в соответствии с ростом скорости, достигнутой частицей в процессе ускорения. Чтобы дрейфовые трубки получились не слишком длинными, надо применять генераторы высокой частоты.

В приведенном рассуждении молчаливо предполагалось, что фазы ускоряющих напряжений между соседними трубками меняются *синхронно.* На самом деле строгий синхронизм нарушается из-за конечной скорости распространения электромагнитных возмущений. При малых скоростях частицы это обстоятельство практически не играет роли. Но когда скорость частицы приближается к скорости света, нарушение синхронизма становится большим, и это обстоятельство должно быть принято во внимание. Поэтому линейные ускорители Видерое могут давать ускоренные частицы (протоны) сравнительно низких энергий (до 10 МэВ). В настоящее время они применяются редко и только на первых стадиях ускорения, пока скорость частицы невелика по сравнению со скоростью света.

4. Альварец (р. 1911) предложил и практически осуществил *линейный резонансный ускоритель*, в котором дрейфовые трубки не присоединяются к генератору высокого напряжения. Ускоритель Альвареца представляет собой цилиндрическую трубку (объемный резонатор), в которой возбуждается стоячая электромагнитная волна электрического типа, т. е. такая волна, электрический вектор которой направлен параллельно оси трубы. Электрическое поле в таком резонаторе имеет вид $E = A(r)\cos kx \cos \omega t$, где координата x отсчитывается вдоль трубы, а амплитуда $A(r)$ зависит от расстояния r до оси резонатора. Частота ω не может быть произвольной, так как в силу граничных условий на стенках трубы в ней можно возбудить стоячие волны только

с вполне определенными характеристиками. Понятно, что в ускорителях Видерое подобное ограничение на частоту генератора не накладывается. В узлах *1, 2, 3*, ... электрическое поле обращается в нуль, как это видно из рис. 148. Через половину периода T электрическое поле всякий раз меняет направление на противоположное.

Рис. 148

Пусть в таком поле положительно заряженная частица, например p, движется с постоянной скоростью v и притом так, что в точке A она оказывается в тот момент времени, когда электрическое поле максимально. Тогда частица будет ускоряться, точнее, увеличивать свою энергию. Пусть через четверть периода она окажется в узле *1*, где электрическое поле обращается в нуль. В этот момент поле E всюду меняет направление на противоположное, так что оно будет ускорять частицу и между узлами *1* и *2*. К узлу *2* частица должна подходить в момент, когда снова происходит изменение направления электрического поля. Поэтому за узлом *2* ее движение снова будет ускоренным. То же справедливо и для движения между узлами *2* и *3* и т. д. Чтобы частица всюду двигалась ускоренно, ее скорость v должна определяться условием

$$v = \frac{\lambda}{2} : \frac{T}{2} = \frac{\lambda}{T} = v_{\text{фаз}}, \tag{84.1}$$

где $v_{\text{фаз}}$ — фазовая скорость электромагнитной волны вдоль трубы. Но фазовая скорость в трубе (не заполненной веществом) всегда превышает скорость света в вакууме c. Поэтому частица со скоростью $v_{\text{фаз}}$ двигаться не может. При реальном движении она должна будет последовательно проходить и через ускоряющие и через замедляющие участки. Альварец преодолел эту трудность, поместив на замедляющих участках дрейфовые трубки и тем самым обратив в нуль электрическое поле на этих участках. Эти трубки ни к каким источникам высокого напряжения присоединять не надо — они сами заряжаются колеблющимся электромагнитным полем.

Конечно, электромагнитное поле в трубе, нагруженной дрейфовыми трубками, не имеет столь же простой формы, что в их отсутствие. Поле вытесняется из участков, занятых трубками, в промежутки между ними. Но это обстоятельство не играет роли. Существенно только, чтобы частица всегда попадала в ускоряющие промежутки между трубками и двигалась в отсутствие поля внутри самих трубок. Для

этого длины дрейфовых трубок должны определенным образом возрастать со скоростью частицы. Именно, через дрейфовые трубки частица должна проходить за те полупериоды, когда в ненагруженном резонаторе электрическое поле ее тормозило бы. Поэтому длина дрейфовой трубки связана со скоростью движущейся частицы соотношением

$$l = v\frac{T}{2} = \frac{v}{c}\,\frac{cT}{2} = \frac{v}{c}\,\frac{\lambda}{2}. \tag{84.2}$$

Такое соотношение справедливо и в случае неравномерного движения ускоряемой частицы. Только в этом случае под v надо понимать скорость частицы в момент прохождения ее через рассматриваемую дрейфовую трубку. То же соотношение справедливо и в случае ускорителя Видерое.

5. Действие полого электромагнитного резонатора как ускорителя можно объяснить и с другой точки зрения. Для этого представим стоячую волну в резонаторе в виде суперпозиции двух бегущих волн одинаковых частот, распространяющихся навстречу друг другу:

$$A\cos kx\cos\omega t = \frac{A}{2}\cos(\omega t - kx) + \frac{A}{2}\cos(\omega t + kx).$$

Первая волна называется *попутной*, вторая — *встречной.* Пусть частица движется с фазовой скоростью $v = \omega/k$, все время находясь на гребне попутной волны $(A/2)\cos(\omega t - kx)$. Тогда эта волна будет непрерывно ускорять частицу. Встречная же волна будет оказывать на частицу ускоряющее и замедляющее действия, с большой частотой сменяющие друг друга. В результате возникнут небольшие, но быстрые колебания около некоторого усредненного плавного движения частицы, не играющие существенной роли. Конечно, для объяснения таких колебаний нет необходимости разлагать стоячую волну на сумму двух бегущих. Достаточно заметить, что отнюдь не все частицы пучка подходят к узлам электрического поля точно тогда, когда происходит изменение направлений поля. Это приводит к отставанию таких частиц от частицы, приходящей к узлам в моменты таких изменений, к ухудшению монохроматичности пучка и к явлениям колебательного характера.

Для ускорения частиц можно использовать только одну попутную волну, устранив вредное влияние встречной волны. Такой ускоритель называется *ускорителем с бегущей волной.* Для реального ускорения частиц требуется еще замедление попутной волны — снижение ее фазовой скорости до величины, меньшей скорости света в вакууме. Для этого применяются «нагруженные» волноводы, заполненные, например, перегородками с достаточно большими отверстиями. Этим можно также достигнуть того, чтобы фазовая скорость волны, а с ней и скорость частицы медленно возрастали вдоль волновода. Такое возрастание скорости волны не требуется только в случае ультрарелятивистских электронов, когда их скорости практически уже достигли релятивистского предела — скорости света в вакууме. Но и волноводы с медленно нарастающей фазовой скоростью можно использовать для

ускорения только уже достаточно быстрых частиц, так как большого замедления волн (по сравнению с вакуумом) в таких волноводах получить не удается. В ускорителе Альвареца труба (объемный резонатор) закрывается с концов проводящими крышками, от которых электромагнитные волны отражаются, в результате чего образуются стоячие волны. В ускорителях с бегущей волной отражение от внешнего конца надо устранить. Для этого с заднего конца к трубе присоединяется резонатор определенных размеров, в который уходит падающая волна, выделяя джоулево тепло.

Большой линейный ускоритель с бегущей волной для ускорения электронов до 1,8 ГэВ сооружен в 1964 г. в Физико-техническом институте АН УССР в Харькове. Его длина 240 м. Самый большой в мире линейный ускоритель с бегущей волной, ускоряющий электроны до 22,3 ГэВ, построен в Стэнфорде (США). Его длина 3,05 км. Для замедления электромагнитных волн в волноводе устанавливают специальные диафрагмы, делящие его на отдельные ячейки. Последние можно рассматривать как линейные полые резонаторы, в которых бегущая волна возбуждает электромагнитное поле. Из-за неизбежных потерь в стенках амплитуда волны непрерывно падает вдоль волновода. Для ее поддержания применяются специальные генераторы расположенные по всей длине ускорителя. В Стэнфордском линейном ускорителе таких генераторов более 80 тысяч.

Линейные ускорители стоят очень дорого. В мощных протонных ускорителях приращение энергии протона составляет 1–1,5 МэВ на каждый метр ускорителя, а в электронных — 10 МэВ. Предельно допустимая энергия пучка частиц определяется почти исключительно стоимостью ускоряющих резонаторов и связанных с ними радиочастотных источников энергии.

В настоящее время на основе Стэнфордского линейного ускорителя, энергия которого увеличена до 50 ГэВ, заканчивается сооружение установки для встречных электрон–позитронных пучков. Электроны и позитроны будут ускоряться в линейном ускорителе, а затем их траектории будут разводиться по разным окружностям, в месте пересечения которых будут возникать встречные столкновения.

В Институте ядерной физики СО АН СССР разработан проект линейного ускорителя (ВЛЭП), позволяющего получать встречные e^-- и e^+-пучки при темпе ускорения 100 МэВ/м. Это позволит при сравнительно малых размерах ускорителей получать встречные пучки e^- и e^+ с энергией 500 и даже 1000 ГэВ в каждом пучке. При таком темпе ускорения в линейном ускорителе можно будет ускорять до 1000 ГэВ даже нестабильные частицы, например $\pi^{\pm}$-мезоны. Создание таких высоких градиентов полей потребовало новой технологии (вакуум, чистота поверхностей и т. д.).

Важным достоинством линейных ускорителей электронов является то, что из-за прямолинейности траектории ускоренных частиц они практически свободны от электромагнитного излучения. Линейные ускорители обладают высокой интенсивностью, могут иметь большое

практическое значение, например, для выработки ядерного топлива (^{239}Pu, ^{233}U) из ^{238}U, ^{232}Th (см. § 95, п. 11).

6. В *циклических ускорителях* частица не проходит однократно через длинный ряд ускоряющих резонаторов, а многократно периодически возвращается к одним и тем же ускоряющим промежуткам. Таким путем достигается значительное снижение размеров и стоимости ускорителя. Первый циклический ускоритель был построен в 1930 г. Лоуренсом (1901–1958) и назван *циклотроном*. Чтобы понять идею циклотрона, напомним, что в однородном постоянном магнитном поле **H** заряженная частица, если ее скорость перпендикулярна к **H**, равномерно вращается по окружности с циклической частотой

$$\Omega = \frac{eH}{mc}, \tag{84.3}$$

т. е. с периодом обращения $T = 2\pi/\Omega$. Существенно, что при нерелятивистском движении период T *не зависит* от скорости движения частицы. Это и используется в циклотроне.

Циклотрон представляет собой сплющенную цилиндрическую металлическую коробку, в которой вдоль диаметра имеется прорезь, разделяющая коробку на две половины A и B, называемые *дуантами* (рис. 149). Коробка помещается в постоянное однородное магнитное поле между противоположными полюсами магнита (электромагнита). Между дуантами A и B прикладывается электрическое напряжение от высокочастотного генератора с частотой Ω (84.3). Источником ионов (положительных) служит небольшая дуга, горящая в центре циклотрона между накаленным катодом и стенкой полости, служащей анодом. Непрерывной откачкой в дуантах поддерживается давление в 10^{-4}–10^{-5} мм рт. ст., тогда как в центре полости, где горит дуга, давление примерно в 100 раз выше. Положительный ион, выйдя из дуги, движется в электрическом поле зазора к отрицательному дуанту и набирает энергию. Внутри дуанта он движется равномерно, описывая полуокружность. Через промежуток времени $T/2$ он подходит к зазору между дуантами с противоположной стороны от центра. К этому моменту электрическое поле меняет направление на противоположное, так что ион снова попадает в ускоряющее поле и снова ускоряется. После этого в течение того же промежутка времени $T/2$ ион с приобретенной скоростью равномерно движется по полуокружности уже во втором дуанте. Через промежуток времени $T/2$ ион опять подходит к зазору между дуантами (когда электрическое поле изменит направление) и снова будет ускоряться. И так продолжается дальше. Ион движется по раскручивающейся спирали, периодически испытывая ускорение через время $T/2$. На последнем витке спирали включается отклоняющее электрическое поле, выводящее пучок наружу. Напряженность ускоряющего поля лимитируется возможностями пробоя. Она обычно не превышает 100 кВ.

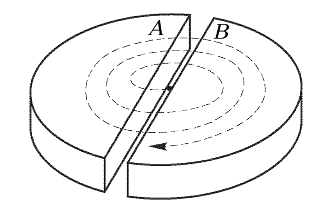


Рис. 149

Энергия, приобретаемая частицей при выходе из ускорителя, от ускоряющего поля не зависит. Она определяется лишь напряженностью магнитного поля H и радиусом R цилиндрической области, в которой оно создано. Действительно, скорость, приобретаемая частицей, $v = \Omega R$, а кинетическая энергия

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\, m\Omega^2 R^2 = \frac{1}{2}\, \frac{(eHR)^2}{mc^2}. \qquad (84.4)$$

Так, при $H = 15$ кГс и $R = 0{,}4$ м при ускорении протонов ($mc^2 = 938$ МэВ) получаем

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 1{,}5 \cdot 10^4 \cdot 40)^2}{938 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}}\ \text{эрг} = \frac{1}{2}\, \frac{(4{,}8 \cdot 1{,}5 \cdot 4 \cdot 10^{-5})^2}{938 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}}\ \text{эВ} = 17 \cdot 10^6\ \text{эВ} = 17\ \text{МэВ}.$$

Если амплитудное напряжение между дуантами равно 100 кВ, то при каждом полном обороте энергия протона увеличивается на 200 кэВ, так как при этом он дважды пересекает ускоряющий зазор между дуантами. Поэтому для набора энергии 17 МэВ протону требуется совершить $17 \cdot 10^6 : 2 \cdot 10^5 = 85$ оборотов.

Для работы циклотрона существенно, чтобы частица все время двигалась в центральной плоскости циклотрона или, во всяком случае, возвращалась к этой плоскости при малых отклонениях от нее в ту или другую сторону, а не попадала на один из дуантов. Таким свойством реальные циклотроны действительно обладают — оно называется *фокусировкой*. Фокусировка обеспечивается неоднородностью магнитного поля и отчасти электрического поля в зазорах между дуантами. Фокусирующим действием магнитное поле обладает потому, что оно убывает от центра к периферии. Благодаря этому магнитные силовые линии обращены выпуклостями наружу, т. е. имеют бочкообразную форму.

На рис. 150 изображена одна из магнитных силовых линий AB, причем предполагается, что удерживающее магнитное поле направлено вверх. Рассмотрим ради определенности положительную частицу. Пусть она сместилась из средней плоскости CD в положение M. В этом положении удерживающее магнитное поле вынуждает частицу двигаться в направлении от читателя за плоскость рисунка. Следовательно, сила Лоренца F имеет составляющую, направленную вниз. Эта сила и вернет отклонившуюся частицу снова в среднюю плоскость CD. Если бы магнитное поле достаточно быстро возрастало от центра к периферии, то магнитные силовые линии были бы обращены выпуклостью к центру. Возникла бы сила Лоренца с составляющей, направленной вверх, которая отклонила бы частицу от сред-

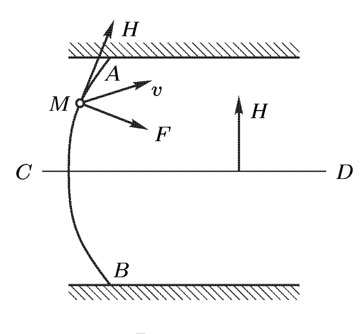


Рис. 150

ней плоскости CD еще дальше. В конце концов частица попала бы на верхнюю плоскость дуанта.

Существенный недостаток циклотрона состоит в том, что он позволяет ускорять частицы *только до нерелятивистских энергий.* Лишь в этом случае имеет место синхронизм колебаний электрического поля между дуантами с обращением частицы по окружности. При релятивистских движениях формула (84.3) сохраняется, но под m следует понимать не массу покоя, а релятивистскую массу частицы. Релятивистская же масса, а с ней и период обращения частицы T возрастают по мере ускорения частицы, что приводит к нарушению синхронизма.

В силу сказанного эффективно ускорять протоны на циклотроне можно лишь до энергий 20–25 МэВ, а ускорять электроны практически невозможно. Но в области низких энергий циклотрон, давая токи до 1 мА, по интенсивности значительно превосходит все другие ускорители. По этой причине циклотроны до сих пор широко используются для изучения ядерных реакций при низких энергиях, а также для промышленного получения тех (преимущественно нейтронодефицитных) изотопов, которые не получаются в ядерных реакторах. Циклотроны применяются также для получения пучков дейтронов, α-частиц, многократно ионизованных тяжелых ионов. Тяжелые ионы удается ускорять до энергий в несколько сотен мегаэлектронвольт, так как из-за большой массы релятивистские поправки для них становятся существенными при бóльших энергиях, чем для протонов.

7. *Фазотрон* (*синхроциклотрон*) позволяет ускорять частицы и до релятивистских энергий. Он отличается от циклотрона тем, что в нем для ускорения применяются электрические поля медленно меняющейся частоты, так что частота поля равна частоте обращения частицы, которая уменьшается из-за релятивистского увеличения массы. Такое поле ускоряет частицу на каждом витке пути, несмотря на релятивистское изменение массы. Фазотрон работает только в импульсном режиме — в каждый момент времени в камере ускоряется только один сгусток частиц.

Одним из основных условий, необходимых для работы фазотрона и большинства других современных резонансных ускорителей на релятивистские энергии является *автофазировка*, открытая В. И. Векслером (1907–1966) в 1944–1945 гг. и почти одновременно с ним Мак-Милланом (р. 1907). Дело в том, что полного совпадения частот ускоряющего поля и ускоряющейся частицы, как до сих пор предполагалось для упрощения рассуждений, в циклических резонансных ускорителях никогда не бывает.

На самом деле эти частоты несколько отличаются друг от друга. Да и сами частицы из-за некоторого разброса скоростей обращаются с несколько различными частотами. Возникает вопрос, не приведет ли это обстоятельство к потери устойчивости продольного движения сгустка частиц? Если бы это было так, то сгусток расплывался бы в продольном направлении, распадался, и работа ускорителя сделалась бы невозможной.

Для выяснения принципа автофазировки представим напряженность электрического поля E в ускоряющих промежутках в зависимости от времени t. Поле E изображается синусообразной кривой, но ее частота медленно меняется во времени. Существенно заметить, что время T, затрачиваемое частицей при переходе от одного ускоряющего промежутка к соседнему, зависит от ее энергии. Эта зависимость определяется двумя противоположно действующими факторами. С увеличением энергии частицы увеличивается ее скорость, что уменьшает T, но зато удлиняется путь между двумя последовательными ускорениями.

Результирующий эффект зависит от устройства ускорителя. Так, в линейном резонансном ускорителе второй фактор не действует и время T с увеличением энергии уменьшается. В других ускорителях соотношение может быть обратным. Примем для конкретности, что с увеличением энергии время T удлиняется. Противоположное допущение на ход рассуждения не влияет и, по существу, не отражается на окончательном выводе.

Пусть две частицы, мало отличающиеся по скоростям, одновременно выходят из какого-либо ускоряющего промежутка. При подходе к следующему ускоряющему промежутку более быстрая частица *1* опередит более медленную *1′* (рис. 151 вверху). Допустим, кроме того, что частицы проходят через ускоряющий промежуток тогда, когда электрическое поле, пройдя через максимум, начинает ослабевать. Тогда при нашем прежнем предположении в новом ускоряющем промежутке частица *1′* получит большее приращение скорости, чем частица *1*. При движении к следующему ускоряющему промежутку частица *1′* начнет ликвидировать свое отставание. Может даже случиться, что частица *1′* обгонит частицу *1*, как это изображено на нижнем рис. 151. Если это так, то в новом ускоряющем промежутке частица *1′* получит уже меньшее приращение скорости, чем частица *1*. При дальнейшем движении опережение частицы *1′* начнет уменьшаться и может оказаться, что при подходе к следующему ускоряющему промежутку она вновь окажется отстающей. Таким образом, при движении двух близких частиц расстояние между ними будет попеременно то увеличиваться, то уменьшаться.

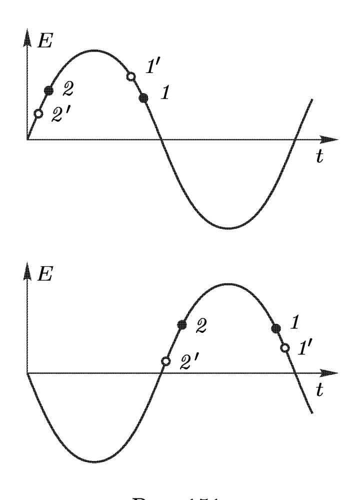


Рис. 151

В частности, изменение частоты поля можно подобрать так, чтобы частица *1* была резонансной, т. е. проходила через все ускоряющие участки в те моменты времени, когда фаза ускоряющего поля возвращается к одному и тому же значению. В этом случае возникнут малые колебания близких частиц вокруг положения резонансной частицы *1*, т. е. образуется *устойчивый сгусток* ускоряющихся частиц.

Из изложенного ясно, что так будет происходить в том случае, когда сгусток ускоряемых частиц проходит через ускоряющие промежутки в те моменты времени, когда ускоряющее поле уже прошло через максимум и начинает убывать. Если же оно еще не достигло максимума, то отставание частицы $2'$ от 2 (рис. 151 внизу) из-за приобретения дополнительной энергии в ускоряющих промежутках в дальнейшем будет увеличиваться. Частицы будут удаляться друг от друга, т. е. сгусток получится неустойчивым и развалится. Положение меняется, когда с возрастанием энергии частицы время T уменьшается. В этом случае устойчивый сгусток частиц образуется при условии, что он проходит через ускоряющие промежутки еще до того, как ускоряющее поле достигнет максимума. Так или иначе, устойчивый сгусток частиц образуется либо справа, либо слева от максимума электрического поля. Там же, но не в самом максимуме находится и соответствующая резонансная частица. Автоматическое образование устойчивого сгустка частиц в резонансных ускорителях и называется автофазировкой.

После изложения принципа автофазировки сообщим некоторые данные о фазотронах. Эти ускорители используются для ускорения тяжелых частиц — протонов, дейтронов, α-частиц. Они ускоряют частицы до энергий 1 ГэВ, давая в секунду от нескольких десятков до нескольких сотен импульсов. В одном импульсе содержится 10^9–10^{10} частиц. Интенсивность пучка в фазотроне намного меньше, чем в циклотроне, но все же довольно велика — порядка 2 мкА [1)]. Ускоряющее напряжение равно 10–30 кВ. Поэтому в фазотроне на 700 МэВ частица должна совершить примерно 10^5 оборотов. Максимальная энергия, достигаемая на фазотроне, определяется не физическими, а экономическими соображениями — главным образом стоимостью магнита, который изготовляется из высококачественного трансформаторного железа и является наиболее дорогой частью установки. Дело в том, что в фазотроне частица раскручивается, начиная от центра к периферии. Поэтому магнитное поле должно быть создано во всем объеме камеры, в которой происходит это раскручивание. Для этого магнит должен быть снабжен полюсными наконечниками большого размера. При любой скорости импульс частицы определяется соотношением

$$p = \frac{eHr}{c}. \tag{84.5}$$

Площадь полюса возрастает как площадь последнего витка спирали, т. е. как квадрат импульса частицы. Примерно так же, а значит очень быстро, возрастает и стоимость магнита. Этим определяется область изменения энергии, в которой используется фазотрон. При энергиях от 25 до сотен мегаэлектронвольт фазотронный метод ускорения протонов, дейтронов и α-частиц в настоящее время является основным.

[1)] Существует ускоритель SIN (Швейцария) с интенсивностью $I = 200$ мкА (ее предполагают повысить до 2 мА). Интенсивность ускорителя в ОИЯИ (Дубна) после реконструкции доведена до 20 мкА.

8. К ускорителям, в которых используется постоянное во времени магнитное поле, относится *микротрон*, применяющийся для ускорения электронов. Идея микротрона была высказана В. И. Векслером еще в 1944 г., но первая действующая экспериментальная установка осуществлена только в 1948 г. в Канаде. В отличие от циклотрона и фазотрона источник ускоряемых электронов в микротроне помещается не в центре, а на краю области магнитного поля. Там же помещается полый ускоряющий резонатор, при прохождении через который энергия электрона всякий раз увеличивается на энергию покоя электрона $m_0c^2 = 0{,}511$ МэВ (или на величину, ей кратную). После этого электрон, описав окружность в магнитном поле, возвращается в ускоряющий промежуток, где его энергия снова возрастает на m_0c^2. В результате n-кратного прохождения через ускоряющий промежуток релятивистская масса электрона сделается равной $m_n = (n+1)m_0$, а частота обращения по окружности

$$\omega_n = \frac{eH}{m_n c} = \frac{eH}{(n+1)m_0 c} = \frac{\omega}{n+1}.$$

Таким образом, частота обращения уменьшается в $n+1$ раз по сравнению с частотой нерелятивистской частицы, а время обращения во столько же раз увеличивается. Именно по этой причине электрон проходит через ускоряющий промежуток всякий раз, когда электрическое поле находится в фазе ускорения.

Полная энергия электрона после n-кратного прохождения через ускоряющий промежуток определяется формулой $\mathscr{E}_n^2 - (pc)^2 = \mathscr{E}_0^2$, а потому

$$pc = \sqrt{n^2 + 2n}\,\mathscr{E}_0.$$

Отсюда на основании формулы (84.5) заключаем, что с возрастанием n радиусы траекторий электрона в магнитном поле микротрона возрастают как $\sqrt{n^2+2n}$. Последовательные круговые траектории, описываемые электроном в микротроне, схематически показаны на рис. 152.

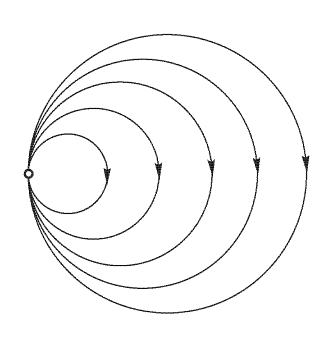


Рис. 152

В микротроне, как и в других ускорителях релятивистских частиц, осуществляется автофазировка. Она приводит к тому, что ускоряется не только резонансный электрон, проходящий в микротроне через ускоряющий резонатор в момент максимума электрического поля, но и ближайшие электроны, совершающие около него малые колебания. Амплитуда этих колебаний определяется областью устойчивости и приводит к небольшим колебаниям энергии электрона вокруг среднего значения, т. е. к нарушению монохроматичности. Но монохроматичность ускоренного пучка остается все же достаточно высокой. В этом отношении микротрон уступает только электростатическому генератору

Ван-де-Граафа. Зато он позволяет при монохроматичности, достаточной для постановки многих опытов, получать мощные пучки электронов такой энергии, которая для электростатических генераторов недостижима.

Большинство микротронов работают на длине волны $\lambda = 10$ см. Напряженность магнитного поля обычно невелика — порядка 1000 Гс. Диаметр наконечников магнита и камеры определяется длиной последней n-й орбиты: $D_n = \lambda n/\pi$. Число орбит обычно составляет 10–20. Микротрон, как и циклотрон, может работать и в непрерывном и в импульсном режимах. При энергии 5 МэВ ток в импульсе составляет 1–2 мА. Средний ток обычно в тысячу раз меньше.

Предельная энергия, достижимая на микротронах, оценивается в 50–100 МэВ. Дальнейшее повышение энергии требует выполнения весьма жестких допусков на магнитное поле для обеспечения устойчивости. Существующие микротроны позволяют ускорять электроны до 30 МэВ. При этом интенсивность ускоренного пучка резко падает с ростом энергии. Так, микротрон на 13 МэВ дает ток в импульсе 100 мА, а микротрон на 30 МэВ — всего лишь 0,05 мА.

Микротроны применяются только для ускорения электронов, так как уже в случае таких легких частиц требуется создание на резонаторах напряжений свыше $0{,}5\cdot 10^6$ В, что вызывает серьезные технические трудности.

Если поместить у плоского резонатора тяжелую мишень (толщина которой порядка радиационной длины), то при торможении электронов возникнут γ-кванты высокой энергии. Они в свою очередь порождают пары электрон–позитрон. Образовавшиеся позитроны будут ускоряться тем же микротроном наряду с электронами, но двигаться при этом будут в противоположном направлении.

9. Ускорение электронов можно производить вихревым электрическим полем, возникающим при нарастании аксиально-симметричного магнитного поля во времени. Такой процесс осуществляется в *бетатроне.* В этом ускорителе электрон вращается по стационарной орбите, т. е. по окружности постоянного радиуса r, а потому никакого высокочастотного электрического поля и соблюдения синхронизма не требуется.

Найдем необходимое условие существования такой стационарной орбиты. Импульс электрона p возрастает по модулю в соответствии с уравнением $dp/dt = eE$, где e — заряд электрона по модулю, а E — напряженность вихревого электрического поля на стационарной орбите. Она определяется законом индукции

$$2\pi r E = \frac{1}{c}\,\frac{d\Phi}{dt},$$

а магнитный поток, пронизывающий площадь, ограниченную стационарной орбитой, $\Phi = \pi r^2 \overline{H}$, где $\overline{H}$ — средняя напряженность магнитного поля на этой площади. Таким образом,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{e}{2\pi r c}\,\frac{d\Phi}{dt} = \frac{e}{2c}\,\frac{d\overline{H}}{dt}.$$

С другой стороны, в силу (84.5) при постоянном радиусе r

$$\frac{dp}{dt} = \frac{e}{c}\frac{dH}{dt},$$

где H — напряженность магнитного поля на стационарной орбите. Путем сравнения последних двух формул и интегрирования получаем

$$H = \frac{\overline{H}}{2}, \tag{84.6}$$

причем мы приняли во внимание, что при $t = 0$ $H = \overline{H} = 0$, что имеет место только при нарастании магнитного поля во времени. Что напряженность магнитного поля должна расти, а не уменьшаться с течением времени, это видно и без всяких вычислений. Ведь ускоритель должен увеличивать энергию электрона. А при увеличении энергии для удержания электрона на прежней орбите требуется более сильное магнитное поле.

Итак, для существования стационарной круговой орбиты электрона необходимо, чтобы напряженность магнитного поля на орбите была вдвое меньше средней напряженности того же поля на площади, ограниченной этой орбитой, причем магнитное поле должно нарастать во времени, начиная от нуля. Этот результат и лежит в основе устройства и действия бетатрона.

В бетатроне электроны разгоняются до ультрарелятивистских энергий, а потому в силу (84.5) окончательная кинетическая энергия ускоренного электрона определяется формулой

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} = \mathscr{E}_{\text{полн}} = pc = eHr = \frac{e\overline{H}r}{2}, \tag{84.7}$$

причем здесь H и $\overline{H}$ означают напряженности удерживающего и среднего магнитных полей в конце времени ускорения. Мы видим, что энергия $\mathscr{E}_{\text{кин}}$ определяется лишь значениями H и $\overline{H}$ и радиусом стационарной орбиты, но не зависит от того, сколько оборотов сделал электрон при движении по стационарной орбите. Пусть, например, обмотка электромагнита питается синусоидальным переменным током с частотой $\nu = 50$ Гц, который создает среднее магнитное поле с амплитудой $\overline{H} = 10^4$ Гс. Бетатрон ускоряет электроны только в промежутки нарастания магнитного поля по величине. Примем ориентировочно, что длительность такого промежутка $\tau = T/4 = 1/4\nu \approx 1/200$ с, и допустим, что диаметр стационарной орбиты $D = 1$ м. Тогда максимальная кинетическая энергия электрона будет

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} = \frac{1}{2}\cdot 4{,}8\cdot 10^{-10}\cdot 10^4\cdot\frac{1}{2}\cdot 10^2 = 1{,}2\cdot 10^{-4}\ \text{эрг} = 75\ \text{МэВ}.$$

На прохождение стационарной орбиты ультрарелятивистский электрон затрачивает время $t = 2\pi r/c = 3{,}14\cdot 10^{-8}$ с, так что за все время

ускорения он совершает

$$\frac{\tau}{t} = \left(\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}\right) : (3{,}14 \cdot 10^{-8}) \approx 1{,}6 \cdot 10^{5} \text{ оборотов.}$$

Устойчивость движения по стационарной орбите в вертикальном направлении обеспечивается бочкообразной формой магнитных силовых линий между полюсными наконечниками магнита бетатрона. На стационарной орбите центробежная сила $mv^2/r = pv/r$ уравновешивается лоренцевой силой eHv/c. Поэтому для устойчивости движения в радиальном направлении поле H должно убывать с радиусом медленнее, чем $1/r$. Только тогда сила Лоренца будет превосходить центробежную силу и сможет вернуть удалившуюся частицу на стационарную орбиту. Частица же, отклонившаяся в сторону центра, также вернется на стационарную орбиту, так как в этом случае, наоборот, центробежная сила будет превышать лоренцеву.

Бетатроны обычно применяются для ускорения электронов до энергий 1–50 МэВ, причем средний ток не превышает 10^{-2} мкА при 10^9–10^{10} частиц в импульсе. Вначале изготовлялись бетатроны и на более высокие энергии, вплоть до 240 МэВ. Однако это оказалось нецелесообразным, так как в бетатронах необходимо создавать магнитное поле по всей площади, находящейся внутри траектории электрона. Этот недостаток в бетатронах еще более существен, чем в фазотронах, так как среднее магнитное поле в бетатронах должно быть вдвое больше поля, необходимого для удержания электрона на стационарной орбите. Кроме того, при энергиях от 100 МэВ и выше режим ускорения электронов в бетатронах существенно ухудшается из-за электромагнитного излучения.

К недостаткам бетатронов относится трудность и даже практическая невозможность вывода пучка из камеры. Бетатроны часто применяются для получения γ-квантов высоких энергий. В таких случаях ускоренные электроны направляются на специальную мишень, расположенную в камере. Это достигается с помощью обмотки, создающей магнитное поле, нарушающее условие (84.6). В результате радиус орбиты увеличивается или уменьшается, и электроны попадают на мишень, где и генерируются γ-кванты.

10. Импульс частицы связан с ее полной энергией $\mathscr{E}$ соотношением $p = (\mathscr{E}/c^2)v$ или $pc = \mathscr{E}\beta$, где $\beta = v/c$. С другой стороны, $\mathscr{E}^2 - (pc)^2 = \mathscr{E}_0^2$. Из этих двух соотношений получается

$$\beta^2 = \frac{\mathscr{E}^2 - \mathscr{E}_0^2}{\mathscr{E}^2}, \tag{84.8}$$

при $\beta \sim 1$

$$1 - \beta = \frac{\mathscr{E}_0^2}{2\mathscr{E}^2}. \tag{84.8a}$$

Для электрона $\mathscr{E}_0 = 0{,}511$ МэВ. При релятивистской энергии электрона $\mathscr{E} = 10$ МэВ из формулы (84.8) находим $\beta = 1 - 0{,}000013$.

Таким образом, если энергия электрона больше примерно 10 МэВ, то его скорость практически постоянна и не отличается от скорости света c. Поэтому и период обращения электрона по круговой орбите практически постоянен. Это используется в *синхротронах* — циклических кольцевых резонансных ускорителях электронов с орбитой почти постоянного радиуса, в которых частота ускоряющего электрического поля постоянна, а напряженность удерживающего магнитного поля изменяется во времени. В синхротроне магнитное поле надо создавать только вдоль ускоряющего кольца, а не в его середине, что существенно уменьшает массу магнита и уменьшает его стоимость. В синхротроне могут ускоряться только ультрарелятивистские частицы. Это осложняет инжекцию (впуск) частиц в синхротрон. В крупных синхротронах применяется инжекция уже предварительно ускоренных (до энергий 1–50 МэВ) электронов, в меньших — бетатронная инжекция. Ускоритель сначала работает как бетатрон до достижения ультрарелятивистских энергий, а затем переходит на синхротронный режим. Выпуск ускоренных частиц из синхротрона также осложнен из-за постоянства радиуса орбиты. Тем не менее он осуществляется в большинстве современных синхротронов. Часто пучок ускоренных электронов не выпускается из камеры, а направляется на расположенную в ней мишень, где генерируются тормозные γ-кванты, используемые в различных исследованиях. В синхротронах высоких энергий число частиц в импульсе составляет примерно 10^{10}, а число импульсов в секунду — несколько десятков, так что получается средний ток около 0,1 мкА.

Ультрарелятивистские электроны, движущиеся в синхротроне по круговым орбитам (из-за наличия у них нормальных ускорений), являются мощными источниками электромагнитного излучения. Излучаемая энергия за один оборот электрона возрастает пропорционально четвертой степени энергии самого электрона при заданном радиусе (т. е. заданном H) [1]. Потеря энергии на излучение приводит к затуханию колебаний электронов около равновесной орбиты, а квантовый дискретный характер излучения — к их раскачке. Трудности создания мощных ускоряющих устройств, компенсирующих потери на излучение, ограничивают предельно достижимые энергии. В синхротронах достигнуты максимальные энергии 5–10 ГэВ. При меньших энергиях более экономичны бетатроны и микротроны, а при больших — линейные резонансные ускорители. Правда, существуют проекты синхротронов на 100–150 ГэВ.

11. Для ускорения тяжелых частиц (протонов или ионов) до максимальных энергий применяются *синхрофазотроны.* Синхрофазотрон — это циклический резонансный ускоритель тяжелых частиц, в котором меняются во времени как магнитное поле, так и частота ускоряющего

---

[1] Синхротронное излучение можно уменьшить, взяв больший R (меньшее H). В ЦЕРНе сооружается ускоритель ЛЭП со встречными e^+e^--пучками по 50 ГэВ в каждом (в дальнейшем по 100 ГэВ). Длина его окружности около 30 км. Потери на синхронное излучение достигают десятков мегаэлектронвольт.

электрического поля, и притом так, что радиус равновесной орбиты остается почти постоянным. Изменять частоту электрического поля в синхрофазотроне необходимо потому, что протоны с энергией 1 ГэВ еще не являются достаточно ультрарелятивистскими, так что период обращения их по орбите постоянного радиуса меняется с энергией ($\beta = 0{,}767$ при $\mathscr{E}_{\text{кин}} = 1$ ГэВ). Движение частиц происходит в кольцевой вакуумной камере, помещенной в магнитное поле системы магнитов, расположенных в определенном порядке по кольцу. Магнитное поле синхронно меняется с энергией частиц. В прямолинейных промежутках между магнитами (служащих для размещения ускоряющих электродов, а также устройств ввода и вывода пучка) магнитное поле спадает до нуля. Синхрофазотроны на очень высокие энергии построены по *многоступенчатому принципу*: линейный ускоритель (*инжектор*) впускает частицы в малый синхрофазотрон (*бустер*), где они ускоряются до промежуточной энергии, а затем поступают в большой синхрофазотрон для дальнейшего ускорения. В синхрофазотронах меньших энергий инжекция частиц производится непосредственно из линейного ускорителя.

Интенсивность ускоренных пучков в синхрофазотронах относительно низка, особенно при высоких энергиях. Так, синхрофазотрон в Дубне на 10 ГэВ за импульс дает около 10^{12} протонов (7,5 импульсов в минуту). Он позволяет ускорять не только протоны, но и атомные ядра до энергии 10 ГэВ на один протонный заряд. Например, полностью ионизованный атом изотопа углерода $^{12}_{6}$C ускоряется на этом ускорителе до энергии 60 ГэВ, т. е. до 5 ГэВ на нуклон (интенсивность 10^4 ядер $^{12}_{6}$C в импульсе). В 1967 г. в Серпухове был запущен синхрофазотрон на 76 ГэВ. Радиус ускорительного кольца в нем 236,14 м, средний ток $2 \cdot 10^{-12}$ мкА (10^{12} частиц в импульсе, 8 импульсов в минуту). Прирост энергии за один оборот 190 кэВ, так что за полный цикл ускорения частица совершает в ускорителе $(76 \cdot 10^9) : (190 \cdot 10^3) = 400\,000$ оборотов. До 1972 г. Серпуховский синхрофазотрон был самым большим ускорителем протонов в мире. К 1980 г. максимальная энергия, достижимая на синхрофазотроне, достигла 500 ГэВ (Батавия, США и ЦЕРН), проектируются синхрофазотроны на несколько тысяч гигаэлектронвольт. Предельная достижимая энергия ограничена в первую очередь технико-экономическими возможностями (размерами установки и ее стоимостью). Минимальная энергия, для получения которой применяются синхрофазотроны, равна около 1 ГэВ, для меньших энергий целесообразнее применять фазотроны.

На основе ускорителя на 500 ГэВ (ЦЕРН) были созданы встречные $\bar{p}p$-пучки по 200 и 310 ГэВ, на которых удалось открыть $W^{\pm}$-, Z^0-бозоны. В 1985 г. в Батавии запущен ускоритель (со сверхпроводящими магнитами) на энергию 1000 ГэВ и вводятся в строй встречные пучки по 800 ГэВ. В Серпухове сооружается ускорительно-накопительный комплекс, основу которого составит протонный ускоритель со сверхпроводящими магнитами на 3–3,5 ТэВ с организацией встречных пучков $\bar{p}p$ и pp. Длина окружности основного ускорителя равна примерно

20 км, а в качестве бустера будет использоваться синхрофазотрон на 76 ГэВ. В ФРГ сооружается ускоритель HERA со встречными ep-пучками ($\mathscr{E}_e$ = 20–30 ГэВ, $\mathscr{E}_p$ = 800 ГэВ). Создается проект протонного ускорителя (США) на 20 ТэВ со встречными пучками.

12. Существенное значение для повышения энергии ускоряемых частиц в синхрофазотроне и других ускорителях на высокие энергии имело применение *жесткой* (иначе называемой *сильной*) *фокусировки*, предложенной в 1950 г. Н. Кристофилосом (р. 1917) и независимо от него в 1952 г. Э. Курантом, Х. Снайдером (р. 1913) и М. Ливингстоном (р. 1917). Идея жесткой фокусировки была уже изложена нами в т. IV, § 12. Она основана на том, что две линзы — собирающая и рассеивающая — с одинаковыми фокусными расстояниями всегда образуют собирающую систему, если первая линза рассеивающая. Если же первая линза собирающая, то это свойство сохраняется, когда расстояние между линзами меньше фокусного расстояния одной линзы. Результат был получен нами для тонких линз, но он (в несущественно уточненной форме) остается верным и для толстых линз.

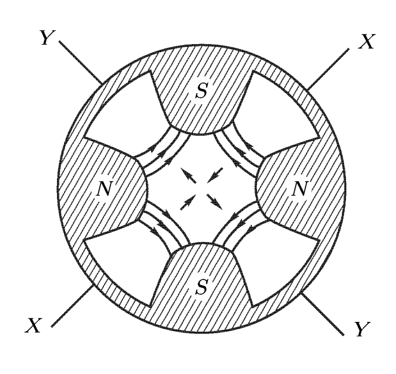


Рис. 153

В синхрофазотроне жесткая фокусировка осуществляется магнитными *квадрупольными линзами*. Одна из таких линз схематически изображена на рис. 153. Четыре магнитных наконечника обращены друг к другу противоположными полюсами, так что в центре квадрупольной линзы магнитное поле равно нулю. На рисунке показаны магнитные силовые линии. Предполагается, что положительная частица движется в направлении к читателю. Маленькие стрелки показывают направление лоренцевых сил, действующих на частицы со стороны магнитного поля квадрупольной линзы. Из рисунка видно, что в направлении оси X лоренцева сила стремится приблизить частицу к оси линзы (т. е. фокусировать), а в направлении оси Y — отдалить (т. е. дефокусировать).

Таким образом, квадрупольная магнитная линза действует как совокупность двух магнитных линз, одна из которых фокусирует частицы в направлении оси X, а другая — в направлении оси Y. Возьмем теперь две квадрупольных линзы и поставим их друг за другом, повернув одну из них относительно другой на 90°. Тогда в направлении оси X одна линза будет фокусировать, а другая — дефокусировать. В целом обе линзы вместе в направлении оси X будут фокусировать. То же самое относится и к направлению оси Y. Отсюда следует, что рассматриваемая система двух квадрупольных линз будет фокусировать и в любом поперечном направлении.

В синхрофазотронах с жесткой фокусировкой, разумеется, создается и изменяющееся во времени вертикальное магнитное поле, удерживающее частицы на равновесной круговой орбите. Но на это поле накладывается еще магнитное поле квадрупольных линз. Последние устанавливаются одна за другой таким образом, что линзы, скажем, с нечетными номерами фокусируют в вертикальном направлении, а с четными — дефокусируют в том же направлении. Наоборот, в горизонтальном направлении линзы с нечетными номерами дефокусируют, а с четными — фокусируют. Поэтому в каком бы направлении ни отклонилась частица от равновесной траектории, она последовательно встретит на своем пути пары квадрупольных линз, причем каждая из таких пар будет фокусировать. В результате пучок частиц сужается и можно получать ускоренные пучки большой интенсивности. Частицы в пучке совершают малые колебания около равновесной траектории, частота которых в несколько раз или десятков раз больше частоты обращения их по равновесной орбите. По этой причине фокусировка с помощью квадрупольных магнитных линз и называется жесткой или сильной. Жесткая фокусировка применяется не только в синхрофазотронах, но и во всех крупных ускорителях, в частности в Серпуховском синхрофазотроне, некоторые параметры которого были приведены выше.

Жесткая фокусировка позволяет уменьшить поперечные размеры камеры и, следовательно, массу магнита. Например, масса магнита ускорителя в Дубне на 10 ГэВ без жесткой фокусировки равна 36 000 тонн. Магнит же ускорителя в Серпухове на 76 ГэВ с применением жесткой фокусировки имеет меньшую массу — 20 000 тонн. Уменьшением массы магнита, а с ним и индуктивности можно добиться более частого повторения импульсов.

13. Циклотрон (см. п. 6), оставляя магнитное поле постоянным во времени, можно модернизировать так, чтобы он был пригоден и для ускорения *релятивистских частиц.* Для этого надо применять постоянное магнитное поле $H(r)$, зависящее определенным образом от радиуса r. Именно, согласно (84.3), магнитное поле должно меняться с радиусом так же, как и релятивистская масса частицы, т. е. $H = H_0/\sqrt{1-\beta^2}$. Тогда частота обращения Ω частицы будет оставаться одной и той же, равной частоте ускоряющего поля. Так как $\beta = v/c = \Omega r/c$, то указанному требованию удовлетворяет магнитное поле вида

$$H = \frac{H_0}{\sqrt{1-(\Omega r/c)^2}} \tag{84.9}$$

при постоянной Ω. Ускорители, использующие этот принцип, называются *изохронными циклотронами.* Они работают в непрерывном режиме и дают возможность получать столь же сильные токи (0,1–1 мА), что и обыкновенные циклотроны.

Изохронные циклотроны имеют огромные магниты, а потому довольно дороги. Казалось бы, что такие ускорители работать не могут, так как в них магнитное поле возрастает с радиусом (см. п. 6). Однако возникающую из-за этого вертикальную неустойчивость удается

компенсировать азимутальной неоднородностью магнитного поля довольно сложной формы. Правда, расчет показывает, что это можно сделать до энергий не выше 1 ГэВ. Большинство изохронных циклотронов проектируется и строится для ускорения протонов до 50–100 МэВ. Изохронные циклотроны применяются для изучения редких процессов в реакциях с протонами с энергией 50–1000 МэВ. Серьезными конкурентами их являются линейные ускорители тяжелых частиц.

14. Обычно ускоренный пучок частиц направляется из ускорителя на неподвижную мишень. При столкновении с частицей-мишенью общий импульс обеих частиц не меняется. Поэтому не меняется и та часть энергии, которая связана с движением центра масс как целого. Эта часть энергии не участвует ни в каких внутренних превращениях сталкивающихся частиц, и в этом отношении она является бесполезной. В системе центра масс эта бесполезная кинетическая энергия равна нулю и вся энергия является полезной, т. е. может быть использована для внутренних превращений сталкивающихся частиц.

В т. IV (§ 111, задача 1) был рассмотрен простейший случай столкновения двух частиц одинаковых масс, движущихся навстречу друг другу. Был поставлен и решен вопрос, какой энергией $\mathscr{E}_{\text{лаб}}$ должна обладать одна из этих частиц в лабораторной системе отсчета, в которой вторая частица (мишень) покоится, чтобы при столкновении получился такой же полезный эффект (в смысле возможности внутренних превращений частиц), что и в системе центра масс. Будем понимать под $\mathscr{E}_{\text{лаб}}$ полную (релятивистскую) энергию одной движущейся частицы, а под $\mathscr{E}_0$ — ее энергию покоя. В указанной задаче была получена формула

$$\mathscr{E}_{\text{лаб}} = 2\frac{\mathscr{E}_{\text{цм}}^2}{\mathscr{E}_0} - \mathscr{E}_0, \tag{84.10}$$

где $\mathscr{E}_{\text{цм}}$ — релятивистская энергия одной частицы в системе центра масс. Соответствующая кинетическая энергия частицы

$$\mathscr{E}_{\text{лаб}}^{\text{кин}} = \mathscr{E}_{\text{лаб}} - \mathscr{E}_0 = 2\left(\frac{\mathscr{E}_{\text{цм}}^2}{\mathscr{E}_0} - \mathscr{E}_0\right). \tag{84.11}$$

В нерелятивистском случае $\mathscr{E}_{\text{цм}} = \mathscr{E}_0 + \mathscr{E}_{\text{цм}}^{\text{кин}}$. Подставляя это значение в предыдущую формулу и пренебрегая квадратами $\mathscr{E}_{\text{цм}}^{\text{кин}}$, получим

$$\mathscr{E}_{\text{лаб}}^{\text{кин}} = 4\mathscr{E}_{\text{цм}}^{\text{кин}} = 2(2\mathscr{E}_{\text{цм}}^{\text{кин}}).$$

Таким образом, при неподвижной мишени для получения того же эффекта требуется вдвое большая кинетическая энергия, чем в системе центра масс (так как в этой системе полная кинетическая энергия обеих частиц равна $2\mathscr{E}_{\text{цм}}^{\text{кин}}$). Этот результат был уже получен в т. I, § 26.

Более интересен ультрарелятивистский случай. В этом случае в формуле (84.11) собственной энергией частицы можно пренебречь. Тогда связь между кинетическими энергиями частицы в лабораторной

системе и системе центра масс становится не линейной, а квадратичной:

$$\mathscr{E}_{\text{лаб}}^{\text{кин}} = \frac{2(\mathscr{E}_{\text{цм}}^{\text{кин}})^2}{\mathscr{E}_0}. \tag{84.12}$$

Здесь можно получить большой выигрыш энергии, осуществляя столкновение встречных частиц. Например, для протона ($\mathscr{E}_0 = 0{,}938$ ГэВ) при энергии $\mathscr{E}_{\text{цм}}^{\text{кин}} = 5$ ГэВ получается $\mathscr{E}_{\text{лаб}}^{\text{кин}} = 53$ ГэВ. *Ускоритель на встречных пучках* при энергии 5 ГэВ дает такой же эффект, как и ускоритель с неподвижной мишенью на энергию 53 ГэВ. Еще больший эффект получается в случае легких частиц, например электронов. Для электронов $\mathscr{E}_0 = 0{,}511 \cdot 10^{-3}$ ГэВ, так что при том же значении $\mathscr{E}_{\text{цм}}^{\text{кин}}$ получается $\mathscr{E}_{\text{лаб}}^{\text{кин}} \approx 10^5$ ГэВ, что уже недостижимо ни на каких реальных ускорителях с неподвижной мишенью.

Изложенного достаточно, чтобы уяснить принцип действия систем на встречных пучках. Наибольшее распространение получили устройства, в которых применяются электрон-электронные (e^-e^-), электрон–позитронные (e^-e^+) и протон-протонные (pp) пучки. Существенным недостатком систем на встречных пучках является малая интенсивность пучков. Для увеличения интенсивности пучков до процесса соударения заряженных частиц производится их накопление в специальных *накопительных кольцах*, чтобы циркулирующий в них ток был не меньше десятков ампер. Накопительное кольцо — это кольцевая вакуумная камера, помещенная в магнитное поле. Ускоренные заряженные частицы поступают в нее из синхротрона, синхрофазотрона или линейного ускорителя. Магнитное поле, как правило, создается секторами, разделенными прямолинейными промежутками (в которых магнитного поля нет) для областей пересечения пучков частиц и для компенсации синхротронного излучения и других целей.

Если заряды сталкивающихся частиц одинаковы, то система должна содержать два накопительных кольца, в которых частицы движутся в противоположных направлениях. Если же эти заряды противоположны, то достаточно только одного накопительного кольца, так как в одном и том же магнитном поле обеспечивается движение частиц с разными знаками заряда в противоположных направлениях и их ускорение в одном и том же электрическом поле. Встречные пучки в настоящее время могут быть использованы только для стабильных частиц. Ускорители с фиксированной мишенью являются источниками различных вторичных частиц: π-, K-мезонов, Λ-, Σ-гиперонов, нейтрино, μ-мезонов и т. д.

§ 85. Источники нейтронов и других нейтральных частиц

1. Нейтроны, как и все электрически нейтральные частицы, нельзя ускорять и фокусировать электромагнитными полями. Такие частицы образуются только в результате ядерных реакций. Ниже описываются принципы действия некоторых нейтронных источников и приводятся

для общей ориентировки некоторые их характеристики. Источники нейтронов можно разделить на три группы: 1) источники, в которых нейтроны создаются радиоактивными излучениями; 2) источники, в которых они создаются частицами, вылетающими из ускорителей; 3) ядерные реакторы. Во всех типах источников нейтроны, как правило, получаются быстрыми. Взаимодействие нейтронов с ядрами особенно интенсивно в случае медленных нейтронов (сечение взаимодействия пропорционально $1/v$). Полученные в источниках нейтроны используются либо сразу, либо после предварительного замедления. Особое значение имеют источники тепловых нейтронов (с энергиями порядка $1/40$ эВ).

2. В так называемых $(\alpha,\, n)$-источниках α-частицы от радиоактивного препарата облучают мишень, в результате чего и возникают нейтроны. Помимо энергии получающихся нейтронов, источник характеризуется *выходом* нейтронов и *интенсивностью*. Выходом называется среднее число нейтронов, возникающих при одном акте взаимодействия α-частицы с ядром мишени (или при активности 1 Ки, т. е. при $3{,}7 \cdot 10^{10}$ α-распадов). Интенсивность источника характеризуется числом нейтронов, возникающих при тех же условиях в одну секунду.

В самых первых источниках нейтронов использовалась реакция

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + \alpha \to {}^{12}_{6}\mathrm{C} + \mathrm{n} + 5{,}6\ \text{МэВ}, \tag{85.1}$$

на которой Боте и Беккером (см. § 92) впервые наблюдалось нейтронное излучение. Дальнейшие опыты показали, что нейтроны образуются также при бомбардировке α-частицами изотопов элементов Li, B, N, F, Na, Mg, Al, ... Однако по интенсивности излучения реакция с бериллием значительно превосходит все остальные, поэтому эта реакция в течение долгого времени и использовалась при изготовлении источников нейтронов. Источник представляет собой герметическую ампулу, в которой помещена смесь порошка бериллия с α-активным препаратом, например полонием-210, испускающим α-частицы с энергией 5,298 МэВ. Альфа-частицы не могут проходить через стенки ампулы из-за их ничтожных пробегов. Нейтроны же, образующиеся в результате реакции (85.1), свободно выходят. Энергетический спектр нейтронов полоний-бериллиевого источника непрерывен и простирается примерно от 0,5 до 10 МэВ, интенсивность создаваемого нейтронного излучения около $0{,}8 \cdot 10^{-4}$ нейтронов в секунду на одну α-частицу, испускаемую полонием ($3 \cdot 10^{6}$ нейтронов в секунду на 1 Ки полония). Достоинством полоний-бериллиевого источника является незначительный фон нежелательного γ-излучения, недостатком — малый период полураспада (140 дней). В качестве источника α-частиц наряду с полонием применяются также радий, радон, плутоний. Радий-бериллиевый источник характеризуется практически неограниченным сроком действия (период полураспада 1600 лет) и в шесть раз большей интенсивностью нейтронного излучения, но у него очень велик фон мешающего γ-излучения. Плутоний-бериллиевый источник характеризуется малым фоном γ-излучения, большим сроком службы (период полураспада $2{,}3 \cdot 10^{4}$ лет)

и дает интенсивность около $0{,}46 \cdot 10^{-4}$ нейтронов в секунду на одну α-частицу, испускаемую плутонием.

Альфа-частицы испускаются не только при радиоактивном α-распаде материнского вещества, но и при α-распаде всех его α-активных дочерних продуктов. В равновесном состоянии α-активность всех α-излучателей одинакова. Но их способность к образованию нейтронов не одинакова. Она тем выше, чем меньше время жизни короткоживущих продуктов распада, так как такие продукты излучают более энергичные α-частицы. Поэтому если источник содержал вначале, например, чистый радий, то по мере накопления α-радиоактивных продуктов распада его способность излучать нейтроны возрастает в несколько раз и при насыщении стремится к постоянному пределу. Основной недостаток всех источников с использованием α-частиц — большой разброс по энергиям вылетающих нейтронов.

Относительно монохроматические нейтроны с энергиями 0,1–1 МэВ получают облучением γ-квантами ядер дейтерия и бериллия. При этом происходят реакции

$$\gamma + \mathrm{d} \to \mathrm{p} + \mathrm{n}, \quad {}^9_4\mathrm{Be} + \gamma \to {}^8_4\mathrm{Be} + \mathrm{n} \to \alpha + \alpha + \mathrm{n}, \tag{85.2}$$

идущие с поглощением энергии. Гамма-кванты создаются каким-либо радиоактивным ядром (${}^{24}_{11}\mathrm{Na}$, ${}^{72}_{31}\mathrm{Ga}$, ${}^{124}_{51}\mathrm{Sb}$ и пр.). Энергия этих γ-квантов не превышает нескольких мегаэлектронвольт. Поэтому в качестве мишеней и используются только легкие ядра d и ${}^9_4\mathrm{Be}$, так как у них энергия отделения нейтрона аномально низка (2,23 и 1,67 МэВ соответственно). Интенсивность γ-нейтронных источников примерно на два порядка ниже, чем α-нейтронных. Зато γ-нейтронные источники дают более монохроматические нейтроны. Действительно, энергия γ-кванта $\mathscr{E}_\gamma = p_\gamma c$, а кинетическая энергия α-частицы $\mathscr{E}_\alpha = p_\alpha^2/2m_\alpha$. Если эти энергии одинаковы, то

$$p_\gamma c = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha},$$

откуда

$$\frac{p_\gamma}{p_\alpha} = \frac{p_\alpha}{2m_\alpha c} = \frac{v_\alpha}{2c},$$

где v_α — скорость α-частицы. Таким образом, при энергии несколько мегаэлектронвольт импульс γ-кванта примерно на два порядка меньше импульса α-частицы той же энергии. С этим и связана большая монохроматичность γ-радиоактивных источников нейтронов по сравнению с α-радиоактивными источниками. Комбинацией различных γ-излучателей либо с дейтерием, либо с бериллием и получают сравнительно монохроматические нейтроны с различными энергиями от 0,12 до 0,87 МэВ. Существенным недостатком этих источников наряду с низкой интенсивностью является высокий фон γ-излучения и малое время жизни (период полураспада от нескольких часов до нескольких десятков часов).

Альфа- и гамма-нейтронные источники находят применения в прикладных исследованиях (особенно в полевых условиях) как небольшие

лабораторные источники нейтронов, а также для калибровки нейтронных детекторов.

3. Получение нейтронов с помощью ускорителей отличается от способа, изложенного выше, в том отношении, что вместо α-частиц или γ-излучения естественных радиоактивных излучений применяются ускоренные заряженные частицы, при облучении которыми различных мишеней получаются нейтроны. Таким путем можно получать относительно моноэнергетические нейтроны самых разнообразных энергий. Дело в том, что при фиксированной энергии частиц в пучке и конкретном нейтронном канале реакции [1]) энергия получающегося нейтрона однозначно определяется углом его вылета и энергией реакции. Степень немоноэнергетичности образующихся нейтронов зависит от немонохроматичности исходного пучка заряженных частиц, их замедления в мишени и существования нескольких нейтронных каналов реакции. Для ослабления влияния этих факторов применяют тонкие мишени, в которых используемый нейтронный канал является единственным или по меньшей мере доминирующим.

В качестве бомбардирующих заряженных частиц обычно применяют протоны, дейтроны, α-частицы и пр. Например, для получения монохроматических нейтронов низких энергий используются реакции (p, n), т. е. такие реакции, в которых ядро-мишень бомбардируется протонами, а в результате реакции возникают нейтрон и другое ядро. Наиболее часто применяется реакция

$$ {}^7_3\mathrm{Li} + \mathrm{p} \to {}^7_4\mathrm{Be} + \mathrm{n} - 1{,}6\ \text{МэВ}, \tag{85.3} $$

с помощью которой получаются моноэнергетические нейтроны с энергиями от 30 до 500 кэВ (в зависимости от энергии протонов). Удешевление производства трития сделало доступным использование реакции

$$ \mathrm{p} + \mathrm{t} \to {}^3_2\mathrm{He} + \mathrm{n} - 0{,}735\ \text{МэВ}, \tag{85.4} $$

достоинством которой является не столько низкий порог, сколько отсутствие возбужденных состояний у ядра ${}^3_2\mathrm{He}$. С помощью реакции (85.4) получают моноэнергетические нейтроны с энергиями от 0,06 до 3 МэВ. Недостатком реакции (85.4) является фон жесткого γ-излучения, возникающий за счет параллельно идущей реакции

$$ \mathrm{p} + \mathrm{t} \to \alpha + \gamma. \tag{85.5} $$

Ограничиваясь приведенными примерами, заметим только, что применяется много реакций, в которых, в частности, получаются нейтроны относительно высоких энергий.

4. Наиболее мощным источником нейтронов является ядерный реактор, принцип действия которого описывается в § 95. В современных исследовательских реакторах плотность потока нейтронов в активной зоне и замедлителе ориентировочно составляет 10^{15} с$^{-1}\cdot$см$^{-2}$. Спектр реакторных нейтронов, и в этом его недостаток, не моноэнергетичен,

---

[1]) Определение канала реакции дается в § 87, п. 3, а порога реакции — в § 88, п. 2.

а заполняет широкую непрерывную область энергий. Но суммарная интенсивность нейтронного потока настолько велика, что из него можно выделять сравнительно мощные пучки нейтронов с высокой степенью моноэнергетичности.

Мощным источником нейтронов может служить интенсивный протонный или дейтронный ускоритель, пучок которого направляется на мишень из тяжелых элементов, в которой происходит деление ядер.

Источниками нейтронов являются также и некоторые термоядерные реакции (см. § 98). Об использовании нейтронов в ядерной энергетике подробно говорится в § 95, 98.

5. Существенным недостатком всех источников дейтронов является сплошной спектр или низкая степень моноэнергетичности. Одна из причин этого — рассеяние нейтронов в самом источнике (а при высоких энергиях и обилие нейтронных каналов). Между тем для исследования взаимодействия нейтронов с ядрами крайне важно иметь нейтронные пучки высокой степени моноэнергетичности, чтобы, например, отделить друг от друга узкие и частые резонансы в сечениях взаимодействия нейтронов с ядрами. Для выделения из непрерывного спектра источников монохроматических пучков применяются разные методы, основанные на том, что нейтроны различных энергий обладают и различными скоростями.

Один из таких методов применяется тогда, когда источник немоноэнергетических нейтронов импульсный. Нейтроны от такого источника летят в трубе длиной в сотни метров. За время полета нейтронный сгусток разделяется по скоростям. В конце трубы ставится заслонка (прерыватель), синхронно открывающаяся лишь в моменты пролета нейтронов определенной скорости. В результате из трубы выходят почти моноэнергетические нейтроны, энергия которых заключена в узких пределах.

Другой монохроматор нейтронов, в принципе, действует так же, как и монохроматор для атомных пучков, описанный в § 18 (п. 8, рис. 37). Для него вращающиеся диски должны быть изготовлены из материала, непроницаемого для нейтронов (например, из кадмия, задерживающего тепловые нейтроны, или из специальных сплавов для задержания нейтронов, имеющих другие скорости). Как и предыдущий монохроматор, этот монохроматор является механическим. Механические монохроматоры эффективны для получения нейтронов с энергиями от тысячных долей до нескольких электронвольт.

6. В заключение коротко остановимся на получении других нейтральных частиц. К ним относятся прежде всего нейтральные частицы, участвующие в сильных взаимодействиях: π^0, η, K^0, $\overline{\mathrm{K}}^0$, Λ, Σ^0, $\overline{\mathrm{n}}$, $\overline{\Lambda}$, $\overline{\Sigma}^0$ и пр., а также нейтрино и антинейтрино всех сортов: ν_e, $\overline{\nu}_\mathrm{e}$, ν_μ, $\overline{\nu}_\mu$, ν_τ, $\overline{\nu}_\tau$, которые участвуют только в слабых взаимодействиях. Сильновзаимодействующие частицы в заметных количествах возникают при бомбардировке мишени пучком заряженных частиц из ускорителя очень высокой энергии. Из-за релятивистских эффектов подавляющая

часть всех возникающих частиц летит вперед. Пучок заряженных частиц можно отклонить сильным магнитным полем и таким образом выделить пучок, состоящий из разных нейтральных частиц различной энергии. При энергиях первичного пучка до 700–800 МэВ в основном образуются нейтроны. При энергиях выше нескольких гигаэлектронвольт появляются нейтральные каоны и нейтральные гипероны и т. д. Нейтральные пионы образовать пучка не могут из-за слишком короткого времени жизни ($0{,}75 \cdot 10^{-16}$ с).

Нейтрино и антинейтрино подвержены только слабым взаимодействиям, а потому при столкновениях любых частиц с любыми мишенями рождаются в ничтожных количествах. Эти частицы рождаются при распадах. При β^--распаде рождается электронное антинейтрино $\overline{\nu}_e$, при β^+-распаде — электронное нейтрино ν_e. Мощным источником электронных антинейтрино является ядерный реактор, электронного нейтрино — Солнце. Мюонные нейтрино ν_μ и антинейтрино $\overline{\nu}_\mu$ возникают в современных протонных ускорителях: при столкновении первичного пучка с мишенью сначала возникают заряженные пионы, а затем идут следующие превращения:

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu, \quad \pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu. \qquad (85.6)$$

Из-за закона сохранения импульса при релятивистских скоростях все продукты распада в виде пучков летят в основном вперед. Если на пути пучков поставить достаточно толстую бетонную или железную стену, то все частицы будут поглощены, за исключением ν_μ и $\overline{\nu}_\mu$, которые беспрепятственно пройдут через нее (см. также § 74).

§ 86. Детекторы частиц

1. *Детекторами* называются приборы, служащие для регистрации частиц. Они разделяются на *счетчики* или *электронные детекторы*, вырабатывающие электрический импульс, когда в объем детектора попадает ионизующая заряженная частица, и *трековые детекторы*, позволяющие не только зарегистрировать факт и момент прохождения заряженной частицы, но и оставить след (или трек) частицы, воспроизводящий ее траекторию. Это дает более полную информацию о движении частицы, процессах столкновения ее с другими частицами и пр. Созданы приборы с использованием электронных детекторов, позволяющие определять траектории большого числа заряженных частиц.

Незаряженные частицы сами ионизацию не производят. Но в этом случае ионизация, а с ней и соответствующие треки создаются *вторичными заряженными частицами*, возникающими при прохождении нейтральных частиц через вещество. Так действуют, например, γ-кванты, вырывающие электроны из атомов и молекул или стенок счетчика, а также нейтроны, вызывающие ядерные превращения с образованием заряженных частиц.

Счетчики регистрируют прохождение частицы через определенное место пространства с погрешностью до 1–0,1 см, а время прохождения — с погрешностью до 10^4–10^9 с. В некоторых счетчиках определяются и другие характеристики частицы: энергия, заряд, масса, скорость и пр.

К счетчикам относятся *импульсные ионизационные камеры*, *пропорциональные счетчики*, *счетчики Гейгера–Мюллера*, *сцинтилляционные*, *черенковские* и *полупроводниковые счетчики*.

В трековых детекторах след, оставленный заряженной частицей, тем или иным способом фиксируется. Еще совсем недавно (лет 10–20 тому назад) единственным способом регистрации треков было их фотографирование, обычно в двух проекциях. Обработка таких фотографий — весьма трудоемкий процесс. Сейчас все большее распространение получает так называемый безфильмовый метод, не использующий фотографию. В этом методе параметры трека непосредственно передаются на ЭВМ для последующей полной обработки. Это на несколько порядков сократило время обработки и увеличило объем материала, который можно обработать.

К трековым детекторам относятся *камеры Вильсона*, *пузырьковые камеры*, *толстослойные фотоэмульсии*, *широкозазорные искровые* и *стримерные*, *пропорциональные* и *дрейфовые камеры*.

Искровая и пропорциональная камеры действуют как совокупности большого числа мелких счетчиков. Эти камеры напоминают счетчики в том отношении, что информация в них выдается мгновенно, без последующей обработки. Но они напоминают и трековый детектор, так как по действию многих счетчиков можно установить и трек частицы.

2. Основные характеристики детекторов.

1) *Эффективность* — отношение числа частиц, зарегистрированных детектором, к общему числу прошедших через него частиц (в долях от единицы или в процентах).

2) *Пространственное разрешение* — погрешность, с которой детектор может фиксировать положение частицы в пространстве.

3) *Временное разрешение* (разрешающее время) — минимальный промежуток времени между прохождениями двух частиц через детектор, когда сигналы от них еще не накладываются друг на друга. При меньших временах получится наложение сигналов, и две частицы будут регистрироваться детектором как одна частица.

4) *Время восстановления* (мертвое время) — время, за которое детектор, зарегистрировавший одну частицу, успевает вернуться в исходное состояние, чтобы быть готовым для регистрации следующей частицы. Частицы, прошедшие через детектор за это время, не регистрируются. Время восстановления является мерой инерционности детектора. Оно ограничивает максимальную интенсивность пучка частиц, при которой частицы еще могут регистрироваться детектором.

В табл. 14 приведены ориентировочные характеристики различных детекторов.

3. Наиболее обширную группу электронных детекторов составляют *ионизационные детекторы*, основанные на ионизации молекул

Таблица 14

Характеристики различных детекторов

Детектор	Пространственное разрешение, см	Временное разрешение, с	Время восстановления, с
Ионизационная камера	~ 1	10^{-6}	10^{-4}
Пропорциональный счетчик	~ 1	10^{-7}	10^{-5}
Счетчик Гейгера–Мюллера	~ 1	$> 10^{-6}$	10^{-4}
Сцинтилляционный счетчик	~ 1	10^{-9}	10^{-8}
Полупроводниковый детектор	< 1	10^{-9}	10^{-9}
Фотоядерные эмульсии	10^{-4}	—	—
Камера Вильсона	10^{-1}	10^{-1}	10^{-2}
Пузырьковая камера	10^{-2}	10^{-3}	1
Искровая камера	10^{-2}	10^{-6}	10^{-3}
Пропорциональная камера	10^{-2}	10^{-7}	10^{-5}
Стримерная камера	10^{-2}	10^{-6}	10^{-1}

и атомов, производимой первичными или вторичными заряженными частицами. Одним из старейших детекторов этой группы является *ионизационная камера*, применявшаяся еще в первых опытах Резерфорда. Ионизационная камера представляет собой электрический конденсатор (плоский, цилиндрический или сферический), заполненный газом, между электродами которого приложена разность потенциалов.

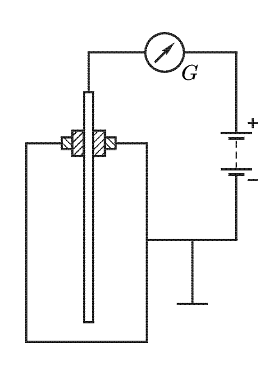


Рис. 154

На рис. 154 приведена схема ионизационной камеры с цилиндрическим конденсатором. Ионизующая частица, попадая в пространство между электродами, образует на своем пути электроны и ионы, которые перемещаются в электрическом поле и собираются на электродах. В цепи камеры появляется электрический ток, регистрируемый гальванометром G. Напряжение в камере подбирается таким (100–1000 В), чтобы все образовавшиеся ионы доходили до электродов, не успев рекомбинировать, но при этом не разгонялись бы настолько сильно, чтобы производить вторичную ионизацию. Поэтому в камере измеряется полная ионизация, производимая частицей, если только ее пробег целиком умещается в камере. Полная же ионизация согласно § 80 определяет и энергию частицы. Ионизационные камеры обычных типов пригодны лишь для регистрации короткопробежных частиц, т. е. тяжелых нерелятивистских частиц, так как пробеги электронов и релятивистских частиц в камере не умещаются.

Ионизационные камеры бывают *токовыми* и *импульсными*. Токовые ионизационные камеры дают сведения об общем количестве ионов, образовавшихся в 1 с. Соответствующие токи обычно малы (10^{-10}–10^{-15} А) и требуют усиления для регистрации. В импульсных ионизационных камерах регистрируются и измеряются импульсы напряжения на высокоомном сопротивлении R, которое должно быть включено в цепь вместо гальванометра G (рис. 154). Это напряжение появляется при прохождении через R ионизационного тока, вызванного движением частицы. Амплитуда и длительность импульса зависят от времени релаксации $\tau = RC$, где C — емкость конденсатора. Время релаксации τ должно быть велико по сравнению с временем собирания образовавшихся электронов на электродах, иначе электронный импульс рассосется уже во время его образования. Размеры ионизационных камер обычно порядка нескольких сантиметров. Скорость электронов при ионизации атома в тысячи раз превосходит скорость ионов. По этой причине электроны собираются на электродах примерно во столько же раз быстрее, чем ионы. Подбором сопротивления R можно добиться того, чтобы импульсы ионизационной камеры соответствовали бы сбору только электронов, а не ионов. Таким путем удается уменьшить длительность импульса до 1 мкс.

Рассмотрим в качестве примера прохождение α-частицы с энергией 5 МэВ через импульсную ионизационную камеру, наполненную аргоном. Средняя энергия ионизации атома аргона 25 эВ. Поэтому до замедления α-частица производит $5 \cdot 10^6 : 25 = 2 \cdot 10^5$ пар ионов. В результате через камеру проходит количество электричества $Q = 2 \cdot 10^5 e = 2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 3{,}2 \cdot 10^{-14}$ Кл. Если емкость конденсатора $C = 10^{-11}$ Ф, то ему соответствует импульс напряжения $V = Q/C = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ В. Так как сопротивление R высокоомное, то этот импульс напряжения почти весь приходится на R. Это весьма слабый импульс, поэтому он подается на вход усилителя. Наполнение камеры другим газом существенно ничего не меняет, так как средняя энергия, которая идет на образование одной пары ионов, для всех газов одного порядка (25–35 эВ). С другой стороны, увеличение импульса напряжения V за счет уменьшения емкости конденсатора C может производиться также в ограниченных пределах, так как время релаксации $\tau = RC$, как мы видели, нельзя брать меньше определенной величины. Для составления ориентировочного представления о порядках встречающихся величин заметим, что при напряженности электрического поля 500 В/см в воздухе при нормальных условиях скорость дрейфа электронов равна примерно 10^6, а ионов — только 10^3 см/с. При размерах камеры порядка нескольких сантиметров время собирания на электродах для электронов составляет 10^{-6}, а для ионов 10^{-3} с.

Ионизационные камеры применяются до сих пор, в частности в дозиметрии. Они просты, характеризуются высокой эффективностью регистрации, позволяют, как мы видели, оценивать энергию частицы и т. д. Однако амплитуда электрического сигнала в ионизационной

камере мала, требует усиления и поэтому делает аппаратуру чувствительной к помехам и шумам [1].

4. Недостатки ионизационной камеры в значительной степени устранены в *пропорциональном счетчике.* Это разновидность газонаполненного счетчика, в котором обычно используются коаксиальные электроды: катодом служит цилиндр, а анодом тонкая нить (толщиной 10–100 мкм), натянутая по оси цилиндра. Пропорциональный счетчик, как правило, наполняют инертным газом с небольшой примесью многоатомных газов. При попадании в счетчик ионизующей частицы большая часть образовавшихся электронов дрейфует в электрическом поле к аноду без размножения. Но вблизи анода, на расстояниях, сравнимых с диаметром нити, электрическое поле E настолько велико, что электроны вызывают вторичную ударную ионизацию — возникает несамостоятельный электрический разряд (см. т. III, § 112). В результате на анод приходит электронная лавина и в ряде случаев сигнал, порождаемый первичной частицей, получается достаточно сильным, так что для его регистрации не требуется усиления. В этом отношении пропорциональный счетчик отличается от ионизационной камеры. Отношение полного числа собранных электронов к их первоначальному числу называется *коэффициентом газового усиления* M. Этот коэффициент тем больше, чем больше отношение $E/\mathscr{P}$ ($\mathscr{P}$ — давление газа; в формировании импульса участвуют и ионы). При полном торможении частицы в пропорциональном счетчике сигнал, как и в ионизационной камере, пропорционален энергии частицы, затраченной на ионизацию. Дело в том, что вторичная ионизация, вызываемая электронами, происходит в очень малой области порядка 10^{-2} см вокруг нити. Объем этой области ничтожен по сравнению с полным объемом счетчика. Практически первичная ионизация всегда происходит вне этой области. Поэтому любой первичный электрон вызывает вблизи нити электронную лавину одной и той же мощности. А так как число первичных электронов, возникающих при ионизации атомов, производимой частицей, пропорционально ее энергии, то отсюда и следует вывод, сформулированный выше. Этот вывод и дает основание называть счетчик пропорциональным.

Типичные характеристики пропорциональных счетчиков: коэффициент газового усиления $M \approx 10^3$–10^4, но иногда может достигать и 10^6; амплитуда импульса 10^{-2} В при электрической емкости самого счетчика около 20 пФ; развитие лавины происходит за время 10^{-9}–10^{-8} с, однако момент появления сигнала на выходе счетчика зависит от места прохождения ионизующей частицы, т. е. от времени дрейфа первичных электронов до анода. Пропорциональные счетчики обладают практически стопроцентной эффективностью по отношению к заряженным частицам. Эти счетчики дешевы и просты в обращении.

---

[1] Импульсные ионизационные камеры используются для регистрации сильноионизирующих частиц: α-частиц, ядер-осколков и др. Для регистрации фона γ-излучения (в дозиметрии) используются токовые ионизационные камеры.

Пропорциональные счетчики используются для регистрации всех видов частиц: α-частиц, электронов, осколков деления, атомных ядер и пр., а также всех сильно взаимодействующих нейтральных частиц (по порождаемым ими заряженным частицам). Эти счетчики сыграли важную роль в развитии ядерной физики довоенного времени, так как они наряду с ионизационной камерой были практически единственными электронными спектрометрическими детекторами.

Главным недостатком пропорциональных счетчиков является сильная зависимость амплитуды импульса от состава газовой смеси и приложенного напряжения, а также недостаточно высокое временное разрешение (порядка 10^{-7} с). При работе с полным импульсом разрешающее время определяется временем дрейфа положительных ионов к катоду. Это время по порядку величины равняется 10^{-4} с. Однако его можно значительно уменьшить, использовав то обстоятельство, что скорость нарастания импульса наибольшая в первые моменты отхода ионов от нити. Это дает возможность работать на начальном участке импульса и достичь разрешающего времени 10^{-6}–10^{-8} с при не очень малом выходном импульсе (10^{-2} В). Пропорциональные счетчики применяются главным образом для регистрации и измерения энергии частиц с не слишком большими энергиями.

Заметим еще, что в связи с появлением ЭВМ в конце 60-х годов, в физике частиц высоких энергий начала применяться *пропорциональная камера.* Не вдаваясь ни в какие подробности, заметим, что она состоит из большого числа (10^3–10^4) небольших пропорциональных счетчиков, расположенных в одной плоскости и обычно в одном газовом объеме. С ее помощью можно воспроизводить траекторию частицы. Таким образом, она одновременно выполняет функции быстродействующего спектрографа и трекового детектора.

5. Если повышать напряжение на электродах пропорционального счетчика, то, начиная с некоторого напряжения, импульс становится не зависящим от энергии первичной частицы, так как прибор начинает работать в режиме самостоятельного разряда, но этот импульс возрастает с повышением напряжения. Такая область напряжений называется *областью Гейгера.* Прибор, работающий в указанном режиме, носит общее название *счетчика Гейгера.* В сущности, он представляет собой газоразрядный промежуток с сильно неоднородным полем. В первоначальных вариантах счетчика, разработанных самим Гейгером, сильно неоднородное электрическое поле возникало вблизи металлического острия, служившего анодом. В более поздних вариантах, предложенных совместно с Мюллером, анод был заменен тонкой проволочкой, натянутой вдоль оси цилиндрического конденсатора. В этой конструкции прибор называют *счетчиком Гейгера–Мюллера.* Один из видов счетчика Гейгера–Мюллера уже был описан нами в § 8 (п. 2, рис. 15).

В счетчике Гейгера–Мюллера электроды заключены в герметический резервуар, наполненный газом при давлении 100–200 мм рт. ст. К электродам прикладывается напряжение в несколько сотен вольт.

При попадании в счетчик ионизующей частицы в газе возникают свободные электроны, которые начинают двигаться к нити-аноду. Так зарождается электронная лавина. Около анода, где напряженность электрического поля очень велика, электроны, образовавшиеся в результате первичной ионизации, ускоряются настолько, что сами начинают ионизовать газ, усиливая ранее образовавшуюся лавину. Вновь возникшие электроны сами могут набрать достаточную скорость, чтобы в свою очередь вызвать новую ионизацию и еще больше усилить лавину электронов. В результате возникает самостоятельный — коронный — разряд, распространяющийся вдоль нити. Разряд обрывается включением большого сопротивления $R \approx 10^8$–10^9 Ом (несамогасящийся счетчик, рис. 155) либо использованием в счетчике газовой смеси, состоящей из инертного газа с примесью небольшого количества паров спирта (или другого многоатомного газа) и галоидов (самогасящийся счетчик).

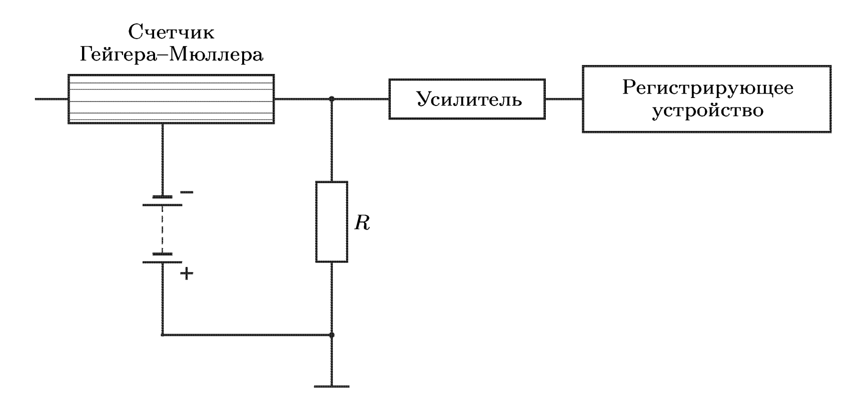


Рис. 155

В последнем случае механизм гашения разряда заключается в следующем. В отсутствие паров спирта фотоны достаточной энергии могут выбивать электроны с катода (см. т. III, § 115), а эти последние, направляясь к аноду, будут усиливать электронные лавины. Пары́ же спирта делают этот процесс невозможным, так как молекулы спирта сильно поглощают фотоны, возбуждаются и диссоциируют при этом, но практически не испускают электронов. Положительные ионы благородного газа (аргона), возникающие при первичной или последующей ионизации, направляются к катоду. Но на своем пути они сталкиваются с молекулами спирта и нейтрализуются, так как потенциал ионизации спирта (11,7 В) ниже потенциала ионизации аргона (15,7 В), а потому при столкновении энергетически выгодно, чтобы электрон перешел от молекулы спирта к иону аргона. Возбужденные атомы аргона испускают фотоны, которые в отсутствие молекул спирта вызывают фотоэффект с поверхностей электродов счетчика, способствующих развитию разряда. Но молекулы спирта поглощают фотоны и при этом диссоциируют; фотоэффекта не происходит, и разряд обрывается.

Электрические импульсы во внешней цепи, возникающие при вспышках разряда в счетчике Гейгера–Мюллера, усиливаются и регистрируются (см. рис. 155). Гамма-кванты регистрируются по вторичным заряженным частицам — фотоэлектронам, комптоновским электронам, электрон–позитронным парам; нейтроны — по ядрам отдачи и продуктам ядерных реакций, возникающих в газе счетчика.

Счетчики Гейгера–Мюллера характеризуются высокой эффективностью и большой амплитудой сигнала (2–40 В). Эффективность регистрации заряженных частиц счетчиками Гейгера–Мюллера близка к 100 %. Эффективность всех газоразрядных счетчиков по отношению к регистрации γ-квантов не превышает 1–3 %. Недостатки счетчиков Гейгера–Мюллера: невозможность измерять энергию частицы, невысокое временное разрешение (10^{-6} с), большое время восстановления их чувствительности (10^{-4}–10^{-3} с). Последнее определяется временем дрейфа к катоду положительных ионов, возникающих при ионизации частиц газа.

6. Ионизационные газовые детекторы сыграли фундаментальную роль на раннем этапе развития ядерной физики. Они применялись для регистрации естественных радиоактивных излучений и космических лучей. Однако с появлением ускорителей, создающих интенсивные пучки заряженных частиц (10^6–10^7 с$^{-1}$) высоких энергий, ионизационные газовые детекторы оказались слишком медленными и были дополнены *сцинтилляционными* и *черенковскими* счетчиками. Эти счетчики оказались удобными и при исследовании космических лучей.

Сцинтилляционный счетчик состоит из вещества, способного люминесцировать под действием заряженных частиц (сцинтиллятора), и фотоумножителя (ФЭУ) — прибора в высшей степени чувствительного и быстродействующего (см. т. III, § 103). Заряженная частица, попадая в сцинтиллятор, возбуждает атомы или молекулы. Возвращаясь в основное состояние, они испускают фотоны. Последние, попадая на катод ФЭУ, выбивают электроны, в результате чего на катоде возникает электрический импульс, который далее усиливается и регистрируется.

Благодаря высокой чувствительности и быстроте действия сцинтилляционный метод детектирования получил широкое распространение. Высокая чувствительность достигается тем, что в ФЭУ устанавливается до 10–20 эмитторов (*динодов*) из специально обработанного материала. В среднем каждый электрон, попадая на динод, выбивает из него от 3 до 10 новых электронов. С последнего динода усиленный поток электронов попадает на анод, создавая электрический импульс, регистрируемый радиотехническими методами. В результате достигается большой коэффициент усиления (10^6–10^8), малое время восстановления (около 10^{-8} с) при высокой его стабильности, высокое временное разрешение (около 10^{-9} с). Замечательной особенностью ФЭУ является хорошо соблюдаемая линейность усиления. Вторая, не менее важная причина распространенности метода состоит в том, что в качестве сцинтилляторов стали использовать вещества, прозрачные по отношению к собственному излучению сцинтиллятора. Благодаря

этому эффективным в детекторе становится весь объем сцинтиллятора, а не только его поверхностный слой.

Доля энергии регистрируемой частицы, которая превращается в световую энергию, называется *конверсионной эффективностью* η. Наибольшими значениями η обладают кристаллы NaI, активированные Tl, кристаллы антрацена и ZnS. Для этих сцинтилляторов длина волны в максимуме лежит в видимой области спектра вблизи его фиолетового конца. Интенсивность свечения после прохождения частицы изменяется во времени экспоненциально: $I \sim e^{-t/\tau}$, где τ — среднее время высвечивания, определяемое временем жизни молекул или атомов на возбужденных уровнях. Для большинства сцинтилляторов $\tau \approx 10^{-9}$–10^{-5} с. Чем меньше τ, тем более быстродействующим будет счетчик. Наименьшими временами τ обладают пластмассы, активированные терфинилом.

7. Использование прозрачных жидкостей в качестве сцинтиллирующих веществ открыло возможность применять сцинтилляторы громадных размеров. Изготовить сцинтиллятор таких размеров из кристалла затруднительно и даже невозможно, так как кристалл надо вырастить однородным. В качестве примера укажем, что именно с помощью сцинтилляционных счетчиков с жидким сцинтиллятором Рейнесу и Коуэну в 1956 г. впервые удалось зарегистрировать взаимодействие антинейтрино с веществом (см. § 74, п. 15). Для регистрации был использован сцинтиллятор, содержащий 5000 л воды с примесью люминесцирующего вещества и соли кадмия. Источником антинейтрино служил ядерный реактор, дающий плотность потока антинейтрино 10^{13} с$^{-1}\cdot$см$^{-2}$. Сцинтиллятор был помещен глубоко под землей для максимального ослабления фона космического излучения и отделен мощной защитой от реактора. Исследовалась реакция

$$\overline{\nu}_{\rm e} + {\rm p} \to {\rm n} + {\rm e}^+, \tag{86.1}$$

в которой антинейтрино взаимодействовали с протонами воды сцинтиллятора. Позитрон аннигилировал с электроном вещества с испусканием двух γ-квантов, давая первую вспышку. Нейтрон за несколько микросекунд замедлялся до надтепловых скоростей, после чего захватывался кадмием. Ядро кадмия при захвате нейтрона превращалось в новое ядро с энергией возбуждения 9,1 МэВ. При переходе в нормальное состояние оно испускало каскад γ-квантов, дававших вторую вспышку. Обе вспышки регистрировались схемой запаздывающих совпадений, что позволяло уверенно отделить нужные события от фоновых излучений. В среднем регистрировались три события в час, причем на проведение опыта было затрачено около полугода. Для сечения реакции (86.1) получилось $\sigma \approx (11 \pm 4)\cdot 10^{-44}$ см^2.

8. Черенковские счетчики используют явление *излучения Вавилова–Черенкова* (см. § 6, а также т. IV, § 38). Такое излучение возникает, когда заряженная частица движется в среде со скоростью v, превышающей фазовую скорость света в этой среде c/n (n — показатель преломления). В черенковском счетчике эта среда называется *радиатором.* Радиатор должен быть прозрачен для черенковского излучения

и иметь низкий уровень сцинтилляций, создающих фоновые сигналы. В качестве радиаторов для регистрации частиц со сравнительно небольшими скоростями применяют органическое стекло ($n = 1{,}5$), свинцовое стекло ($n = 1{,}5$) и воду ($n = 1{,}33$). Оптическая система счетчика фокусирует свет от частицы на катоде ФЭУ, превращающего световой сигнал в электрический. Общее количество света, попадающее на фотокатод черенковского счетчика, как правило, в несколько раз меньше, чем в сцинтилляционном счетчике. Но оно все же достаточно для регистрации после преобразования в ФЭУ в электрический сигнал и последующего усиления последнего. Именно фотоумножитель сделал возможным в черенковском счетчике уверенно регистрировать отдельные частицы. Так как излучение света в черенковских счетчиках происходит мгновенно, то их разрешающее время достигает 10^{-9} с.

Излучение Вавилова–Черенкова характеризуется резкой направленностью. Все оно концентрируется в тонком слое вблизи поверхности конуса, образующие которого составляют угол

$$\theta = \arccos \frac{c}{nv} = \arccos \frac{1}{\beta n} \tag{86.2}$$

с направлением движения частицы. Эта особенность излучения и используется в черенковских счетчиках. Если скорость частицы v близка к скорости света, то используются *газовые радиаторы.* В этом случае из-за малого отличия n от единицы угол θ, а с ним и интенсивность излучения очень малы. Для получения интенсивности вспышки, достаточной для регистрации, приходится увеличивать длину черенковского счетчика до 10 м и больше. Зато газовый черенковский счетчик позволяет плавно менять n путем изменения давления газа.

Черенковские счетчики делятся на *пороговые*, *дифференциальные* и *полного поглощения.* Пороговые счетчики должны регистрировать все частицы со скоростями больше некоторой (пороговой) скорости. Дифференциальные счетчики регистрируют частицы, скорости которых заключены в определенном интервале: $v_1 < v < v_2$. Это достигается оптической системой, выделяющей лучи, распространяющиеся под определенными углами между θ_1 и θ_2 к направлению движения частицы. Линза или сферическое зеркало с фокусным расстоянием f, поставленные на пути этих лучей, фокусируют их на кольцевую щелевую диафрагму с радиусами $R_1 = f\theta_1$ и $R_2 = f\theta_2$ (углы θ_1 и θ_2 малы), а затем на фотоумножитель. В результате свет будет зарегистрирован только от частиц, излучающих в направлении выделенного интервала углов и имеющих скорости в соответствующем ему интервале скоростей. Таким путем удается выделить частицы, которые по величине β отличаются всего на 10^{-6} от других частиц.

Черенковский счетчик полного поглощения предназначен для регистрации и спектрометрии электронов и γ-квантов. Он содержит блок радиаторов большой толщины, в котором электрон или γ-квант образует электрон-фотонную лавину и теряет всю (или почти всю) свою энергию. Как правило, радиатор изготовляют из стекла с большим содержанием свинца. При толщине радиатора 40 см в нем практически

полностью тормозятся электроны с энергией до 10 ГэВ. Количество света, излученного в черенковских счетчиках такого типа, пропорционально энергии первичного электрона или γ-кванта.

Для регистрации заряженных частиц с энергией порядка 10^2–10^3 ГэВ используются детекторы, в которых вспышки света возникают при прохождении регистрируемой частицы через границу двух сред с резко различными свойствами (*переходное излучение*). Интенсивность света, излучаемого при этом, пропорциональна энергии частицы, но значительно меньше, чем в случае черенковского излучения. Поэтому детекторы на переходном излучении делают многослойными, содержащими сотни слоев газ — твердое тело.

9. К концу 50-х годов после преодоления различных технических трудностей появились *полупроводниковые счетчики.* Они используют переходное излучение в рентгеновской области и имеют большое будущее в физике ТэВ-области для идентификации частиц. Схема такого счетчика показана на рис. 156. Принцип работы полупроводникового счетчика тот же, что и ионизационной камеры, только вместо газа применяется полупроводник. Это имеет то преимущество, что в твердом теле на одном и том же отрезке пути заряженная частица отдает в сотни раз больше энергии, чем в газе. Проходя через полупроводник, частица вызывает переход электронов из валентной зоны в зону проводимости, порождая пару электрон-дырка (см. т. III, § 100). Энергия W, необходимая для рождения такой пары, составляет 2,9 эВ в германии и 3,5 эВ в кремнии. Если энергия частицы равна $\mathscr{E}$, то на своем пути в полупроводнике она создает $\mathscr{E}/W$ электронно-дырочных пар. Приложенное электрическое поле оттягивает отрицательные заряды к поверхности, заряженной положительно, а положительные заряды — к поверхности, заряженной отрицательно. В результате во внешней цепи появляется электрический сигнал, который усиливается и регистрируется. Чтобы в отсутствие регистрируемой частицы через полупроводник не проходил ток, поверхности полупроводника обрабатывают сильно легированными донорными и акцепторными примесями (см. т. III, § 108). При этом отрица-

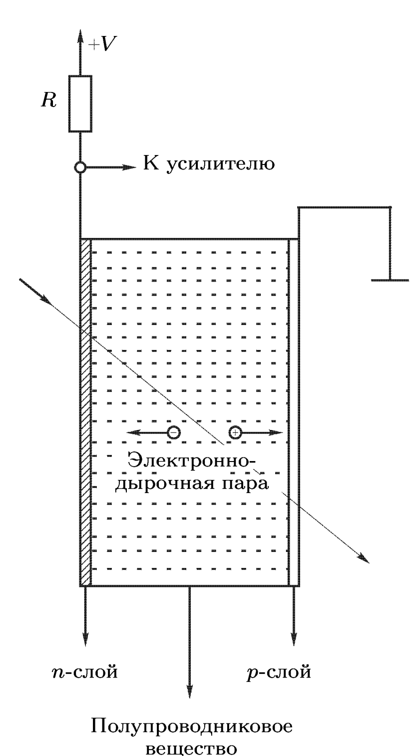


Рис. 156

тельный n-слой присоединяют к положительному, а положительный p-слой — к отрицательному полюсу внешнего источника. При комнатной температуре тепловое возбуждение может приводить к нежелательным импульсам тока в приборе, и поэтому полупроводниковые детекторы нередко охлаждают до температуры жидкого азота.

Размеры полупроводниковых счетчиков невелики — несколько кубических сантиметров. Большими считаются полупроводниковые счетчики, объем которых доходит до 100 см^3. Малые размеры рабочей области позволяют довести разрешающее время до 10^{-7} с. В области низких энергий (электроны до 2 МэВ, протоны до 20 МэВ) полупроводниковые счетчики обладают практически 100 %-ной эффективностью, малым разрешающим временем и превосходят счетчики других типов по компактности и точности измерения энергии.

10. Старейшим трековым детектором является *камера Вильсона* (1869–1959), изобретенная ее автором в 1912 г. Принцип действия этой камеры был подробно рассмотрен в т. III (§ 33, задача 4). Он основан на конденсации пересыщенных паров воды или спирта на ионах, образованных при движении вдоль траектории заряженной частицы. Камера в нужный момент освещается импульсным источником света и фотографируется несколькими фотоаппаратами для получения стереоскопических изображений треков. Природа и свойства частицы устанавливаются по длине ее пробега, толщине трека и его искривлению в магнитном поле. Измеряя кривизну трека в сильном магнитном поле, можно определить импульс частицы и знак ее заряда. Этот метод был предложен в 1923 г. независимо друг от друга П. Л. Капицей (1894–1984) и Д. В. Скобельциным (р. 1892).

Камера Вильсона сыграла выдающуюся роль в ядерной физике и физике космических лучей. На протяжении нескольких десятилетий она была единственным трековым детектором заряженных частиц. Но в 50-е и 60-е годы она утратила свое значение, уступив место *пузырьковой* и *искровой камерам.* В настоящее время камера Вильсона используется главным образом как эффектный лекционный демонстрационный прибор.

Родственной с камерой Вильсона по принципу действия является *диффузионная камера.* В камере Вильсона пересыщение создается адиабатическим расширением газа (содержащего пары воды или спирта), а в диффузионной камере оно достигается за счет непрерывного потока пара от горячей поверхности у крышки камеры к более холодной поверхности у ее дна. В отличие от камеры Вильсона, в диффузионной камере пересыщение существует постоянно в некотором горизонтальном слое пара, в котором и получаются треки ионизующих частиц. Поэтому диффузионная камера чувствительна к ионизующим частицам непрерывно.

11. Важнейшим трековым детектором заряженных частиц является *пузырьковая камера*, изобретенная Глезером (р. 1926) в 1954 г. Принцип действия этой камеры был описан в т. II (§ 119). Он основан на том, что можно получать жидкость с температурой выше точки кипения.

Такая перегретая жидкость нестабильна и через короткое время вскипает. Наиболее употребляемыми рабочими жидкостями служат жидкие водород, дейтерий, смесь неона с водородом — в криогенных камерах, а также пропан (C_3H_8), фреон и Xe (обычно в смеси с пропаном) — в тяжеложидкостных камерах. Перегревание жидкости производится быстрым понижением давления от начального значения $\mathscr{P}_н > \mathscr{P}_0$ до $\mathscr{P} < \mathscr{P}_0$ ($\mathscr{P}_0$ — равновесное давление при температуре T). Понижение (снятие) давления достигается либо быстрым перемещением поршня в жидководородных камерах, либо посредством использования упругой мембраны (в пропановой и фреоновой камерах). Давление в камере снимается за 5–15 мс, после чего жидкость оказывается перегретой, т. е. чувствительной к регистрации заряженных частиц. В момент максимальной чувствительности частицы впрыскиваются в камеру.

Заряженная частица при прохождении через перегретую жидкость приводит к образованию центров кипения вдоль своей траектории. По современным представлениям причиной образования таких центров являются δ-электроны, т. е. вторичные электроны, испускаемые атомами среды при соударении с ними ионизующей частицы. Эти электроны поглощаются небольшими объемами жидкости, что приводит к нагреванию последних, возникновению зародышей кипения, а в дальнейшем — к образованию и росту пузырьков. За время порядка 0,5–3 мс пузырьки достигают размера 50–300 мкм и при освещении их импульсным источником света могут быть сфотографированы несколькими фотоаппаратами.

Пузырьковые камеры обычно применяются для регистрации актов взаимодействия частиц высоких энергий с ядрами атомов жидкости, наполняющей камеру, а также актов распада частиц. В первом случае жидкость в пузырьковой камере одновременно выполняет и роль мишени, и роль детектора частиц.

Искажения следов частиц в пузырьковой камере невелики и определяются главным образом многократным рассеянием.

Эффективность регистрации определяется в основном размерами пузырьковой камеры. Камеры обычно имеют размеры 1–2 м. Однако на ускорителях сверхвысоких энергий используются и очень большие пузырьковые камеры. Так, пузырьковая камера СКАТ в Институте физики высоких энергий (г. Серпухов), заполненная жидким фреоном, имеет размеры $4{,}5 \times 1{,}6 \times 1{,}5$ м, водородная камера на ускорителе Национальной ускорительной лаборатории им. Ферми (США) — 33 м^3.

Пузырьковые камеры сыграли важную роль в открытии и изучении странных частиц, нестабильных частиц-резонансов и т. д. Отметим некоторые их недостатки. Главный недостаток пузырьковой камеры — невозможность в процессе работы отбирать нужные события, при исследовании редких событий — это приводит к необходимости просматривать очень много фотографий. Нельзя различить релятивистские частицы. На очень высоких энергиях требуется сепаратирование пучка, а это трудно сделать. Даже в самые большие камеры нельзя одновременно запускать более 5–6 заряженных частиц. Поэтому процессы

с сечением меньше 1 микробарна практически недоступны (за исключением нейтрино, где проходит 10^{10} частиц), тогда как электронные приборы могут регистрировать до 10^7–10^8 частиц в секунду.

12. Самым дешевым трековым детектором заряженных частиц являются *толстослойные ядерные фотоэмульсии.* Они отличаются от обычных фотоэмульсий более высокой чувствительностью и большей толщиной (сотни микрометров, тогда как толщина обычных фотоэмульсий порядка 10 мкм). Пластинки, покрытые слоем чувствительной фотоэмульсии, ставятся на пути ионизующих частиц, после чего проявляются. В результате частица оставляет след, образованный зернами металлического серебра (размер зерна около 0,3 мкм). Этот след рассматривается в микроскоп с увеличением в 500–1000 раз. Измерение длины пробега при известной массе частицы дает ее энергию, а измерение плотности зерен — потери энергии на единицу пути, по которым можно судить о скорости частицы. Пластинку можно помещать в магнитное поле для измерения импульса частицы. Однако из-за короткой длины треков магнитное поле должно быть очень сильным. Главный недостаток метода — очень большая трудоемкость обработки пластинок, так как каждую пластинку приходится подолгу просматривать под сильным микроскопом.

В последние годы в связи с изучением частиц с тяжелыми кварками техника фотоэмульсий вновь возродилась (изучение частиц со временем жизни 10^{-12}–10^{-13} с).

Используются *гибридные установки* с электронными детекторами для идентификации и определения вершин [1]) в эмульсии. В гибридных установках используются также в качестве вершинных детекторов небольшие быстродействующие пузырьковые камеры высокого разрешения с лазерным и голографическим съемом информации. Разрешение — десятки микрометров.

13. В *искровой камере*, появившейся в конце 50-х годов, сочетается немедленность регистрации (т. е. отсутствие последующей обработки) с полнотой информации трековых детекторов. Принцип действия искровой камеры основан на возникновении искрового разряда в газе при попадании в него ионизующей частицы. Простейшая искровая камера состоит из двух плоскопараллельных электродов, пространство между которыми заполнено газом (чаще всего Ne, Ar или их смесью). Площадь пластин — от десятков квадратных сантиметров до нескольких квадратных метров. Одновременно с прохождением частицы или с некоторым запаздыванием (около 1 мкс) по сигналу системы детекторов (сцинтилляционных счетчиков, черенковских счетчиков и пр.), выделяющих искомое событие, на электроды искровой камеры подается короткий (порядка 10–100 нс) импульс высокого напряжения (5–20 кВ/см). Электроны, возникшие вдоль траекторий движения частицы при ионизации атомов газа, ускоряются электрическим полем и сами вызывают ионизацию и возбуждение атомов. В результате на очень

[1]) Вершина — точка в фотоэмульсии, где произошло взаимодействие.

коротком пути частицы возникают электрон-фотонные лавины, перерастающие либо в видимый глазу искровой разряд, либо в локальные светящиеся области небольшого объема (*стримеры*).

Узкозазорная искровая камера состоит из набора близко расположенных одинаковых плоскопараллельных электродов, отделенных друг от друга промежутками около 1 см. Электроды соединены через один. Половина электродов заземлена, а на другую в момент прохождения частицы подается короткий высоковольтный импульс напряжения порядка 1 кВ/см. Цепь искр, проскакивающих между пластинами в момент подачи этого импульса, воспроизводит траекторию частицы с точностью до долей миллиметра. Временное разрешение порядка 10^{-6} с, полное время восстановления порядка 10^{-3} с.

В широкозазорных искровых камерах расстояние между электродами 3–50 см. Электрон-фотонные лавины, развивающиеся в результате прохождения первичной частицы, сливаются в узкий светящийся канал вдоль траектории частицы. В этом режиме могут регистрироваться треки под углами не более 50° к направлению электрического поля в камере. Для наблюдения треков под большими углами вплоть до 90° используется так называемый *стримерный режим. Стримерная камера* есть разновидность искровой камеры, на которую подается импульс 20 кВ/см с более коротким фронтом и длительностью 10 нс. В этой камере разряд, вызванный импульсом высокого напряжения, обрывается на ранней стадии. В результате треки заряженных частиц, прошедших через камеру, выглядят как цепочки отдельных (несливающихся) стримеров, длиной в несколько миллиметров каждый.

Трековые искровые камеры и стримерные камеры характеризуются высокой эффективностью к одновременной регистрации многих частиц (ливней частиц), а также малой пространственной и угловой погрешностью определения траектории (около 10^{-3} рад).

Кроме фотографирования в искровых камерах широко применяют безфильмовые методы регистрации с использованием ЭВМ. Координаты искр записываются в память ЭВМ, где сразу же подвергаются математической обработке.

Глава XIII
ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

§ 87. Терминология и определения

1. О *ядерных реакциях* уже неоднократно говорилось на протяжении нашего курса. Рассмотрим теперь относящиеся сюда вопросы более систематично, допуская повторения в тех немногих случаях, где это необходимо.

В самом широком смысле слова ядерной реакцией называется процесс, возникающий в результате взаимодействия нескольких (как правило двух) сложных атомных ядер или элементарных частиц. Под это определение подходит и упругое рассеяние частиц, например нуклона на нуклоне, т. е. такое рассеяние, при котором не образуются новые частицы и не происходит их возбуждения, а происходит лишь перераспределение энергии и импульса между ними. При неупругом рассеянии также не возникают новые частицы, но по крайней мере одна из них переходит в возбужденное состояние.

В настоящей главе рассматриваются ядерные реакции только в узком смысле. В таких реакциях среди исходных частиц обязательно имеется по крайней мере одно ядро. Оно сталкивается с другим ядром или элементарной частицей, в результате чего происходит ядерная реакция и образуются новые частицы.

Как правило, ядерные реакции идут под действием ядерных сил. Но могут быть и исключения из этого правила. Например, процесс расщепления ядра под действием γ-квантов высоких энергий или быстрых электронов есть ядерная реакция, но она происходит под действием электромагнитных, а не ядерных сил, так как ядерные силы на фотоны и электроны не действуют. Точно так же к ядерным реакциям в широком смысле относятся процессы, возникающие при столкновениях нейтрино с другими частицами, но они совершаются под действием слабых сил.

Ядерные реакции могут происходить в естественных условиях (например, в недрах звезд или в космических лучах). Но их изучение обычно производится в лабораторных условиях на экспериментальных установках, в которых заряженные частицы ускоряются с помощью ускорителей. В этих случаях более тяжелые частицы обычно покоятся и называются *частицами мишени*, а более легкие налетают на них в составе *ускоренного пучка*. В ускорителях на встречных пучках частицы движутся навстречу друг другу, так что их деление на частицы мишени и частицы пучка теряет смысл. Кроме того, мишень не может состоять из нейтронов и большинства элементарных частиц, так как не существует способов приготовления таких мишеней.

2. Ускорением достигается сближение частиц (двух ядер, ядра и нуклона и т. д.) на расстояния порядка 10^{-13} см, на которых начинают действовать ядерные силы. Энергия налетающей положительной частицы должна быть порядка или больше высоты кулоновского потенциального барьера ядра (для однозарядной частицы и средних ядер порядка 10 МэВ, а для легких ядер меньше). В этих случаях ядерная реакция, как правило, и осуществляется за счет ускорения бомбардирующей частицы на ускорителе. Энергия частицы может быть и меньше высоты кулоновского барьера, как это было в классических опытах Кокрофта (1897–1967) и Уолтона (р. 1903), которые в 1932 г. впервые осуществили искусственное расщепление ядер лития путем бомбардировки их ускоренными протонами (см. (87.1)). Но в их опытах проникновение протона в ядро лития происходило путем туннельного перехода через кулоновский потенциальный барьер. Вероятность такого процесса, разумеется, очень мала. Для отрицательно заряженных и нейтральных частиц кулоновский барьер не существует и ядерные реакции могут протекать даже при тепловых энергиях налетающих частиц.

3. Наиболее универсальная и наглядная запись ядерных реакций заимствована из химии. Слева пишется сумма исходных частиц, затем ставится стрелка, а за ней сумма конечных продуктов реакции. Например, запись

$$ {}^{1}_{1}\mathrm{p} + {}^{7}_{3}\mathrm{L} \to {}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{7}_{4}\mathrm{Be} \qquad (87.1)$$

означает ядерную реакцию, возникающую при бомбардировке изотопа лития ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$ протонами, в результате которой возникают нейтрон и изотоп бериллия ${}^{7}_{4}\mathrm{Be}$. Запись

$$\gamma + {}^{9}_{4}\mathrm{Be} \to 2\,{}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

означает реакцию расщепления ядра ${}^{9}_{4}\mathrm{Be}$ на две α-частицы и нейтрон. Такой способ записи ядерных реакций уже неоднократно применялся нами, хотя и без его расшифровки.

Ядерные реакции в узком смысле часто записывают в более короткой символической форме: A(a, bcd ...)B, где A — ядро мишени, a — бомбардирующая частица, bcd ... — испускаемые в ядерной реакции частицы, B — остаточное ядро (в скобках после запятой записывают более легкие продукты реакции, вне — более тяжелые). Например, реакция (87.1) может быть записана так: ${}^{7}\mathrm{L}(\mathrm{p, n}){}^{7}\mathrm{Be}$. Запись ${}^{40}\mathrm{Ca}(\gamma, \mathrm{pn}){}^{38}\mathrm{K}$ означает выбивание из ядра ${}^{40}\mathrm{Ca}$ протона и нейтрона под действием γ-кванта, в результате чего образуется ядро калия ${}^{38}\mathrm{K}$. Часто применяют и еще более короткую запись, указывая только легкие частицы и не указывая ядра, участвующие в реакции. Например, запись (p, n) означает выбивание нейтрона из какого-то ядра под действием протона.

Ядерная реакция часто может идти несколькими способами, например: ${}^{63}\mathrm{Cu}(\mathrm{p, n}){}^{63}\mathrm{Zn}$; ${}^{63}\mathrm{Cu}(\mathrm{p, 2n}){}^{62}\mathrm{Zn}$; ${}^{63}\mathrm{Cu}(\mathrm{p, pn}){}^{62}\mathrm{Cu}$; ${}^{63}\mathrm{Cu}(\mathrm{p, p}){}^{63}\mathrm{Cu}$; ${}^{63}\mathrm{Cu}(\mathrm{p, p'})^{*}\,{}^{63}\mathrm{Cu}$ (неупругое рассеяние протонов). Совокупность сталкивающихся частиц в определенном квантовом состоянии (например, p и ядро ${}^{63}\mathrm{Cu}$) называется *входным каналом ядерной реакции.* Частицы,

рождающиеся в результате ядерной реакции в определенных квантовых состояниях (например, p, n и ядро ^{62}Cu с определенными орбитальными моментами и проекциями спинов на выделенное направление) образуют *выходной канал ядерной реакции.*

4. Количественное описание ядерных реакций с квантовомеханической точки зрения может быть только *статистическим*, т. е. таким, в котором принципиально можно говорить лишь о вероятностях различных процессов, характеризующих ядерную реакцию. Например, реакция $\mathrm{a} + \mathrm{A} \to \mathrm{b} + \mathrm{B}$, в начальном и конечном состояниях которой имеются по две частицы, в этом смысле полностью характеризуется *дифференциальным эффективным сечением* рассеяния $d\sigma/d\Omega$ внутрь телесного угла $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, где θ и φ — полярный и азимутальный углы вылета одной из частиц (обычно легкой), причем угол θ отсчитывается от направления движения налетающей частицы. Зависимость дифференциального эффективного сечения от углов θ и φ называется *угловым распределением частиц*, образующихся в реакции. *Интегральным* или *полным сечением*, которым характеризуется интенсивность реакции, называется дифференциальное эффективное сечение, проинтегрированное по всем значениям углов θ и φ:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega. \tag{87.2}$$

Если налетающая частица и частицы мишени не имеют спинов или ориентированы хаотически, то все процессы аксиально-симметричны относительно направления движения частицы. В частности, в этом случае $d\sigma/d\Omega$ зависит только от полярного угла θ и можно написать $d\Omega = 2\pi\sin\theta\, d\theta$. Подавляющее большинство экспериментальных исследований выполняется в *лабораторной системе координат* (ЛС), т. е. системе, в которой мишень покоится. В теоретических исследованиях удобнее *система центра масс* (СЦМ), или *система центра инерции* (СЦИ), в которой суммарный импульс сталкивающихся частиц равен нулю. Результаты, полученные в СЦМ, можно пересчитать в ЛС, на чем мы останавливаться не будем. В ядерных реакциях в узком смысле слова масса налетающей частицы обычно много меньше массы ядра. В этом случае при нерелятивистских движениях центр масс практически совпадает с центром тяжелой частицы, так что обе системы координат фактически совпадают. Но при сверхвысоких скоростях налетающей частицы (почти совпадающих со скоростью света), когда ее кинетическая энергия значительно превосходит сумму энергий покоя обеих сталкивающихся частиц, системы ЛС и СЦМ уже сильно отличаются одна от другой.

При более детальной количественной характеристике ядерной реакции, идущей по нескольким каналам, вводят дифференциальные и интегральные сечения для отдельных каналов реакций. Для множественных процессов важное значение имеют так называемые *инклюзивные сечения*, определяющие вероятность появления в данном столкновении какой-либо определенной частицы или группы частиц.

5. Допустим теперь, что спины частиц, участвующих в реакции, не равны нулю. Если они как-то упорядочены, то частицы называются *поляризованными.* Так, поляризация света связана с ориентацией спинов фотонов. Частица с ненулевой массой покоя и спином I имеет $2I + 1$ квантовых состояний, отвечающих различным значениям проекции спина на некоторое направление. Состояние частицы представляет собой суперпозицию этих состояний. Если коэффициенты суперпозиции полностью определены (*чистое состояние*), то говорят, что *частица полностью поляризована.* Если же они определены не полностью, а заданы некоторыми статистическими характеристиками (*смешанное состояние*), то говорят о *частичной поляризации.* В этом случае для характеристики состояния поляризации вводят *вектор поляризации*, модуль которого называется просто *поляризацией* и измеряется в процентах. Сам вектор поляризации равен среднему значению спина, деленному на максимальное значение его проекции. Если вектор поляризации не параллелен импульсу налетающей частицы, то угловое распределение частиц после реакции может оказаться не аксиально-симметричным, т. е. может зависеть от азимутального угла φ. Но и при отражении или рассеянии неполяризованного пучка частиц на неполяризованной мишени может возникнуть поляризация. Это явление, напоминающее поляризацию, возникающую при отражении естественного света от изотропных диэлектриков, используется для получения поляризованных частиц. Оказывается, что вектор поляризации частиц перпендикулярен к плоскости рассеяния.

6. Наглядно эффективное сечение можно рассматривать как *эффективную площадь мишени*, попадая в которую частица вызывает требуемую реакцию. Но из-за волновых и квантовых свойств частиц такое толкование имеет ограниченную область применимости. В частности, для квантовой частицы существует ненулевая вероятность пройти без отклонения в сторону через область, в которой на нее действуют силы. Тогда действительное полное эффективное сечение окажется меньше поперечного сечения области, в которой происходит взаимодействие. В этом случае по аналогии с оптикой ядро-мишень называют *частично прозрачным* или *серым.*

Из-за волновых свойств частиц невозможно и чисто неупругое рассеяние, при котором рассеивающее тело только поглощает все падающие на него частицы. В противном случае за телом появилась бы резкая тень, что невозможно. Тень обязательно размоется из-за дифракции. А это означает, что появятся частицы, отклонившиеся в сторону, т. е. поглощение будет сопровождаться еще упругим рассеянием. Это рассеяние ввиду своего происхождения называется *дифракционным.*

Сечения ядерных реакций σ зависят от энергии $\mathscr{E}$ вылетающей частицы, типа ядерной реакции, углов вылетов и ориентации спинов частиц — продуктов реакции. Величина σ колеблется в пределах 10^{-27}–10^{-21} см^2. Если длина волны де Бройля λ налетающей частицы мала по сравнению с радиусом ядра R, то применимы методы геометрической оптики. В этом случае (для нерезонансных реакций и непрозрачных ядер) эффективное сечение реакции определяется геометрическим по-

перечным сечением ядра: $\sigma \approx \pi R^2$. На это соотношение, разумеется, нельзя смотреть как на точное. Действительно, сечение σ есть точная, статистически определенная величина, тогда как в определении радиуса ядра R содержится известный элемент неопределенности и условности. Это, в частности, проявляется в том, что с изменением скорости налетающей частицы меняется и эффективное сечение реакции. При малых скоростях, когда $\lambda\!\!\!^{-} \gg R$, методы геометрической оптики уже неприменимы. Величиной, определяющей сечение реакции, становится главным образом $\lambda\!\!\!^{-}$, а не R (см. § 88). Ведь обе величины R и $\lambda\!\!\!^{-}$, как имеющие размерность длины, входят в формулы, определяющие эффективное сечение реакции.

Для суждения о том, какая из этих двух величин является определяющей в том или ином конкретном случае, представляет интерес определить энергию $\mathscr{E}$ бомбардирующего нуклона, при которой $R = \lambda\!\!\!^{-}$. Для этого замечаем, что $\mathscr{E} = p^2/2m$, где m — масса нуклона, $p = \hbar/\lambda\!\!\!^{-}$, так что при условии $\lambda\!\!\!^{-} = R$ получим

$$p = \frac{\hbar}{R}, \quad \mathscr{E} = \frac{\hbar^2}{2mR^2}.$$

Воспользуемся теперь формулой (65.1). Тогда

$$\mathscr{E} = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2A^{2/3}} = \frac{(\hbar c)^2}{2\pi mc^2 r_0^2 A^{2/3}}$$

или после подстановки числового значения r_0 из формулы (65.2)

$$\mathscr{E} \approx 10A^{-2/3} \text{ МэВ}. \tag{87.3}$$

7. В реальных физических опытах далеко не всегда удается непосредственно измерить само дифференциальное или интегральное эффективное сечение реакции. Непосредственно измеряемой величиной является *выход реакции.* Выходом ядерной реакции W называется доля частиц пучка, испытавших ядерное взаимодействие с частицами мишени. Если S — площадь поперечного сечения пучка, а I — плотность его потока, то на такую же площадь мишени ежесекундно падает $N = IS$ частиц. Из них в одну секунду в среднем реагирует $\Delta N = ISn\sigma$ частиц, где σ — эффективное сечение реакции частиц пучка, а n — концентрация ядер в мишени. Таким образом,

$$W = \Delta N/N = \sigma n. \tag{87.4}$$

§ 88. Законы сохранения в ядерных реакциях

1. При рассмотрении ядерных реакций, как и других процессов, обсуждающихся в ядерной физике, используются следующие точные законы сохранения:

1) *закон сохранения энергии*;
2) *закон сохранения импульса*;
3) *закон сохранения момента импульса*;
4) *закон сохранения электрического заряда*;

5) *закон сохранения барионного заряда*;

6) *закон сохранения лептонных зарядов.*

Кроме того, используются и другие законы сохранения, а именно:

7) при пренебрежении слабым взаимодействием — *закон сохранения четности волновой функции*;

8) при пренебрежении электромагнитным взаимодействием — *закон сохранения изотопического спина.* Здесь этот закон рассматриваться не будет.

В физике элементарных частиц к перечисленным законам сохранения добавляются некоторые другие законы (см. § 109). Но здесь, в ядерной физике, мы рассматривать их не будем.

Законы сохранения позволяют предсказать, какие из мысленно возможных реакций могут действительно осуществляться, а какие невозможны или, как говорят, «запрещены» в силу невыполнения одного или нескольких законов сохранения. В этом отношении применительно к ядерным реакциям законы сохранения играют особо важную роль.

2. Начнем с законов сохранения энергии и импульса. Для процесса столкновения двух частиц эти законы в релятивистской форме можно записать так:

$$\mathscr{E}_{1\,\text{рел}} + \mathscr{E}_{2\,\text{рел}} = \mathscr{E}'_{1\,\text{рел}} + \mathscr{E}'_{2\,\text{рел}} + \ldots + \mathscr{E}'_{n\,\text{рел}}, \tag{88.1}$$

$$\mathbf{p}_{1\,\text{рел}} + \mathbf{p}_{2\,\text{рел}} = \mathbf{p}'_{1\,\text{рел}} + \mathbf{p}'_{2\,\text{рел}} + \ldots + \mathbf{p}'_{n\,\text{рел}}, \tag{88.2}$$

где величины без штриха обозначают релятивистские энергии и импульсы частиц до столкновения, а штрихованными буквами обозначены те же величины для частиц, образовавшихся в результате столкновения. Разумеется, соотношения (88.1) и (88.2) написаны в любой инерциальной системе отсчета. В частности, в лабораторной системе отсчета, когда частица 2 до столкновения неподвижна, $\mathbf{p}_{2\text{рел}} \equiv \mathbf{p}_{2\text{нерел}} = 0$, а в системе центра масс $\mathbf{p}_{1\text{рел}} + \mathbf{p}_{2\text{рел}} = 0$.

В экспериментальных исследованиях под энергией частицы всегда понимают ее кинетическую энергию $\mathscr{E} \equiv \mathscr{E}_{\text{кин}} = \mathscr{E}_{\text{рел}} - mc^2$, где m — масса покоя частицы. Для безмассовых частиц $\mathscr{E}_{\text{кин}}$ и $\mathscr{E}_{\text{рел}}$ тождественно совпадают. В этом случае нерелятивистского приближения не существует. Вычитая из (88.1) соответствующие энергии покоя, получим

$$\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}'_1 + \mathscr{E}'_2 + \ldots + \mathscr{E}'_n + Q, \tag{88.3}$$

где

$$Q = (m'_1 + m'_2 + \ldots + m'_n)c^2 - (m_1 + m_2)c^2. \tag{88.4}$$

Величина Q представляет собой энергию, выделяющуюся в результате реакции. Ее, как и в химии, часто включают в уравнение самой реакции. Например, реакция A(a, b)B в более полной форме записывается так:

$$\text{a} + \text{A} \to \text{b} + \text{B} + \text{Q}. \tag{88.5}$$

Это равенство означает, что если покоящиеся частицы a и A вступают в реакцию друг с другом, то частицы b и B получаются не в состоянии покоя, а в состоянии, в котором их суммарная кинетическая энергия

равна Q. В химии величина Q называется *теплотой реакции.* В ядерной физике ее принято называть *энергией реакции.*

Реакция называется *экзотермической*, если $Q > 0$, т. е. если она идет с выделением энергии. При этом в соответствии с (88.4) под энергией всегда понимается кинетическая энергия. Примером экзотермической реакции может служить реакция (в СЦМ)

$$\mathrm{p} + {}^7\mathrm{Li} \to \alpha + \alpha + 17\ \text{МэВ},$$

впервые полученная искусственно Кокрофтом и Уолтоном. Если же $Q < 0$, то реакция идет с поглощением энергии и называется *эндотермической.* Очевидно, всякая реакция, обратная экзотермической, будет эндотермической. Так, эндотермична реакция

$$\alpha + \alpha \to \mathrm{p} + {}^7\mathrm{Li} - 17\ \text{МэВ}.$$

Если не вводить отрицательных энергий, а воспользоваться обозначением $Q_{\text{энд}} = -Q$, то равенство (88.5) можно переписать так:

$$\mathrm{a} + \mathrm{A} + Q_{\text{энд}} \to \mathrm{b} + \mathrm{B}, \qquad (88.6)$$

где величина $Q_{\text{энд}}$ уже положительна. Это равенство означает, что для возможности реакции между частицами a и A им необходимо сообщить суммарную кинетическую энергию $Q_{\text{энд}}$, чтобы конечные продукты реакции b и B получились в состоянии покоя.

Положительную величину $Q_{\text{энд}}$ условимся называть *энергией эндотермической реакции.*

Экзотермическая реакция может идти при сколь угодно малой энергии сталкивающихся частиц. Напротив, эндотермическая реакция может идти только тогда, когда энергия сталкивающихся частиц превосходит некоторое минимальное значение. Это минимальное значение энергии, начиная с которого эндотермическая реакция может идти, называется *порогом реакции.* Существенно заметить, что порог реакции измеряется всегда в лабораторной системе координат, в которой частица-мишень покоится. Что касается величины $Q_{\text{энд}}$, то она связана только с относительным движением реагирующих частиц. Кинетическая энергия, связанная с движением центра масс системы частиц, сохраняется и в реакции не участвует. Напротив, она оказывает существенное влияние на величину $\mathcal{E}_{\text{пор}}$. Поэтому порог реакции $\mathcal{E}_{\text{пор}}$ вообще говоря, не совпадает с энергией эндотермической реакции Q.

Возьмем, например, две одинаковые частицы, движущиеся навстречу друг другу с одинаковыми, но противоположно направленными скоростями. В этом случае центр масс системы находится в покое. Он останется в покое и после столкновения. Пусть в результате столкновения частицы сливаются в одну частицу (неупругое столкновение). Она будет находиться в состоянии покоя. На образование этой частицы затрачивается энергия, равная сумме кинетических энергий сталкивающихся частиц. Предположим, что это — минимальная энергия, при которой слияние частиц возможно. Тогда реакция будет эндотермической и будет иметь порог. Пусть теперь одна частица покоится, а другая на нее налетает с той же относительной скоростью. Тогда реакция

и энергия эндотермической реакции останутся прежними, но не вся начальная кинетическая энергия пойдет на превращение. Останется еще кинетическая энергия движения центра масс. Таким образом, порог реакции больше энергии эндотермической реакции.

3. Найдем связь между порогом и энергией эндотермической реакции в общем случае, когда сталкивающиеся частицы, а также частицы, образующиеся в результате реакции, движутся с релятивистскими скоростями. Будем предполагать, что в лабораторной системе неподвижна частица 2 (мишень), а частица 1 движется с произвольной скоростью. Тогда $\mathbf{p}_{2\text{рел}} = 0$, $\mathbf{p}_{1\text{рел}} \neq 0$. В этой системе координат законы сохранения энергии и импульса запишутся так:

$$\mathbf{p}_{1\text{рел}} = \mathbf{p}'_{1\text{рел}} + \mathbf{p}'_{2\text{рел}} + \ldots + \mathbf{p}'_{n\text{рел}},$$

$$\mathscr{E}_{1\text{рел}} + m_2c^2 = \mathscr{E}'_{1\text{рел}} + \mathscr{E}'_{2\text{рел}} + \ldots + \mathscr{E}'_{n\text{рел}}.$$

Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что в любой системе частиц с энергией $\mathscr{E}_{\text{рел}}$ и импульсом $\mathbf{p}_{\text{рел}}$ величина $\mathscr{E}^2_{\text{рел}} - (\mathbf{p}_{\text{рел}}c)^2$ инвариантна относительно выбора системы координат. Применим этот результат к нашей системе частиц. До столкновения возьмем указанный инвариант в лабораторной системе, а после столкновения — в системе центра масс. Так как в системе центра масс импульс равен нулю, то таким путем получим

$$(\mathscr{E}_{1\text{рел}} + m_2c^2)^2 - \mathbf{p}^2_{1\text{рел}}c^2 = (\mathscr{E}'_{1\text{рел}} + \mathscr{E}'_{2\text{рел}} + \ldots + \mathscr{E}'_{n\text{рел}})^2.$$

Напомним, что здесь $\mathscr{E}'_{1\text{рел}}, \mathscr{E}'_{2\text{рел}}, \ldots$ представляют полные (релятивистские) энергии образовавшихся частиц в системе центра масс. В общем случае частицы движутся относительно друг друга. Если же относительного движения частиц не возникает, то $\mathscr{E}_{1\text{рел}}$ будет минимальной релятивистской энергией частицы 1, при которой может начаться рассматриваемая реакция. Иными словами, $\mathscr{E}_{1\text{рел}}$ и будет порогом реакции, если в порог включить и энергию покоя частицы 1. Таким образом, значение порога найдется из предыдущего уравнения, если потребовать, чтобы в нем все величины $\mathscr{E}'_{1\text{рел}}, \mathscr{E}'_{2\text{рел}}, \ldots$ не содержали кинетических энергий, а являлись только энергиями покоя частиц, получающихся в результате реакции. Это дает

$$(\mathscr{E}_{1\text{рел}} + m_2c^2)^2 - \mathbf{p}^2_{1\text{рел}}c^2 = (m'_1 + m'_2 + \ldots + m'_n)^2c^4,$$

или, ввиду соотношения $\mathscr{E}^2_{1\text{рел}} - \mathbf{p}^2_{1\text{рел}}c^2 = \text{Inv} = (m_1c^2)^2$,

$$2\mathscr{E}_{1\text{рел}}m_2 + (m_1^2 + m_2^2)c^2 = (m'_1 + m'_2 + \ldots + m'_n)^2c^2.$$

Исключим теперь из величины $\mathscr{E}_{1\text{рел}}$ энергию покоя налетающей частицы m_1c^2. Тогда останется только кинетическая энергия этой частицы, которая и представляет собой пороговую энергию в обычном смысле

этого слова: $\mathscr{E}_{\text{пор}} \equiv \mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_{1\text{рел}} - m_1c^2$. В результате простых преобразований получим

$$\mathscr{E}_{\text{пор}} = \frac{(m_1' + m_2' + \ldots + m_n' + m_1 + m_2)(m_1' + m_2' + \ldots - m_1 - m_2)c^2}{2m_2}. \tag{88.7}$$

Но

$$Q_{\text{энд}} = (m_1' + m_2' + \ldots + m_n' - m_1 - m_2)c^2, \tag{88.8}$$

так что

$$\mathscr{E}_{\text{пор}} = Q_{\text{энд}}\left(1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{Q_{\text{энд}}}{2m_2c^2}\right) \quad \text{(релятив.)}. \tag{88.9}$$

4. Эта формула упрощается в нерелятивистском приближении, когда $Q_{\text{энд}} \ll m_2c^2$. А в химии, хотя формула (88.8) и остается справедливой, проверить ее не удается из-за недостаточной точности измерения масс. В ядерной физике такая проверка не составляет особых затруднений, но все же в случае обычных ядерных реакций энергия $Q_{\text{энд}}$ мала по сравнению с энергией покоя мишени. Этим как раз и характеризуется нерелятивистский случай. Тогда квадратичным по $Q_{\text{энд}}$ членом в (88.9) можно пренебречь и получить

$$\mathscr{E}_{\text{пор}} = Q_{\text{энд}}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \quad \text{(нерелятив.)}. \tag{88.10}$$

Разумеется, это приближение проще получить непосредственно из нерелятивистской механики, что и рекомендуется сделать читателю. Когда $m_1 \ll m_2$, то в нерелятивистском случае $\mathscr{E}_{\text{пор}} = Q_{\text{энд}}$. Это и понятно, так как в этом случае можно считать, что центр масс все время совпадает с центром второй частицы, т. е. остается неподвижным.

В ядерной физике обычно можно ограничиться нерелятивистской формулой (88.10). Но в процессах с участием ультрарелятивистских частиц, как правило, надо применять релятивистские формулы (88.7) и (88.9). Например, в случае расщепления атомного ядра под действием γ-кванта высокой энергии формула (88.9) переходит в

$$\mathscr{E}_{\text{пор}} = Q_{\text{энд}}\left(1 + \frac{Q_{\text{энд}}}{2m_2c^2}\right).$$

5. Рассмотрим теперь несколько примеров на применение релятивистских формул (88.7)–(88.9).

Пример 1. Рождение пары нуклон–антинуклон (например, нейтрон–антинейтрон) при столкновении двух протонов:

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{n} + \overline{\mathrm{n}}. \tag{88.11}$$

В этом случае массы покоя всех частиц одинаковы (938 МэВ, если пренебречь различием масс протона и нейтрона) и формулы (88.7)

и (88.8) дают

$$\mathscr{E}_{\text{пор}} = \frac{6m_{\text{p}} \cdot 2m_{\text{p}}}{2m_{\text{p}}}\, c^2 = 6m_{\text{p}}c^2 = 5{,}63 \text{ ГэВ},$$

$$Q_{\text{энд}} = 2m_{\text{p}}c^2 = 1{,}88 \text{ ГэВ}.$$

Таким образом, порог этой эндотермической реакции в три раза превышает энергию $Q_{\text{энд}}$.

Пример 2. Пусть теперь в результате столкновения двух протонов рождается N нуклон–антинуклонных пар. Тогда

$$\mathscr{E}_{\text{пор}} = 2(N+2)Nm_{\text{p}}c^2, \quad Q_{\text{энд}} = 2Nm_{\text{p}}c^2 = \mathscr{E}_{\text{пор}}/(N+2).$$

Если, например, $N = 3$, то $\mathscr{E}_{\text{пор}} = 5Q_{\text{энд}}$, так что только одна пятая пороговой энергии участвует в реакции. Остальные четыре пятых уносятся с движением центра масс частиц.

Пример 3. Рождение пары электрон–позитрон. Два γ-кванта одинаковой энергии распространяются навстречу друг другу и взаимодействуют, в результате чего образуется пара электрон–позитрон:

$$\gamma + \gamma \to \text{e}^- + \text{e}^+. \tag{88.12}$$

В этом случае $m_1 = m_2 = 0$. Формулами (88.7) и (88.9) пользоваться нельзя, так как они предполагают, что частица 2 перед столкновением покоится, что для γ-кванта невозможно. Но формулой (88.8), конечно, пользоваться можно. Полагая в ней $m_1' = m_2' = m_{\text{e}}$, получим $Q_{\text{энд}} = 2m_{\text{e}}c^2$, что очевидно и без вычислений. Величина $Q_{\text{энд}}$ в рассматриваемом случае одновременно является и порогом реакции, если, конечно, порог определять в системе центра масс.

Пример 4. Фоторождение пиона на протоне:

$$\gamma + \text{p} \to \text{n} + \pi^+. \tag{88.13}$$

В этом случае

$$m_1 = 0, \quad m_2 = m_1' = m_{\text{p}} = 938 \text{ МэВ},$$

$$m_2' = m_\pi = 140 \text{ МэВ} = 0{,}149 m_{\text{p}},$$

$$\mathscr{E}_{\text{пор}} = \frac{(m_{\text{p}} + m_\pi + m_{\text{p}})(m_{\text{p}} + m_\pi - m_{\text{p}})c^2}{2m_{\text{p}}} = 0{,}160 m_{\text{p}}c^2 = 150 \text{ МэВ} = 1{,}07 m_\pi c^2,$$

$$Q_{\text{энд}} = m_\pi c^2 = 140 \text{ МэВ}.$$

6. В ядерных реакциях действует закон сохранения электрического заряда, согласно которому алгебраическая сумма электрических зарядов частиц до реакции равна алгебраической сумме электрических зарядов частиц после реакции. Примером могут служить реакции (88.11)–(88.13). Наряду с этим законом в ядерной физике действует закон сохранения барионного заряда, аналогичный закону сохранения лептонного заряда (см. § 74, п. 10). В ядерных реакциях в узком смысле

при низких энергиях содержание этого закона сводится к тому, что суммарное число нуклонов не меняется в результате реакции. Но этот закон в расширенном смысле остается справедливым и при высоких энергиях, когда происходят превращения элементарных частиц (рождение античастиц). Хотя этот вопрос и выходит за рамки ядерной физики в узком смысле и рассматривается в физике элементарных частиц, мы считаем необходимым коротко остановиться на нем.

Под *барионами* понимают группу «тяжелых» элементарных частиц с полуцелым спином и массой не меньше массы протона. К ним относятся протон и нейтрон, гипероны, часть резонансов и «очарованных» частиц и, возможно, некоторые другие частицы. Как и у большинства элементарных частиц, у барионов существуют античастицы, называемые *антибарионами.* Они отличаются от барионов знаком некоторых характеристик (например, знаком электрического заряда и магнитного момента). Единственным стабильным барионом является протон (а антибарионом — антипротон). Остальные барионы *нестабильны* и путем последовательных распадов превращаются в протон и легкие частицы (например, в свободном состоянии нейтрон — нестабильная частица, но он становится стабильным в связанном состоянии — внутри стабильных ядер). Барионы участвуют во всех известных фундаментальных взаимодействиях: сильном, электромагнитном, слабом и гравитационном.

Во всех наблюдавшихся процессах разность между числами барионов и антибарионов оставалась постоянной. Этому результату можно придать форму закона сохранения, напоминающего закон сохранения электрического заряда. Для этого условились каждой частице приписывать определенный *барионный заряд.* Его условились считать равным $+1$ для бариона, -1 для антибариона и нулю для всех остальных частиц. Тогда сформулированный выше результат принимает форму закона сохранения барионного заряда, согласно которому суммарный барионный заряд системы частиц при всех процессах, совершающихся в ней, остается постоянным. Одно из проявлений этого закона состоит в том, что рождение всякого антибариона обязательно должно сопровождаться рождением дополнительного бариона.

До 70-х годов считалось, что закон сохранения барионного заряда строго выполняется для всех типов фундаментальных взаимодействий. Однако в связи с созданием различных моделей единой теории поля (так называемого «великого объединения» слабого, электромагнитного и сильного взаимодействий) строгая справедливость этого закона поставлена под сомнение. В частности, допускается возможность распада протона, например, по каналу

$$\mathrm{p} \to \mathrm{e}^+ + \pi^0$$

со временем жизни τ в различных моделях от 10^{30} до 10^{32} лет, что примерно в 10^{20}–10^{22} раз превосходит возраст наблюдаемой части Вселенной (согласно экспериментальным данным $\tau > 10^{32}$ лет). Это предсказание требует еще экспериментальной проверки, трудность которой

состоит в исключительно большом значении ожидаемого времени жизни протона.

7. Отметим теперь существенное обстоятельство, связанное с законом сохранения и квантованием момента импульса при низких энергиях сталкивающихся частиц. Орбитальный момент относительного количества движения двух сталкивающихся частиц может принимать только целочисленные значения $l = 0, 1, 2, \ldots$ (в единицах $\hbar$). Это обстоятельство в связи с ограниченным радиусом действия ядерных сил приводит к заключению, что реакция между частицами возможна практически только при небольших значениях l. Оценку максимального значения числа l строго можно получить на основе последовательной квантовой механики. Не имея возможности сделать это, воспользуемся полуклассическими представлениями в духе теории Бора, а затем дополним их качественными соображениями квантовой механики.

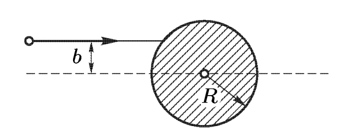


Рис. 157

Момент импульса частицы с импульсом p, налетающей на неподвижное ядро, равен pb, где b — прицельное расстояние (рис. 157). По классическим представлениям реакция может произойти только в тех случаях, когда b меньше радиуса действия ядерных сил: $b \leqslant R$, где R — радиус ядра, а потому $bp \leqslant Rp$ или $\hbar l \leqslant Rp$. Отсюда, вводя длину волны де Бройля, получаем

$$l \leqslant \frac{2\pi R}{\lambda} \approx \frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}}. \qquad (88.14)$$

Это и есть искомое ограничение. Оно существенно при больших значениях λ, т. е. при низких энергиях налетающей частицы.

С учетом волновых свойств частицы реакция в принципе возможна при любых значениях l, но вероятность реакции резко падает, если соотношение (88.14) не выполняется. Если полное сечение реакции представить в виде суммы $\sigma = \sum \sigma_l$, где σ_l — *парциальное сечение реакции*, т. е. сечение реакции, идущей при определенном значении l, то оказывается, что в случае электрически нейтральной частицы $\sigma_l \sim \sim (2l+1)p^{4l} \sim (2l+1)\mathscr{E}^{2l}$, т. е. при уменьшении энергии частицы $\mathscr{E}$ сечение σ_l убывает тем быстрее, чем больше l. Для электрически заряженных частиц это убывание происходит еще быстрее. В этих случаях в СЦМ (но не в ЛС) угловое распределение вылетающих частиц сферически-симметрично, т. е. частицы разлетаются по всем направлениям с одинаковой вероятностью.

8. О лептонных зарядах и законах их сохранения уже говорилось (§ 74, п. 10). О четности состояния и законе сохранения четности было сказано в § 69. Напомним здесь, что закон сохранения четности выполняется в сильных и электромагнитных взаимодействиях и нарушается в слабых. Для ядерной реакции a+A → b+B закон сохранения четности требует выполнения равенства

$$P_a P_A (-1)^{l_a A} = P_b P_B (-1)^{l_b B}, \qquad (88.15)$$

где P_a, P_A, P_b, P_B — внутренние четности взаимодействующих и образующихся частиц и ядер, а l_aA, l_bB — орбитальные угловые моменты частиц a и b в относительном движении около ядер A и B.

При упругом рассеянии состояния ядра и бомбардирующей его частицы не изменяются. У них может произойти только переориентация спинов, при которой четность сохраняется. Но тогда из (88.15) следует, что $(-1)^{l_aA} = (-1)^{l_bB}$, т. е. l может изменяться только на четное число (в пределах, допускаемых законом сохранения момента импульса).

§ 89. Составное ядро

1. Многие ядерные реакции при невысоких энергиях проходят через стадию образования так называемого *составного*, или *промежуточного*, *ядра*. Представление о составном ядре было введено в физику в 1936 г. Нильсом Бором. Он руководствовался следующими соображениями. Частица, проникшая внутрь ядра, как правило, сильно взаимодействует с его нуклонами — настолько сильно, что ее энергия взаимодействия с отдельным нуклоном обычно того же порядка, что и кинетическая энергия самой частицы. Поэтому весьма вероятен захват частицы ядром. Частица застревает в ядре, причем из-за взаимодействия с нуклонами ядра ее энергия уменьшается настолько, что она длительное время не может покинуть ядро. Более того, частица, попавшая в ядро, вообще теряет свою индивидуальность и действует как система новых нуклонов, присоединившихся к прежним нуклонам ядра. Из-за множества столкновений между нуклонами в поведении новых и прежних нуклонов принципиально пропадает всякое различие. С другой стороны, если первоначальная энергия влетевшей частицы не слишком велика, в системе не окажется нуклонов столь большой энергии, чтобы один или несколько из них немедленно покинули ядро. Задерживаясь в ядре на некоторое время, нуклоны образуют систему частиц, которую в течение этого времени можно рассматривать как связанную. Эта система и есть составное, или промежуточное, ядро.

Составное ядро возникает в возбужденном состоянии и стремится потерять энергию возбуждения за счет какого-либо возможного для него процесса. В принципе оно не отличается от радиоактивного ядра. Один из возможных механизмов радиоактивного превращения состоит в том, что энергия захваченной частицы, беспорядочно распределившаяся между нуклонами составного ядра, в результате флуктуационных процессов вновь сконцентрируется на одной из частиц. Тогда такая частица и вылетит из ядра. Не обязательно, чтобы это была та же частица, которая влетела в ядро. Она может быть и другой: протон, нейтрон, α-частица и пр. Возможны несколько каналов радиоактивного распада составного ядра.

2. Необходимо особо подчеркнуть, что говорить о возбужденном составном ядре имеет смысл только тогда, когда оно существует достаточно долго. «Достаточно долго», конечно, надо понимать не в макроскопическом, а в ядерном масштабе. Например, чтобы нейтрон со

скоростью 10^9 см/с пролетел через ядро, не испытав столкновений, для него требуется время порядка $10^{-13} : 10^9 \approx 10^{-22}$ с. Это и есть «ядерное время», которым надо пользоваться для суждения о длительности процессов, происходящих в атомном ядре. Если составное ядро живет в возбужденном состоянии 10^{-14} с, то в ядерном масштабе это время должно считаться «очень большим». Из-за короткодействующего характера ядерных сил за это время влетевший нейтрон успеет претерпеть в ядре более $10^{-14} : 10^{-22} \approx 10^8$ столкновений, чего с избытком достаточно, чтобы его движение в ядре приобрело запутанный характер, совершенно не зависящий от того, с какой скоростью и в каком направлении нейтрон влетел в исходное ядро. Таким образом, возникает система нуклонов, поведение которой совершенно не зависит от истории ее образования. В ядерном масштабе времени такая система ведет себя так, как если бы она существовала бесконечно долго. А это и есть необходимое условие того, чтобы такую систему можно было рассматривать как составное ядро.

Наряду с описанным процессом образования и распада составного ядра возможен и конкурирующий процесс. Это процесс *радиационного захвата.* В этом процессе ядро переходит в возбужденное состояние также в результате захвата какой-то частицы. Но в основное состояние оно возвращается путем испускания γ-кванта. Последний процесс происходит под действием уже электромагнитных сил, т. е. в ядерном масштабе по-прежнему достаточно «медленно». Поэтому и при радиационном захвате может также образоваться составное ядро.

Заслуживает внимания тот парадоксальный с точки зрения классической физики факт, что силы кулоновского отталкивания между протонами и другими положительно заряженными частицами ядра (например, между α-частицами) не способствуют, а препятствуют выходу этих частиц из ядра. Об этом факте уже говорилось (§ 73, п. 12) в связи с влиянием центробежного барьера на α-распад. Объяснение его состоит в том, что силам отталкивания соответствует положительная энергия. Она увеличивает высоту, а с ней и ширину кулоновского потенциального барьера. Выход же протона и всякой положительно заряженной частицы из ядра есть *подбарьерный процесс.* Он тем менее вероятен, чем выше и шире потенциальный барьер. Особенно существенно это обстоятельство проявляется в случае средних и тяжелых ядер.

3. Таким образом, процесс столкновения частицы a с ядром A разбивается на два этапа. На первом этапе частица a сближается с ядром A. Завершением этапа является образование составного ядра C^* в возбужденном состоянии. Схематически этот процесс можно изобразить так:

$$\mathrm{a} + \mathrm{A} \to \mathrm{C}^*. \qquad (89.1)$$

На втором этапе происходит распад составного ядра по схеме

$$\mathrm{C}^* \to \mathrm{b} + \mathrm{B}. \qquad (89.2)$$

Ядерная реакция в целом изображается схемой

$$\mathrm{a} + \mathrm{A} \to \mathrm{C}^* \to \mathrm{b} + \mathrm{B}. \tag{89.3}$$

Эффективное сечение σ_{ab} реакции (89.3) найдется, если эффективное сечение σ_{C^*} образования составного ядра умножить на вероятность W_{b} распада этого ядра по каналу b:

$$\sigma_{\mathrm{ab}} = \sigma_{\mathrm{C}^*} W_{\mathrm{b}}. \tag{89.4}$$

Если то же составное ядро распадается по другому каналу b' с вероятностью $W_{\mathrm{b}'}$, то $\sigma_{\mathrm{ab}'} = \sigma_{\mathrm{C}^*} W_{\mathrm{b}'}$. Исключение σ_{C^*} дает

$$\frac{\sigma_{\mathrm{ab}}}{\sigma_{\mathrm{ab}'}} = \frac{W_{\mathrm{b}}}{W_{\mathrm{b}'}}. \tag{89.5}$$

Пусть теперь такое же составное ядро C^* с той же энергией возбуждения образуется в результате столкновения других частиц m и M: $\mathrm{m} + \mathrm{M} \to \mathrm{C}^*$. Ввиду тождественности этого ядра с прежним оно будет распадаться по тем же каналам с образованием тех же частиц b и b$'$ и с прежними вероятностями W_{b} и $W_{\mathrm{b}'}$, а потому $\sigma_{\mathrm{mb}}/\sigma_{\mathrm{mb}'} = W_{\mathrm{b}}/W_{\mathrm{b}'}$. Таким образом,

$$\frac{\sigma_{\mathrm{ab}}}{\sigma_{\mathrm{ab}'}} = \frac{\sigma_{\mathrm{mb}}}{\sigma_{\mathrm{mb}'}}. \tag{89.6}$$

Выполнение такого соотношения является подтверждением того, что обе реакции, рассмотренные выше, идут с образованием составного ядра. Если же соотношение (89.6) не выполняется, то схема с образованием составного ядра либо не выполняется, либо составное ядро еще не совсем успело сформироваться.

4. Другой характерной особенностью ядерных реакций, идущих через составное ядро, при выполнении определенных условий является *симметрия в системе центра масс* углового распределения разлетающихся частиц, которые образуются при распаде составного ядра. Предположим, что результирующий спин составного ядра равен нулю. Тогда частицы, образующиеся при распаде составного ядра, в системе центра масс будут с одинаковой вероятностью разлетаться вперед и назад. (Направление «вперед» задается скоростью налетающей частицы.) Про такое угловое распределение говорят, что оно обладает *симметрией «вперед-назад»*. Для обоснования высказанного утверждения заметим, что первоначальная система из-за наличия импульсов и угловых моментов у налетающей частицы и исходного ядра симметрией «вперед-назад» не обладает. Но такая симметрия появится в процессе формирования составного ядра. В самом деле, в системе центра масс результирующий импульс исходной системы равен нулю. При формировании составного ядра не только сохранится равенство нулю полного импульса, но и произойдет хаотическое распределение импульсов отдельных нуклонов по направлениям в пространстве. То же самое относится и к их спинам, так как по предположению спин составного ядра равен нулю. Остается только орбитальный момент импульса частиц. Но в системе центра масс он перпендикулярен к импульсу налетающей частицы. При формировании составного ядра он, конечно, сохранится,

но хаотически перераспределится между нуклонами составного ядра. Получится составное ядро, обладающее симметрией «вперед-назад». Естественно, что такая симметрия сохранится и при распаде составного ядра.

§ 90. Ядерные реакции, идущие через составное ядро

1. Энергетический спектр составного ядра — непрерывный. Действительно, пусть составное ядро образуется от слияния частицы а и другого ядра А. В начальном состоянии частица а и исходное ядро А бесконечно далеко удалены друг от друга. Движение такой системы двух частиц *инфинитно*, а потому ее полная энергия положительна и не должна квантоваться. Следовательно, она не будет квантоваться и после того, как частица проникнет в ядро, так как энергия сохраняется. Таким образом, энергия возбуждения составного ядра, вообще говоря, превышает энергию, которую необходимо затратить для удаления из ядра хотя бы одной частицы типа а.

Но если вероятность распада составного ядра достаточно мала, то имеет смысл говорить о почти стационарных, или *квазистационарных, состояниях* его, в которых оно длительное время совершает движение в ограниченной области пространства. Такое движение в течение ограниченного времени приближенно можно рассматривать как финитное. Время τ, в течение которого это движение допустимо, называется *временем жизни составного ядра.* Вероятность распада W ядра в единицу времени связана с τ соотношением $W = 1/\tau$. Для таких составных ядер приближенно можно говорить о *квазистационарных состояниях* и соответствующих им *квазистационарных уровнях энергии.* Но каждый квазистационарный уровень характеризуется не только энергией, но и определенной шириной Γ, которая может быть определена с помощью соотношения неопределенностей

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}. \tag{90.1}$$

Таким образом, энергетический спектр составного ядра состоит из ряда дискретных полос конечной ширины. Строго говоря, такова же структура энергетического спектра и всякого радиоактивного ядра. Только радиоактивное ядро живет настолько долго, что вероятность его распада ничтожна, так что обычно нет надобности отличать квазистационарные уровни энергии от стационарных.

2. Применим изложенные соображения к вопросу об эффективном сечении ядерных реакций, предполагая для простоты, что налетающая частица электрически нейтральна. Главнейшими из таких частиц являются нейтроны. Для них, в отличие от положительно заряженных частиц, не существует кулоновского потенциального барьера, а потому они легко могут проникать в ядро и вызывать ядерные превращения. Подробнее ядерные реакции под действием нейтронов будут рассмотрены в гл. XIV. Сейчас же мы ограничимся кратким рассмотрением

вопроса о зависимости эффективного сечения реакции от скорости налетающего нейтрона. Последовательное и строгое решение этого вопроса (насколько в теории ядра вообще можно говорить о строгости) возможно лишь с использованием вычислительных методов квантовой механики, что в общем курсе физики сделать невозможно. Поэтому мы должны ограничиться лишь качественными, и нестрогими соображениями, а многие результаты привести вообще без обоснования.

3. Предположим, что кинетическая энергия нейтрона мала, так что энергия возникающего составного ядра значительно меньше энергии его первого возбужденного уровня. Этим исключаются резонансные явления в ядерных реакциях, о которых говорится ниже. Кроме того, предположим, что энергия нейтрона настолько мала, что длина волны де Бройля $\lambda\!\!\!^{-}$ значительно больше размеров ядра. Вероятность проникновения нейтрона в ядро, а с ней и среднее число актов распада N составного ядра в единицу времени пропорциональны $|\psi|^2$, где ψ — волна де Бройля для падающего нейтрона: $N \infty |\psi|^2$. С другой стороны, средний поток нейтронов на ядро $I \infty v|\psi|^2$, где v — средняя скорость нейтронов. Эти величины не зависят от длины волны де Бройля (а значит и от скорости v, так как последняя предполагается бесконечно-большой по сравнению с размерами ядра. На основании определения эффективного сечения

$$\sigma = \frac{N}{I} \sim \frac{1}{v}. \tag{90.2}$$

Зависимость (90.2) носит название закона $1/v$. Ее происхождение легко понять и из других физических соображений: при уменьшении скорости нейтрона увеличивается время взаимодействия его с ядром, а это увеличивает вероятность захвата нейтрона ядром. Закон (90.2) имеет исключительно важное значение в ядерной энергетике и объясняет, почему в ядерных реакторах требуется замедление нейтронов (см. § 95).

4. Теперь рассмотрим случай, когда суммарная энергия $\mathscr{E}$ нейтрона и исходного ядра лежит в области расположения энергетических полос составного ядра. Согласно квантовой механике, если $\mathscr{E}$ равна энергии одного из квазистационарных уровней составного ядра, то вероятность образования последнего особенно велика. Сечение ядерных реакций при таких энергиях частиц резко возрастает, образуя так называемые *резонансные максимумы.* В этих случаях ядерные реакции называются *резонансными.* Вблизи резонансного уровня сечение реакции описывается зависимостью, напоминающей дисперсионную формулу оптики вблизи линии поглощения. Эта формула была получена в 1936 г. Брейтом (р. 1899) и Вигнером (р. 1902) и носит их имя.

Ограничимся случаем медленных нейтронов, когда достаточно учитывать лишь частицы с орбитальным моментом $l = 0$ (т. е. в s-состоянии). Кроме того, предположим, что на значение эффективного сечения оказывает заметное влияние только один резонансный уровень. Тогда для реакции A(n, b)B формула Брейта–Вигнера может быть

записана в виде

$$\sigma_{\mathrm{nb}} = \pi \lambda_{\mathrm{n}}^2 g \frac{\Gamma_{\mathrm{n}} \Gamma_{\mathrm{b}}}{(\mathscr{E} - \mathscr{E}_0)^2 + \Gamma^2/4}, \tag{90.3}$$

где $\mathscr{E}_0$ — энергия резонансного уровня, а λ_{n} — длина волны налетающего нейтрона. Величина Γ в знаменателе есть *полная ширина уровня*, равная сумме ширин уровней по всем возможным входным и выходным каналам реакции. В частном случае одного входного и одного выходного каналов $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{n}} + \Gamma_{\mathrm{b}}$, где Γ_{b} соответствует поглощению нейтрона, т. е. испусканию частицы b, а Γ_{n} — упругому рассеянию нейтрона. Статистический весовой множитель g учитывает возможные ориентации моментов импульса частиц до столкновения и частиц, образовавшихся после столкновения. При этом предполагается, что нейтрон и исходное ядро A линейно поляризованы, т. е. их спины имеют определенные направления.

Для вычисления весового множителя g предположим, что налетающий нейтрон и ядро A не поляризованы, а их спины $\mathbf{I}_{\mathrm{n}}$ и $\mathbf{I}_{\mathrm{A}}$ ориентированы хаотически. Тогда существуют $2I_{\mathrm{n}} + 1$ возможных ориентаций нейтрона и $2I_{\mathrm{A}} + 1$ ориентаций ядра — всего $(2I_{\mathrm{n}} + 1)(2I_{\mathrm{A}} + 1)$ исходных состояний. В результате столкновения получится составное ядро со спином $\mathbf{I}$, которому соответствует $2I + 1$ возможных ориентаций. Если все эти ориентации равновероятны, то каждой паре линейно поляризованных нейтрона n и ядра A соответствует в среднем сечение, в g раз меньшее, чем в случае отсутствия поляризации. Таким образом,

$$g = \frac{2I + 1}{(2I_{\mathrm{n}} + 1)(2I_{\mathrm{A}} + 1)}. \tag{90.4}$$

Если числитель и знаменатель формулы (90.3) умножить и разделить на Γ, то эта формула приводится к виду (89.4), где

$$\sigma_{\mathrm{C}} = \pi \lambda_{\mathrm{n}}^2 g \frac{\Gamma_{\mathrm{n}} \Gamma}{(\mathscr{E} - \mathscr{E}_0)^2 + \Gamma^2/4}, \tag{90.5}$$

так как, очевидно, вероятность распада составного ядра по каналу b равна

$$W_{\mathrm{b}} = \frac{\Gamma_{\mathrm{b}}}{\Gamma}. \tag{90.6}$$

Следовательно, эффективное сечение образования составного ядра будет определяться выражением (90.5).

Так как спин нейтрона $I_{\mathrm{n}} = 1/2$, то $(2I_{\mathrm{n}} + 1) = 2$. В этом случае для спина составного ядра могут получиться только два значения: либо $I = I_{\mathrm{A}} + 1/2$, либо $I = I_{\mathrm{A}} - 1/2$.

При захвате медленного нейтрона возможны различные эффекты. Наиболее вероятным является испускание нейтрона (рассеяние) или γ-кванта (радиационный захват нейтрона). Возможны и другие процессы: например, ^{14}N при захвате нейтрона может испустить протон, а ^{10}B и ^{6}Li — α-частицу. Наиболее тяжелые ядра при захвате медленного нейтрона могут испытать деление. Как уже неоднократно говорилось, малая вероятность испускания заряженной частицы (α-частицы или

протона) в результате захвата медленного нейтрона связана с тем, что при вылете из ядра положительная частица должна преодолеть кулоновский потенциальный барьер. Поэтому вылет заряженных частиц при захвате медленных нейтронов в подавляющем большинстве случаев наблюдается лишь для самых легких ядер (^{10}B, ^{6}Li). Для большинства тяжелых ядер захват нейтронов сопровождается γ-излучением, а при захвате нейтронов легкими ядрами наиболее вероятным оказывается вылет из ядра нейтронов же, т. е. осуществляется реакция упругого рассеяния нейтронов. Резонансное сечение захвата тепловых нейтронов может в 10^5–10^6 раз превосходить πR^2.

5. Зависимость эффективного сечения σ_{nb} от скорости v налетающего нейтрона определяется не только резонансным знаменателем $(\mathscr{E}-\mathscr{E}_0)^2+\Gamma^2/4$ в формуле (90.3), но и числителем $\Gamma_{\mathrm{n}}\Gamma_{\mathrm{b}}$. Когда энергия $\mathscr{E}$ составного ядра очень близка к $\mathscr{E}_0$, основное значение имеет резонансный знаменатель. При $|\mathscr{E}-\mathscr{E}_0|<\Gamma/2$ слагаемым $(\mathscr{E}-\mathscr{E}_0)^2$ можно пренебречь. Тогда по формуле (90.3) $\sigma_{\mathrm{nb}}=4\pi\lambda\!\!\!^{-2}g\Gamma_{\mathrm{n}}\Gamma_{\mathrm{b}}/\Gamma^2$, т. е. в сечении σ_{nb} возникает резкий максимум. Такие резкие максимумы для медленных нейтронов могут во много раз (например, в тысячи) превосходить геометрическое сечение ядра πR^2. Напротив, когда $\mathscr{E}\ll$ $\ll\mathscr{E}_0$, что имеет место для очень медленных нейтронов, знаменатель в формуле (90.3) меняется со скоростью мало, и этим изменением можно пренебречь. Можно также не учитывать зависимость Γ_{b} от v, так как Γ_{b} определяется только вероятностью распада самого составного ядра. Зависимость эффективного сечения от v определяется только множителями $\lambda\!\!\!^{-}{}_{\mathrm{n}}^2$ и Γ_{n}, а именно $\sigma_{\mathrm{nb}}\propto\lambda\!\!\!^{-}{}_{\mathrm{n}}^2\Gamma_{\mathrm{n}}$. Но $\Gamma_{\mathrm{n}}=\hbar/\tau$, а время τ, в течение которого нейтрон проникает в поле ядра, пропорционально v, так что $\Gamma_{\mathrm{n}}\propto v$. Кроме того, $\lambda\!\!\!^{-}{}_{\mathrm{n}}\propto 1/v$. Поэтому $\sigma_{\mathrm{nb}}\propto(1/v)^2v\sim 1/v$. Это — закон (90.2), полученный выше другим путем. Как правило, он оправдывается для нейтронов, энергии которых лежат в интервале от 1/40 эВ (тепловые нейтроны) до 1 эВ. Впрочем, для легких ядер (He, Li, B), у которых первый резонансный уровень расположен высоко, зависимость (90.2) остается справедливой и при энергиях вплоть до нескольких сотен электронвольт.

6. Теперь рассмотрим качественно нерезонансные реакции, попрежнему идущие через составное ядро. Они возникают, например, тогда, когда налетающая частица сообщает ядру высокую энергию возбуждения, так что его энергетические уровни перекрываются. В этих случаях говорить об отдельных резонансных уровнях уже не приходится. Но представление о составном ядре можно дополнить статистическими соображениями. В результате получится *статистическая теория ядерных реакций*, или *модель испарения*. Частица, попавшая в ядро, быстро теряет свою энергию, передавая ее всем нуклонам ядра. Возникает равновесное внутреннее состояние ядра, аналогичное термодинамическому равновесию макроскопической системы. Можно даже для характеристики такого состояния ввести некоторую величину, подобную обычной термодинамической температуре. В течение некоторого времени — времени жизни составного ядра — энергии каждого

нуклона недостаточно для вылета из ядра, хотя ядро в целом сильно возбуждено. Наконец, по истечении некоторого времени возникает какая-то большая флуктуация, в результате которой один из нуклонов (обычно нейтрон) получает энергию, достаточную для «испарения» из ядра. Затем может испариться другой нуклон, и т. д.

Следует ожидать, что в модели испарения составного ядра угловое распределение частиц, образующихся после распада составного ядра, в системе центра масс должно быть сферически-симметричным, а не только обладать симметрией «вперед-назад». Это должно происходить потому, что сферически-симметрично само составное ядро, поскольку его симметрия устанавливается в процессе достижения термодинамического равновесия. На самом деле, как показывает опыт, угловое распределение, как правило, содержит анизотропную часть, не обладающую даже симметрией «вперед-назад»: обычно бо́льшая часть частиц летит вперед. Следует ожидать также, что в модели испарения процентная доля частиц, образующихся при распаде составного ядра по определенному каналу, не должна зависеть от способа образования составного ядра, так как в процессе установления термодинамического равновесия ядро совершенно «забывает» о способе своего образования. Эта закономерность обычно выполняется тоже лишь приближенно. Наконец, распределение по энергиям вылетающих частиц не полностью согласуется с тем, что предсказывает модель испарения. Напомним еще, что и в случае резонансных ядерных реакций, идущих через составное ядро, наблюдаются некоторые расхождения с опытом. Это свидетельствует о том, что помимо реакций, идущих через составное ядро, имеются и другие существенные механизмы ядерных реакций.

§ 91. Дополнительные сведения о ядерных реакциях

1. Помимо ядерных реакций, идущих через составное ядро, существуют *прямые ядерные реакции.* В таких реакциях энергия, вносимая в ядро, передается преимущественно одному или небольшой группе нуклонов, которые и покидают ядро. Прямые ядерные реакции могут вызываться всевозможными налетающими частицами — от γ-квантов до многозарядных ионов во всем доступном диапазоне энергий (до нескольких гигаэлектронвольт и выше). Первые из таких реакций были открыты в начале 50-х годов. Это были *реакции срыва* (d, p) и (d, n), а также *реакции подхвата* (p, d) и (n, d) при взаимодействии дейтронов с легкими ядрами. В реакции срыва (d, p), например, налетающий дейтрон, взаимодействуя с одним или несколькими периферийными нуклонами ядра, лишается своего нейтрона, который остается в ядре, а протон продолжает лететь дальше. Напротив, в реакции подхвата (p, d) налетающий протон уносит один из периферийных нейтронов, так что из ядра вылетает дейтрон. Образующиеся в этих реакциях протон и дейтрон вылетают в основном вперед (т. е. в направлении пучка налетающих частиц).

Известны прямые ядерные реакции, в которых нуклон (или группа нуклонов) переходит от одного из сталкивающихся ядер к другому (*реакции передачи*), прямые реакции квазиупругого рассеяния, например (p, 2p), реакции выбивания из ядра дейтронов, например (p, pd), и т. д. Все прямые ядерные реакции характеризуются сильной угловой анизотропией вылета частиц и сравнительно слабой зависимостью сечения σ от энергии налетающей частицы. Ядро, остающееся в результате прямой ядерной реакции, находится, как правило, либо в основном, либо в слабовозбужденном состоянии.

Особенности прямых ядерных реакций можно понять, если предположить, что вылетающая из ядра частица получает энергию и импульс в результате взаимодействия непосредственно с налетающей частицей. Надо также предположить, что такие процессы происходят на периферии атомного ядра. Это уже предполагалось, когда выше говорилось о реакциях срыва и подхвата. На периферии ядра плотность нуклонов заметно меньше, чем в центре, так что нуклон (или группа нуклонов), получив энергию и импульс от влетевшей частицы, может со значительной вероятностью покинуть ядро. Толщина периферического слоя ядра порядка 1 ферми, а радиус тяжелого ядра — 10 ферми. Поэтому относительная вероятность прямой ядерной реакции для тяжелого ядра должна быть около 10 % (у легких ядер она больше), что подтверждается опытом.

2. При низких энергиях налетающих частиц основным механизмом ядерных реакций является образование составного ядра (за исключением ядерных реакций с дейтронами). Если энергия возбуждения составного ядра меньше энергии отделения от него нуклона или системы нуклонов, то единственным способом его распада является испускание γ-квантов (радиационный захват). Если же нуклоны или частицы, образованные из них, могут вылетать из ядра, то этот вылет может происходить еще до того, как сформируется равновесное составное ядро (так называемый *предравновесный распад*). При больших энергиях налетающих частиц преобладают прямые процессы.

Если энергия налетающей частицы превышает 100 МэВ, то представления Бора о составном ядре перестают оправдываться. Влетая в ядро и сталкиваясь с его нуклонами, частица высокой энергии не успевает потерять всю свою энергию, так как число столкновений ее с нуклонами может оказаться для этого недостаточным. Частица вылетает из ядра, потеряв лишь часть своей энергии. Ядерная реакция при больших энергиях обычно (но не всегда) проходит через две стадии. Сначала частица выбивает из ядра несколько быстрых нуклонов, энергия и угловое распределение которых зависят от энергии налетающей частицы и параметров столкновения. Часть вторичных нуклонов в течение некоторого времени совершает запутанное движение внутри ядра, в результате чего образуется составное ядро, сильно отличающееся от ядра-мишени. На второй стадии происходит распад составного ядра с вылетом из него нуклонов, групп нуклонов или элементарных частиц — пионов, каонов, гиперонов и пр. При очень высоких энергиях налетающих частиц (несколько сотен мегаэлектронвольт и выше) могут

происходить «взрывы» ядер, в результате которых ядро разваливается на несколько более мелких осколков. Такой взрыв оставляет в фотоэмульсиях или пузырьковых камерах треки, образующие многолучевую «звезду». Соответствующие процессы называются *процессами с образованием звезд.*

Время протекания прямых ядерных реакций — это время, необходимое частице, чтобы пролететь область пространства, заполненную ядром (порядка 10^{-22} с), тогда как среднее время жизни составного ядра много больше (порядка 10^{-14}–10^{-16} с).

3. Эффективное сечение прямой ядерной реакции $\sigma(\mathscr{E})$ зависит от энергии $\mathscr{E}$ монотонно, тогда как для реакций, идущих через составное ядро, как мы видели, наблюдаются резонансные максимумы. Резонансные максимумы энергии составного ядра налагаются друг на друга и энергетический спектр приобретает сплошной характер, когда энергия налетающей частицы достаточно велика (1 МэВ и выше). В этих случаях ход поперечного сечения реакции в зависимости от энергии достаточно удовлетворительно передается так называемой *оптической моделью ядра.* В оптической модели ядро рассматривается как сплошная среда, преломляющая и поглощающая волны де Бройля падающих на него частиц. Тем самым задача многих тел формально сводится к задаче о движении одной частицы в заданном силовом поле.

Свойства ядра в оптической модели по аналогии с оптикой характеризуются *показателем преломления.* Для учета поглощения волн де Бройля этот показатель считается комплексным и выражается через гамильтониан взаимодействия налетающей частицы с ядром, который также выбирается комплексным. Для согласования с опытными данными наряду с объемным поглощением ядра вводится еще *поверхностное поглощение.* Предельным частным случаем оптической модели является *модель черного ядра.* Она характеризуется тем, что всякая частица, упавшая на ядро, поглощается последним. Однако для согласования с опытом в случае больших энергий падающих частиц черное ядро приходится считать частично прозрачным.

Недостаток оптической модели состоит в том, что все параметры ядра — комплексный показатель преломления, комплексный гамильтониан, поверхностное поглощение, прозрачность черного ядра — подбираются эмпирически и вводятся искусственно для описания некоторых свойств ядер, а не получаются из какой-то последовательной физической теории ядра. Но этот недостаток присущ всякой искусственно вводимой модели, а не только оптической модели ядра.

4. Остановимся на некоторых особенностях ядерных реакций, отличающихся различной природой бомбардирующих частиц. Сюда относятся ядерные реакции под действием нейтронов, протонов, дейтронов, α-частиц, многозарядных (тяжелых) ионов, γ-квантов.

Реакции под действием нейтронов, протонов и α-частиц во многих отношениях сходны между собой. Причина этого — в одинаковости механизма этих реакций: в большинстве случаев все они идут с образованием и последующим распадом составного ядра. Различие же

между ними в основном связано с различием зарядов бомбардирующих частиц. Оно сказывается на проницаемости кулоновского барьера, когда бомбардирующая частица находится за пределами ядра, и становится мало существенным для последующего распада образовавшегося составного ядра, когда начинают действовать ядерные силы, определяющие механизм реакции.

Сечения ядерных реакций, обусловленные захватом α-частиц малой (около 1 кэВ) и средней (от 1 кэВ до 1 МэВ) энергий, ничтожно малы даже при взаимодействии с легкими ядрами и быстро возрастают с увеличением энергии. Под действием α-частиц идут преимущественно реакции типа (α, p) и (α, n). Альфа-частицы, возникающие при радиоактивных распадах, могут вызывать реакции только на легких ядрах ($A \lesssim 50$), для которых высота кулоновского потенциального барьера порядка 10 МэВ, причем вероятность реакции (α, n) больше, чем реакции (α, p), так как испусканию протонов препятствует кулоновский потенциальный барьер, а для нейтронов такого барьера нет. В случае тяжелых ядер ($A \gtrsim 100$) высота кулоновского барьера для α-частиц около 25 МэВ. Когда энергия α-частицы превышает это значение, реакции типа (α, p) и (α, n) идут практически с одинаковой вероятностью. При реакциях типа (α, p), как правило, образуются стабильные ядра, а при реакциях типа (α, n) — радиоактивные. Примером реакции типа (α, n) может служить реакция

$$^9_4\mathrm{Be} + ^4_2\mathrm{He} \to ^{12}_6\mathrm{C} + ^1_0\mathrm{n} + 5{,}6\ \text{МэВ},$$

до настоящего времени широко используемая в качестве простейшего источника нейтронов (см. § 85).

Реакции, идущие с вылетом заряженных частиц, в сильной степени зависят от прозрачности кулоновского барьера. По этой причине поглощение медленных нейтронов приводит к испусканию либо γ-квантов (радиационный захват), либо нейтронов первоначальной энергии (упругое рассеяние). Исключение составляют только самые легкие ядра. Но и на самых легких ядрах при малых энергиях падающих частиц ядерные реакции с испусканием заряженных частиц наблюдаются очень редко. У самых тяжелых ядер (например, у ^{235}U) возможен также процесс деления. Таким образом, в области малых энергий основной вклад в полную ширину уровня Γ вносят радиационная Γ_γ и нейтронная Γ_n ширины. Остальные ширины пренебрежимо малы.

5. В соответствии с формулой (89.4) сечения радиационного захвата $\sigma_{\mathrm{n}\gamma}$ и упругого рассеяния σ_nn можно представить в виде

$$\sigma_{\mathrm{n}\gamma} = \frac{\sigma_\mathrm{n}\Gamma_\gamma}{\Gamma_\gamma + \Gamma_\mathrm{n}}, \tag{91.1}$$

$$\sigma_\mathrm{nn} = \frac{\sigma_\mathrm{n}\Gamma_\mathrm{n}}{\Gamma_\gamma + \Gamma_\mathrm{n}}, \tag{91.2}$$

где $\sigma_{\rm n}$ — сечение образования составного ядра при захвате нейтрона. Следовательно,

$$\frac{\sigma_{\rm n\gamma}}{\sigma_{\rm nn}} = \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_{\rm n}}. \qquad (91.3)$$

У тяжелых ($A > 100$) ядер $\Gamma_\gamma > \Gamma_{\rm n}$. Следовательно, поглощение медленных нейтронов тяжелыми ядрами в основном приводит к испусканию γ-квантов. Однако с увеличением энергии падающей частицы увеличивается и энергия возбуждения составного ядра. Это ведет к увеличению нейтронной ширины $\Gamma_{\rm n}$. При энергии падающего нейтрона 1–10 кэВ $\Gamma_{\rm n}$ начинает превосходить Γ_γ. При переходе к еще большим энергиям падающей частицы упругое рассеяние нейтронов начинает преобладать над радиационным захватом даже у тяжелых ядер. Для относительно легких ядер ($A \approx 50$) и энергии падающих нейтронов порядка 100 эВ $\Gamma_{\rm n}$ достигает величины порядка нескольких электронвольт и оказывается больше Γ_γ.

Поглощение нейтронов ядрами ${}^{10}_{5}\rm B$ в широком диапазоне энергий (вплоть до 10 кэВ) следует закону $1/v$. Сечение реакции ${}^{10}_{5}{\rm B}({\rm n},\,\alpha){}^{7}_{3}{\rm Li}$ примерно в 10^5 раз превосходит сечение радиационного захвата нейтрона. Столь большая вероятность испускания заряженной α-частицы связана с тем, что захват нейтрона ядром сопровождается выделением энергии, значительная часть которой (1,77 МэВ) уносится α-частицей. Поэтому кулоновский барьер не оказывает α-частице серьезного препятствия для вылета из ядра. Следует отметить, что рассматриваемая реакция включает в себя своеобразное деление составного ядра ${}^{11}_{5}\rm B$ на два осколка (${}^{4}_{2}\rm He$ и ${}^{7}_{3}\rm Li$).

6. При больших энергиях падающих нейтронов становится возможным неупругое рассеяние (n, n′), при котором конечное ядро получается не в основном, а в одном из возбужденных состояний. В этом случае оказывается, что $\Gamma_{\rm n}$ значительно превышает все остальные ширины $\Gamma_{\rm p}, \Gamma_\gamma, \Gamma_\alpha$ и т. д., так что $\Gamma \approx \Gamma_{\rm n}$. Поэтому сильно возбужденное ядро с подавляющей вероятностью переходит в основное состояние с испусканием нейтронов, а вероятности реакций (n, p), (n, α), ... незначительны. Если бы эти последние реакции шли через составное ядро, то следовало бы ожидать, что их сечения должны представляться выражениями

$$\sigma_{\rm np} \approx \frac{\pi R^2 \Gamma_{\rm p}}{\Gamma}, \quad \sigma_{\rm n\alpha} \approx \frac{\pi R^2 \Gamma_\alpha}{\Gamma}.$$

А так как $\Gamma_{\rm p} \ll \Gamma$, $\Gamma_\alpha \ll \Gamma$ и т. д., то сечения этих реакций должны были бы быть значительно меньше геометрического сечения πR^2. Этот вывод не подтверждается опытом. Измерения для большого числа ядер по неупругому рассеянию нейтронов с энергией 14 МэВ показали, что действительные сечения во много раз превышают те, которые следует ожидать согласно модели составного ядра. Значит, рассматриваемые реакции, по крайней мере в значительной части, идут не через составное ядро, а являются реакциями прямого взаимодействия. Это может

служить иллюстрацией того, что было сказано в начале настоящего параграфа.

7. Под действием протонов идут реакции (p, α), (p, n), (p, p), (p, γ) и с меньшей вероятностью — (p, d). Реакции (p, α) обычно экзотермические и идут преимущественно на легких ядрах, так как выход α-частиц из тяжелых ядер сильно затруднен кулоновским барьером. Напротив, реакции типа (p, n), как правило, эндотермические и обладают порогом 1–3 МэВ. В результате таких реакций заряд ядра увеличивается на единицу, а потому оно становится β^+- или K$^+$-активным. Примером могут служить реакции

$$ {}^7_3\mathrm{Li} + {}^1_1\mathrm{p} \to {}^7_4\mathrm{Be} + {}^1_0\mathrm{n}, \quad {}^7_4\mathrm{Be} \to {}^7_3\mathrm{Li} + \mathrm{e}^+ + \nu. $$

Реакции (p, p) при энергии падающих протонов, превышающих высоту кулоновского барьера, идут примерно с той же вероятностью, что и реакции (p, n). Реакции типа (p, γ) обычно характеризуются меньшим выходом, так как Γ_γ меньше Γ_i для всех других частиц ($i = \alpha$, n, p); такие реакции приобретают большое значение только в тех случаях, когда вылет частицы i из ядра почему-либо затруднен. Реакции типа (p, d), как правило, эндотермические. Они встречаются реже остальных, так как дейтрон — слабо связанное ядро. Энергия связи дейтрона равна 2,23 МэВ, и нуклоны в дейтроне находятся на довольно большом расстоянии друг от друга (порядка $4 \cdot 10^{-13}$ см).

Таким образом, дейтрон представляет собой сравнительно «рыхлое» ядро, и эта рыхлость проявляется также в реакциях под действием дейтронов, когда энергия падающей частицы составляет несколько мегаэлектронвольт. Из-за относительно больших размеров дейтрона входящий в него нейтрон может проникнуть в ядро мишени, тогда как протон продолжает находиться еще вне поля действия ядерных сил, а со стороны ядра подвергается только действию кулоновских сил отталкивания и по этой причине так и не проникает в ядро. Именно это кулоновское отталкивание вызывает развал дейтрона и приводит к реакции срыва (d, p), происходящей под действием дейтронов. Существование срыва объясняет, почему реакция (d, p) является преобладающей над всеми реакциями, производимыми дейтронами. Понятен тот факт, почему при малых энергиях реакция (d, p) более вероятна, чем реакция (d, n). Также понятно, почему выход реакции под действием дейтронов гораздо больше, чем соответствующий выход под действием других частиц. Продукты реакции в системе центра масс летят преимущественно вперед, что указывает на то, что все реакции срыва идут не через составное ядро.

Важная особенность реакции срыва состоит в том, что в результате нее получаются изотопы ядер мишеней с малой энергией возбуждения, которая в ряде случаев меньше энергии связи по отношению к отделению нейтрона. Этим открывается практическая возможность в реакции срыва под действием дейтронов получать ядра в слабовозбужденных состояниях. Процесс срыва остается основным и в ядерных реакциях под действием дейтронов при высоких энергиях. Только в этих случаях кулоновское отталкивание протонов не играет существенной роли

и обе реакции срыва (d, p), и (d, n) становятся практически одинаково вероятными.

8. Остановимся теперь кратко на ядерных реакциях, идущих под действием γ-квантов. Такие реакции называются также *фотоядерными.* Они вызываются не ядерными, а *электромагнитными взаимодействиями.*

При малых энергиях γ-квантов последние могут испытывать при взаимодействии с ядрами только упругое рассеяние. При возрастании энергии γ-квантов возможны реакции типа (γ, n), (γ, p), $(\gamma, 2\mathrm{n})$, (γ, pn), (γ, α) и пр. Эти реакции аналогичны поглощению γ-квантов атомами, а потому все они называются *ядерным фотоэффектом.* В делящихся ядрах (см. § 93) с большой вероятностью идет реакция фотоделения ядра (γ, f). При энергиях, больших порога рождения мезонов, наряду с расщеплением ядра протекают процессы *фоторождения* (например, пионов).

Для того чтобы какая-либо из фотоядерных реакций могла идти, необходимо, чтобы энергия γ-кванта превосходила энергию освобождения соответствующей частицы или группы частиц из ядра. Например, для вылета нейтрона должно быть $\hbar\omega > \mathscr{E}_\mathrm{n}$, и аналогично для протона и α-частицы. Энергия γ-квантов, испускаемых естественными радиоактивными веществами, для этого недостаточна, за исключением только двух случаев, когда величина $\mathscr{E}_\mathrm{n}$ мала. Эти случаи осуществляются в реакциях

$$\gamma + {}^2_1\mathrm{H} \to {}^1_0\mathrm{n} + {}^1_1\mathrm{p}, \quad \gamma + {}^9_4\mathrm{Be} \to {}^8_4\mathrm{Be} + {}^1_0\mathrm{n}.$$

В других случаях используются γ-кванты, получаемые на ускорителях в реакции (p, γ) или при тормозном излучении электронов. Необходимо отметить, что в экспериментальном отношении исследование фотоядерных реакций (γ, n) и (γ, p) представляет значительно большие трудности по сравнению с исследованием реакций, вызываемых нейтронами и в особенности протонами и α-частицами, так как γ-кванты, получаемые на ускорителях, в высшей степени не монохроматичны.

Особенностью фотоядерных реакций является существование *гигантских резонансов* в сечениях поглощения γ-квантов — больших и широких максимумов в зависимости эффективных сечений $\sigma_{\gamma\mathrm{n}}$ и $\sigma_{\gamma\mathrm{p}}$ от энергии $\mathscr{E}_\gamma$. У легких ядер (^{12}C, ^{16}O) этот максимум расположен в области 20–25 МэВ, у средних и тяжелых — в области 13–18 МэВ. Ширина максимума около 3–4 МэВ. Основной вклад в полное сечение поглощения γ-квантов в области гигантского резонанса вносят реакции (γ, p) и (γ, n). Сечение поглощения γ-квантов ядрами даже в области гигантского резонанса равно $0{,}05 \cdot 10^{-24}$–$0{,}1 \cdot 10^{-24}$ см^2, т. е. на 1–2 порядка меньше сечения поглощения таких же γ-квантов, вызываемого атомными электронами. Таким образом, фотоядерные реакции слабо влияют на поглощение γ-излучения веществом.

Энергетическое и угловое распределение вылетающих частиц при ядерном фотоэффекте не согласуется с концепцией Бора о составном

ядре. Так, выход фотопротонов и фотонейтронов из ядра обычно больше ожидаемого по концепции Бора, угловое распределение вылетающих быстрых протонов и нейтронов анизотропно и переходит в изотропное для медленных. Эти факты говорят в пользу предположения, что поглощение γ-кванта происходит на поверхности ядра одним или несколькими нуклонами.

9. Наряду с ядерным фотоэффектом отметим еще *электроядерные процессы*, проявляющиеся при бомбардировке ядра заряженными частицами, например протонами или α-частицами. В этом случае идет конкуренция между процессами, происходящими под действием ядерных и электрических сил. Ядерные силы в области их действия примерно в 100–1000 раз сильнее электрических. Зато они очень быстро убывают с расстоянием и практически перестают действовать вне ядра. Электрические силы, напротив, слабо убывают с расстоянием, и поэтому именно они определяют поведение налетающей заряженной частицы вне ядра. Этим объясняется, почему α-частица, например, при высоких энергиях свободно проникает в ядро и вступает с ним в интенсивное ядерное взаимодействие. При высоких энергиях влияние электрических сил ничтожно. При низких энергиях, напротив, α-частица не может приблизиться к ядру вплотную и взаимодействует с ним только через электрическое поле. Граничной является энергия $\mathcal{E}_{\text{гр}}$ α-частицы, равная примерно кулоновской энергии при соприкосновении ядра с α-частицей, т. е.

$$\mathcal{E}_{\text{гр}} = \frac{2Ze^2}{R+r},$$

где $2e$ — заряд α-частицы, r — ее радиус, Ze — заряд ядра, R — его радиус. Для средних ядер $\mathcal{E}_{\text{гр}} \sim 10$ МэВ.

Кулоновское взаимодействие тяжелых заряженных частиц с ядрами вызывает не только упругое рассеяние этих частиц, но и может приводить к неупругому рассеянию *с кулоновским возбуждением ядра.* Хотя этот процесс приводит к возбуждению только низких уровней ядра, однако он представляет интерес в связи с тем, что позволяет измерять внутренние квадрупольные моменты ядер Q_0 (см. § 70).

Взаимодействие электронов с ядрами при всех энергиях происходит исключительно через электромагнитное поле (если пренебречь слабым взаимодействием), так как электроны в сильных взаимодействиях не участвуют. Особое значение имеет изучение упругого рассеяния электронов высоких энергий на ядрах и на отдельных нуклонах. Такой процесс поддается точному расчету и позволяет измерять распределение электрического заряда в ядрах и нуклонах.

Глава XIV
НЕЙТРОНЫ И ДЕЛЕНИЕ АТОМНЫХ ЯДЕР

§ 92. История открытия нейтрона

1. Нейтрон в ядерной физике и ее приложениях играет не меньшую роль, чем электрон в электронике. Хотя при изучении физики ядра мы все время имели дело с нейтронами, до сих пор ничего не было сказано об истории открытия этих частиц. А этот вопрос в учебнике, несомненно, представляет определенный интерес. Заполним теперь коротко этот пробел.

Первая искусственная ядерная реакция

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \to ^{17}_{8}\mathrm{O} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \tag{92.1}$$

наблюдалась Резерфордом в 1919 г. Протоны в этой реакции регистрировались по сцинтилляциям, вызываемым ими на экране из сернистого цинка. После открытия реакции (92.1) Резерфордом, Чедвиком и др. началось энергичное изучение аналогичных ядерных реакций. Однако до 1931 г. не существовало ускорителей, пригодных для этой цели. Искусственные превращения атомных ядер пытались осуществлять путем облучения их α-частицами, особенно наиболее энергичными, испускаемыми $^{214}_{84}\mathrm{Po}$ (радиохимическое обозначение этого изотопа RaC$'$). Было установлено, что многие элементы, преимущественно легкие, у которых кулоновский барьер сравнительно невысок, при таком облучении испускали протоны. Однако среди самых легких элементов оказались и такие, например Be и Li, которые при облучении α-частицами протонов не испускали.

2. Был поставлен вопрос, не появляется ли при α-облучении различных веществ какое-то новое излучение, которое не дает сцинтилляций на экране из сернистого цинка. Для ответа на этот вопрос Боте (1891–1957) и Г. Беккер в конце 1930 г. заменили экран из сернистого цинка счетчиком Гейгера. В качестве источника α-частиц был взят $^{218}_{84}\mathrm{Po}$, хотя энергия испускаемых им α-частиц и не очень велика (5,25 МэВ). Такой выбор был сделан потому, что $^{218}_{84}\mathrm{Po}$ испускает только α-частицы и не дает β- и γ-излучений, осложняющих опыт. Между источником α-частиц и счетчиком Гейгера вводилась пластинка из исследуемого вещества, например бериллия, которая и подвергалась облучению. За облучаемой пластинкой можно было вводить свинцовые пластины различной толщины для суждения о поглощении неизвестных лучей, если таковые будут обнаружены.

Опыт действительно показал, что при облучении некоторых веществ (бериллий, бор, литий) возникает какое-то излучение, вызывающее слабые разряды счетчика Гейгера. Особенно сильное излучение

давал бериллий. *Бериллиевые лучи*, как мы будем временно называть неизвестное излучение, оказались весьма проникающими. При прохождении через слой свинца толщиной 2 см интенсивность бериллиевого излучения уменьшалась всего на 13 %. На основании этого можно было заключить, что бериллиевые лучи должны состоять из электрически нейтральных частиц, так как заряженные частицы ионизуют среду и поэтому поглощаются значительно сильнее. Из нейтральных же частиц в 1930 г. были известны только фотоны. Поэтому Боте и Беккер вполне естественно предположили, что бериллиевые лучи состоят из γ-квантов, и притом очень жестких. Однако при более подробных исследованиях это предположение не подтвердилось.

Если бы бериллиевые лучи представляли собой γ-излучение, то по их поглощению в свинце, например, можно было бы оценить энергию соответствующего γ-кванта. Таким путем было найдено, что максимальная энергия γ-кванта должна быть около 7 МэВ. А это не согласовывалось с результатами, найденными из других опытов. Кроме того, поглощение γ-лучей тем больше, чем больше плотность поглотителя. Для бериллиевых лучей соотношение оказалось обратным.

3. И. Кюри и Ф. Жолио-Кюри в 1932 г. повторили опыты Боте и Беккера, заменив счетчик Гейгера ионизационной камерой. Помещая между источником бериллиевых лучей и ионизационной камерой листы парафина, они обнаружили, что из парафина исходили протоны, максимальный пробег которых в воздухе достигал 26 см. Такому пробегу соответствовала энергия протона $\mathscr{E} \approx 4{,}5$ МэВ. Появление протонов отдачи в этих опытах было непосредственно доказано путем наблюдения треков в камере Вильсона. Подобно парафину действуют также все водородсодержащие вещества.

Зная максимальную энергию протонов, на основе гипотезы Боте и Беккера о природе бериллиевого излучения супруги Кюри вычислили необходимую максимальную энергию γ-квантов. Расчет производился следующим образом.

Если протоны появляются под действием γ-квантов, то, очевидно, этот процесс есть комптон-эффект на протонах водорода, в котором их можно считать свободными. Поэтому для изменения длины волны λ при рассеянии γ-кванта на угол θ можно воспользоваться известной формулой

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}\,(1 - \cos\theta),$$

в которой, однако, m означает массу протона, а не электрона (см. § 3). Максимальное изменение длины волны получается при рассеянии назад, т. е. при $\theta = \pi$. В этом случае $\lambda' - \lambda = 2h/mc$. Отсюда находим частоту ν', а затем и энергию выбитого протона:

$$\mathscr{E} = h\nu - h\nu' = \frac{h\nu}{1 + mc^2/(2h\nu)}. \tag{92.2}$$

Подставляя сюда $\mathscr{E} = 4{,}5$ МэВ, $mc^2 = 938$ МэВ, вычисляем $h\nu = 48$ МэВ. Такова должна быть энергия γ-квантов, чтобы при их

рассеянии получились протоны требуемой энергии. Сами γ-кванты должны возникать в бериллии под действием α-частиц, излучаемых полонием. Так как энергия последних всего 5,25 МэВ, то трудно допустить, чтобы они возбуждали γ-кванты столь высоких энергий. Кроме того, полученное значение 48 МэВ не согласуется с энергией 7 МэВ тех же γ-квантов, найденной по их поглощению.

4. Наиболее тщательные исследования природы бериллиевого излучения были произведены Чедвиком в 1932 г. Схема его установки принципиально не отличается от той, какой пользовались супруги Кюри. Она изображена на рис. 158. На подложку D наносили слой полония Po. Альфа-частицы, испускаемые ядрами Po, вступали в ядерную реакцию (α, n) с ядрами Be. Нейтроны на пути к ионизационной камере пропускались через слой парафина. Заметим, что ионизационная камера I прикрывалась листами алюминия различной толщины для определения пробегов, а следовательно и энергий протонов, исходивших из парафина. Для максимальной энергии протонов из парафина Чедвик получил $\mathscr{E} = 5{,}7$ МэВ. Если бы бериллиевые лучи состояли из γ-квантов, то при таком значении $\mathscr{E}$ максимальная энергия γ-кванта получилась бы $h\nu = 55$ МэВ. Но Чедвик исследовал рассеяние бериллиевых лучей не только парафином, но и другими веществами и рассчитал по формуле (92.2) соответствующие максимальные энергии γ-квантов. Из измерения пробегов ядер отдачи в азоте получилось $h\nu = 90$ МэВ, а в аргоне $h\nu = 150$ МэВ.

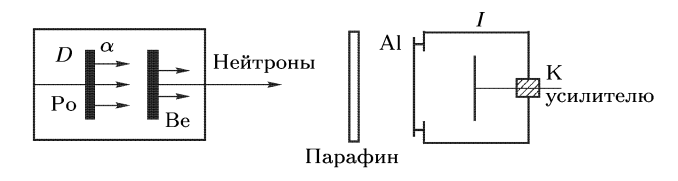


Рис. 158

Итак, гипотеза, отождествлявшая бериллиевые лучи с γ-квантами, приводила к противоречивым результатам. Для одной и той же величины различные методы давали значения 7, 55, 90, 150 МэВ. Это доказывало неправильность указанной гипотезы. Однако, как указал Чедвик, все противоречия устраняются, если предположить, что бериллиевые лучи образуются потоком не γ-квантов, а других *нейтральных частиц*, названных им *нейтронами.*

Возможность существования нейтронов предусматривалась еще Резерфордом в 1920 г. Он допускал возможность существования сложной частицы, состоящей из протона и электрона. Но в этой частице протон и электрон связаны между собой еще более прочно, чем в атоме водорода в основном состоянии. Существование подобной нейтральной частицы подтвердилось, но гипотезу о ее строении из протона и электрона пришлось оставить (см. § 63).

Однако гипотеза Резерфорда о строении нейтрона позволяет сразу понять, почему для выбивания наблюдаемых протонов из парафина требуются нейтроны несравненно меньшей энергии, чем энергия γ-квантов. Дело в том, что в соответствии с гипотезой Резерфорда масса нейтрона должна быть с большой точностью равна массе протона. Примем, что масса m протона и нейтрона одна и та же. При лобовом столкновении γ-кванта с энергией $h\nu$ с протоном последний получает импульс $mv = h\nu/c$. Отсюда

$$\frac{mv^2/2}{h\nu} = \frac{v}{2c}.$$

Но при равенстве масс протона и нейтрона величина $mv^2/2$ равна также энергии нейтрона. Из последней формулы видно, что эта энергия должна быть значительно меньше энергии соответствующего γ-кванта. Отметим, что в этом рассуждении принималось во внимание только предположение о равенстве масс протона и нейтрона, а гипотеза о строении последнего совсем не использовалась.

5. Чедвик произвел и первое, хотя и недостаточно точное, измерение массы нейтрона m_n. Он исходил из следующих соображений. Если нейтрон претерпевает лобовое столкновение с покоящимся ядром массой m, то на основании законов сохранения энергии и импульса в нерелятивистском приближении можно написать

$$m_\mathrm{n} v_\mathrm{n1}^2 = m_\mathrm{n} v_\mathrm{n2}^2 + mv^2, \quad m_\mathrm{n} v_\mathrm{n1} = m_\mathrm{n} v_\mathrm{n2} + mv,$$

где v_n1 и v_n2 — скорости нейтрона до и после столкновения, а v — скорость ядра отдачи. Отсюда

$$v = \frac{2m_\mathrm{n}}{m + m_\mathrm{n}} v_\mathrm{n1}.$$

Производились измерения максимальных скоростей ядер отдачи в водороде (v_H) и в азоте (v_N). Максимум скорости ядер отдачи свидетельствовал о том, что в обоих случаях скорости нейтронов были одинаковы, а именно максимальны. Поэтому полагая в предыдущем уравнении сначала $m = m_\mathrm{H}$, а затем $m = m_\mathrm{N}$, почленным делением получаем

$$\frac{v_\mathrm{H}}{v_\mathrm{N}} = \frac{m_\mathrm{N} + m_\mathrm{n}}{m_\mathrm{H} + m_\mathrm{n}} = \frac{m_\mathrm{N}/m_\mathrm{H} + m_\mathrm{n}/m_\mathrm{H}}{1 + m_\mathrm{n}/m_\mathrm{H}}. \tag{92.3}$$

Из своих измерений Чедвик нашел, что наиболее вероятные максимальные скорости отдачи ядер водорода (протонов) и азота равны $v_\mathrm{H} = 3{,}3 \cdot 10^9$ см/с и $v_\mathrm{N} = 4{,}7 \cdot 10^8$ см/с. Пользуясь этими значениями и полагая $m_\mathrm{N}/m_\mathrm{H} = 14$, из предыдущего соотношения находим $m_\mathrm{n}/m_\mathrm{H} = 1{,}15$. Учитывая довольно большую ошибку метода, Чедвик заключил, что $m_\mathrm{H} = m_\mathrm{n}$, т. е. масса нейтрона равна массе протона m_p. Точное значение массы нейтрона $m_\mathrm{n} = (939{,}5731 \pm 0{,}0027)$ МэВ было получено из баланса масс различных ядерных реакций с участием нейтронов. Масса нейтрона отличается от массы протона $m_\mathrm{p} = (938{,}2796 \pm 0{,}0027)$ МэВ на $m_\mathrm{n} - m_\mathrm{p} = (1{,}29343 \pm 0{,}00004)$ МэВ.

§ 93. Деление атомных ядер

1. Открытие деления атомных ядер — одно из важнейших фундаментальных открытий, получившее многочисленные научно-технические применения. Предыстория этого открытия начинается с 1934 г., когда Ферми со своими сотрудниками начали облучать нейтронами атомные ядра с целью получения новых химических элементов. Нейтроны не имеют электрического заряда — для них не существует кулоновского потенциального барьера. Поэтому им легче проникать внутрь ядра и вызывать различные ядерные превращения, чем заряженным частицам. При облучении самого тяжелого из естественных (встречающихся в природе) химических элементов — урана — Ферми надеялся получить еще более тяжелые химические элементы, называемые *трансуранами.* Эти элементы должны быть радиоактивными, так как в противном случае они встречались бы на Земле в естественном состоянии.

Стабильных изотопов у урана всего три: ^{238}U, ^{235}U и ^{234}U. Самым распространенным является ^{238}U. Относительная распространенность остальных двух изотопов весьма мала: ^{235}U составляет около $1/140$, а ^{234}U — всего $1/17\,000$ долю ^{238}U. Допустим, что облучению подвергается один из этих изотопов, например ^{238}U. При таком облучении возникает новый радиоактивный изотоп $^{239}_{92}$U. Этот изотоп перегружен нейтронами, а потому должен испытывать β^--распад, в результате чего возникает трансурановый элемент с $Z = 93$. При последующем β^--распаде должен возникать элемент с $Z = 94$, и т. д.

Ферми и его сотрудники действительно обнаружили, что при облучении урана нейтронами возникают новые радиоактивные ядра. Доказательством этого служило появление новых периодов полураспада. Особое внимание было уделено периодам в 13 и 90 мин, так как среди всех ядер с зарядовыми числами между $Z = 86$ и $Z = 92$ не было известно ни одного ядра, которое бы обладало таким периодом полураспада. Поэтому естественным было предположение Ферми, что новое β-излучение исходит от элемента с $Z = 93$ или от элементов с еще более высокими зарядовыми числами. Такое предположение как будто бы подтверждалось исследованиями химических свойств гипотетических элементов методами радиохимии, но это было признано неубедительным.

2. Систематические многолетние исследования О. Гана (1879–1968), Лизе Мейтнер (1878–1988) и Штрассмана (1902–1980) показали, что кривая ослабления интенсивности различных излучений выглядела различно в зависимости от времени начала наблюдения. Это указывало на то, что, по-видимому, какие-то радиоактивные вещества возникают не сразу, а спустя некоторое время после начала облучения нейтронами. Отсюда вытекало, что существует цепь последовательных радиоактивных превращений, подобная радиоактивным рядам естественных радиоактивных веществ. Периоды полураспада 13 и 90 мин, найденные Ферми, были уточнены и по измерениям Мейтнер оказались равными

16 и 59 мин соответственно. Кроме того, было обнаружено много периодов полураспада, в особенности более длительных, которые раньше не были замечены Ферми. Общее число таких периодов достигло девяти, а наибольший атомный номер гипотетических радиоактивных элементов возрос до 97. Интересно отметить также, что период полураспада 23 мин появлялся при облучении только медленными нейтронами. Лишь по этой причине его удалось отделить от близкого к нему периода 16 мин.

И. Кюри и П. Савич (р. 1909) помимо периодов, найденных Ганом, Мейтнер и Штрассманом, обнаружили еще период полураспада в 3,5 ч. Оказалось, что по своим химическим свойствам соответствующий ему элемент является аналогом редкоземельного элемента лантана. Этот факт определенно приводил к гипотезе о *делении ядра.* Однако Кюри и Савич не заметили такой возможности и приписали наблюдаемое радиоактивное излучение трансурановым элементам.

Между тем Ган и Штрассман продолжали систематические опыты по исследованию радиоактивных веществ, возникающих из урана и тория при облучении их нейтронами. (Лизе Мейтнер не могла принять участия в этих опытах. Она была еврейкой и австрийской подданной. После захвата Австрии гитлеровской Германией она в середине 1933 г. была вынуждена эмигрировать из Германии в Швецию. Но она непрерывно поддерживала активную идейную связь с лабораторией Гана в Берлине.) Ган и Штрассман были химиками — ведущими специалистами в области радиохимии. Главный итог их исследований состоит в том, что при облучении урана и тория нейтронами возникают изотопы химических элементов, лежащие где-то посередине периодической системы. К ним, в частности, относятся барий, а также лантан, наблюдавшийся в опытах Кюри и Савича.

3. Природа этих удивительных явлений была понята Л. Мейтнер и ее племянником О. Фришем (1904–1979) в середине января 1939 г. Они предположили, что возбужденное ядро урана или тория, получающееся после захвата нейтрона, делится на две более мелкие части приблизительно одинаковой массы, которые были названы *осколками.* Обнаруженные Кюри и Савичем, Ганом и Штрассманом радиоактивные изотопы, лежащие в середине периодической системы, и являются такими осколками ядер урана и тория. Поскольку относительная доля нейтронов в ядрах увеличивается с увеличением массы последних, эти осколки, получившиеся из тяжелых ядер, перегружены нейтронами. Поэтому в ядрах осколков происходят процессы превращения нейтронов в протоны путем испускания электронов. Такие же процессы происходят и в дочерних ядрах, возникающих в результате этих превращений. Этим и объясняются цепочки последовательных β^--превращений, наблюдавшиеся еще Ферми. Следует ожидать, и это было подтверждено последующими исследованиями, что ядро может делиться не только на два, но также на три и большее число осколков. Однако такие деления происходят значительно реже, чем деление на два осколка.

Предположение Мейтнер и Фриша сразу же было подтверждено опытами Фриша с атомами отдачи, которому удалось с убедительностью наблюдать взрывной характер деления ядер. В этих опытах малая ионизационная камера покрывалась изнутри окисью урана. Когда к этой камере подносили источник нейтронов (Rn + Be), то примерно раз 10–30 в минуту наблюдались сильные ионизационные толчки, которые после предварительного усиления фиксировались с помощью осциллографа. Такие толчки могли вызываться только атомными частицами, обладающими большими массами, зарядами и громадной энергией. Вся схема была рассчитана так, что импульсы, создаваемые α-частицами, были недостаточны для приведения в действие осциллографа. Это было видно из того, что толчки не наблюдались, когда не было урана или источника нейтронов. При окружении источника нейтронов слоем парафина число ионизационных толчков возрастало примерно в два раза. Это указывает на то, что для процесса деления ядер урана более эффективными являются *медленные нейтроны.*

После опытов Фриша такие же и аналогичные опыты, свидетельствующие о делении ядер, сразу же были поставлены во многих лабораториях. Не останавливаясь на этой стороне дела, перейдем к изложению основных закономерностей явления деления ядер и их простейшей теоретической интерпретации.

4. Ранее уже говорилось, что средняя энергия связи нуклона в тяжелых ядрах меньше, чем в ядрах середины периодической системы элементов (см. рис. 121). Допустим, что ядро урана ^{235}U после захвата нейтрона делится на два одинаковых осколка. Из рис. 121 видно, что средняя энергия связи нуклона в ядре урана равна 7,6 МэВ, тогда как в каждом из осколков она равна 8,5 МэВ. Таким образом, при делении ядра урана освобождается энергия 8,5–7,6 = 0,9 МэВ на каждый нуклон. Так как полное число нуклонов при делении не изменяется, то полная энергия, освобождающаяся при одном акте деления урана, составляет $0{,}9 \cdot 236 \approx 210$ МэВ. Эта громадная энергия проявляется главным образом в кинетической энергии образовавшихся осколков.

Оценку энергии, освобождающейся при делении, можно произвести несколько точнее, использовав приводимые в таблицах значения дефектов массы ядер, т. е. разностей $\Delta = M - A$ между массой ядра M и массовым числом A. Допустим, что исходным ядром является ядро ^{235}U. После захвата нейтрона образуется промежуточное ядро ^{236}U, которое и испытывает деление на два осколка. Предположим, что массовые числа этих осколков одинаковы, т. е. равны каждое 118. Из таблиц дефектов массы ядер находим, что для промежуточного ядра урана $\Delta = {}^{236}M - {}^{236}A \approx 42$ МэВ, а для каждого из осколков $\Delta = {}^{118}M - {}^{118}A \approx -86$ МэВ. Полная энергия, освобождаемая при делении, определяется разностью энергии промежуточного ядра и энергии двух образовавшихся осколков. Она составляет $42-(-2\cdot 86) = 214$ МэВ, что в пределах ошибок совпадает с предыдущим результатом.

По существу те же результаты получаются и из полуэмпирической формулы Вейцзеккера (64.6). В этой формуле, поскольку она получена

в предположении несжимаемости ядерного вещества, можно опустить первый член, так как его значение не меняется при делении ядра, а потому он не влияет на разность масс до и после деления. По той же причине можно опустить четвертый член, так как энергия симметрии также не меняется при делении. Отбросим еще последний член — энергию спаривания, так как ее изменением при делении можно пренебречь. С учетом этих упрощений энергию ядра можно представить формулой

$$\mathscr{E} = C_{\text{пов}}A^{2/3} + C_{\text{кул}}Z^2A^{-1/3}. \tag{93.1}$$

Знаки в формуле (64.6) изменены, так как эта формула дает работу, которую надо затратить, чтобы полностью расщепить ядро на составляющие его нуклоны. А эта работа, взятая с противоположным знаком, как раз и дает энергию ядра. Воспользуемся еще значениями коэффициентов (64.7), из которых нам нужны только два: $C_{\text{пов}} = 17{,}8$ МэВ и $C_{\text{кул}} = 0{,}710$ МэВ. Простой расчет дает для энергии урана $\mathscr{E}_{236} = 1653$ МэВ, а для каждого осколка $\mathscr{E}_{118} = 735$ МэВ. Искомая энергия, освобождаемая при делении, таким образом, равна $1653 - 2 \cdot 735 = 183$ МэВ, что практически совпадает с предыдущими результатами. (См. также задачу 3 к § 64.)

5. Простейшая теория деления ядра была разработана в 1939 г. Н. Бором и Д. Уилером (р. 1911) и независимо и даже несколько раньше их Я.И. Френкелем (1894–1952). В основу этой теории была положена капельная модель ядра. Конечно, капельная модель в состоянии описать только некоторые, простейшие черты такого сложного явления, какое представляет собой деление атомного ядра. Многие стороны этого явления остаются необъясненными и даже находятся в противоречии с теорией. В.М. Струтинский усовершенствовал капельную модель учетом оболочечных эффектов. Однако мы ограничимся изложением, в основном качественным, только простейшей — капельной — теории деления ядра.

Рассмотрим ядро ^{235}U, захватившее нейтрон, в результате чего образовалось составное ядро ^{236}U. Составное ядро ^{236}U в основном состоянии практически стабильно; хотя оно и α-радиоактивно, но период полураспада составляет $2{,}4 \cdot 10^7$ лет. Такое ядро может совершать внутренние колебания около своей равновесной формы, не подвергаясь делению. Однако в результате захвата нейтрона получается ядро ^{236}U в сильно возбужденном состоянии, и амплитуда колебаний может стать настолько большой, что ядро разделится на две части. Под действием кулоновских сил отталкивания эти части разлетятся со значительными скоростями. Ядерные силы, как силы притяжения, препятствуют этому разлету. Но при разлете превалируют электрические силы. В результате части разделившегося ядра и получают кинетическую энергию около 200 МэВ, о которой говорилось выше.

Если ядро уподобить жидкой капле, то различные стадии, через которые проходит форма ядра до и в результате деления, схематически представлены на рис. 159. Однако не вся энергия деления переходит в кинетическую энергию осколков. Сами осколки получаются в возбужденном состоянии, и их внутренняя энергия высвобождается в первую

очередь путем испарения нейтронов, а затем идет на испускание γ-лучей. Основными продуктами процесса деления являются, таким образом, два примерно равных ядра, несколько нейтронов и γ-квантов. Как уже указывалось в п. 3, ядра-осколки, как правило, оказываются β^--активными и распадаются с самыми разными периодами полураспада.

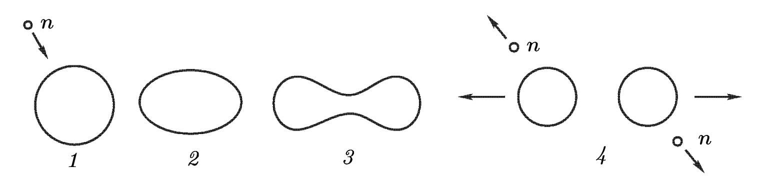


Рис. 159

6. При увеличении поверхности ядра энергия поверхностного натяжения возрастает, а энергия кулоновского отталкивания убывает. Изменениями объемной энергии, энергии симметрии и энергии спаривания можно пренебречь. Поверхностное натяжение стремится вернуть деформированное ядро в исходное состояние, а кулоновское отталкивание способствует его делению. Отношение кулоновской энергии к поверхностной пропорционально $Z^2A^{-1/3} : A^{2/3} = Z^2/A$. Поэтому отношение Z^2/A может служить основным параметром, определяющим способность ядра к делению. Чем больше значение этого параметра, тем легче ядро подвержено делению. Чтобы приближенно оценить критическое значение параметра Z^2/A, при котором ядро уже не может быть стабильным, рассмотрим устойчивость ядра относительно его малых деформаций.

При малых деформациях можно считать, что исходное сферическое ядро принимает форму вытянутого эллипсоида вращения с полуосями $a = R(1+\varepsilon)$ и $b = R/\sqrt{1+\varepsilon}$, где ε — малая величина, играющая роль параметра деформации. При таких значениях a и b объем ядра не меняется, что соответствует предположению о несжимаемости ядра. Нахождение поверхностной энергии сводится к геометрической задаче вычисления поверхности ядра, а вычисление кулоновской энергии — к задаче о поле заряженного эллипсоида, если предположить, что заряд ядра равномерно распределен по его объему. Расчет показывает, что при малых деформациях ядра суммарная энергия поверхностного натяжения и кулоновского отталкивания с точностью до членов ε^2 включительно меняется на величину

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{1}{5}\,(2C_{\text{пов}}A^{2/3} - C_{\text{кул}}Z^2A^{-1/3})\varepsilon^2, \qquad (93.2)$$

где $C_{\text{пов}}$ и $C_{\text{кул}}$ — коэффициенты, входящие в формулу Вейцзеккера (64.6). Конечно, это изменение происходит за счет внутренней энергии возбужденного ядра. Если $\Delta\mathscr{E} > 0$, то поверхностные силы будут превалировать над силами кулоновского отталкивания, стремясь вернуть ядро к исходной сферической форме, около которой оно будет

совершать колебания. Если же $\Delta\mathscr{E} < 0$, то преобладающими будут силы кулоновского отталкивания, способствующие делению.

Критическое значение параметра Z^2/A, больше которого ядро становится абсолютно неустойчивым к делению, определится из требования, чтобы обратилось в нуль выражение в круглых скобках формулы (93.2). Это дает

$$\left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{крит}} = 2\,\frac{C_{\text{пов}}}{C_{\text{кул}}} \approx 50, \tag{93.3}$$

причем мы использовали значения коэффициентов $C_{\text{пов}}$ и $C_{\text{кул}}$ из (64.7). Конечно, на вычисленное значение критического параметра Z^2/A надо смотреть как на ориентировочное, поскольку оно получено в предположении справедливости капельной модели и малых деформаций ядра.

Формулой (93.3) еще не определяются в отдельности критические значения Z и A, больше которых ядро абсолютно неустойчиво по отношению к делению, так как в общем случае между Z и A не существует однозначной связи. Такая связь имеет место только в случае β-стабильных ядер и определится формулой (64.8а). С помощью этой формулы можно исключить из (93.3) зарядовое число Z и получить иррациональное уравнение только для A. Решая это уравнение, находим критическое значение массового числа $A_{\text{крит}} \approx 385$, а затем и критическое значение зарядового числа $Z_{\text{крит}} \approx 138$.

7. Следующие качественные соображения позволяют уяснить влияние на процесс деления и конечных деформаций ядра. Разделим мысленно исходное стабильное ядро на две части (два осколка) с зарядовыми числами Z_1 и Z_2. Если эти осколки разойдутся достаточно далеко на расстояние r, то энергия их кулоновского отталкивания будет $Z_1Z_2e^2/r$. При этом появится еще кинетическая энергия осколков около 200 МэВ. Она, разумеется, возникает за счет потенциальной энергии ядра в исходном состоянии, так что потенциальная энергия в исходном состоянии составит около 200 МэВ, т. е. равна энергии, освобождающейся при делении. Однако исходное ядро по предположению стабильно. Следовательно, на кривой потенциальной энергии $V = V(r)$ должен существовать максимум — потенциальный барьер, который должен быть преодолен, чтобы фактически произошло деление (рис. 160). Вместо одного максимума, в особенности когда атомные ядра не сферические, возможны и два максимума (двухгорбая кривая). Но от такой возможности при выяснении основных вопросов деления можно отвлечься. Для абсолютно неустойчивых ядер, у которых $Z^2/A > 50$, максимума на кривой $V = V(r)$ нет. Такие ядра, если бы они возникли, мгновенно претерпевали бы деление за времена порядка 10^{-23}–10^{-24} с.

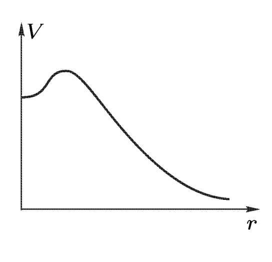


Рис. 160

Разность между максимальным значением потенциальной энергии $V(r)$ и ее значением при $r = 0$ для стабильных ядер называется *энергией активации.* По классическим представлениям для деления ядра необходимо сообщить ему энергию, не меньшую энергии активации. Эту энергию приносят нейтроны, при поглощении которых и образуются возбужденные составные ядра, удовлетворяющие указанному условию. Если же энергия возбуждения меньше энергии активации, то по классическим представлениям деление невозможно. Исследования показали, что ядра ^{235}U претерпевают деление после захвата любых, в том числе и медленных (тепловых) нейтронов. Для деления же ядер ^{238}U, захвативших нейтрон, требуются быстрые нейтроны с энергиями больше 1 МэВ.

8. Такое различие в поведении ядер ^{235}U и ^{238}U связано в первую очередь с эффектом спаривания нуклонов (см. § 64). В нечетном ядре ^{235}U неспаренный нуклон связан слабее остальных нуклонов, которые спарены. Допустим, что ядро ^{235}U поглощает свободный нейтрон, превращаясь в четно-четное промежуточное ядро ^{236}U. При захвате свободного нейтрона промежуточное ядро получается в возбужденном состоянии. Возбуждение еще более возрастает за счет того, что бывший неспаренный нуклон находит себе партнера и тем самым становится связанным сильнее. Если же свободный нейтрон захватывается ядром ^{238}U, то получается четно-нечетное промежуточное ядро ^{239}U. В нем захваченный нейтрон, не имея себе партнера, связан слабее, чем остальные нуклоны. Поэтому в процессе захвата нейтрона ядро ^{238}U возбуждается слабее, чем ядро ^{235}U. Для его деления требуется дополнительная энергия возбуждения. Некоторое влияние на способность ядер к делению, возможно, оказывает и то обстоятельство, что параметр Z^2/A для ядер ^{236}U (35,86) больше, чем для ядер ^{239}U (35,41).

Изложенное в основном справедливо и в отношении других четно-нечетных ядер. Особенно следует отметить ядра ^{239}Pu и ^{233}U, которые делятся медленными нейтронами, тогда как их четно-четные изотопы, как правило, требуют для деления быстрых нейтронов (^{240}Pu делится и на тепловых нейтронах). Это обстоятельство играет решающую роль в ядерной энергетике (см. § 95).

9. С квантовой точки зрения не обязательно, чтобы энергия возбуждения превосходила энергию активации ядра. Ядро может разделиться и в том случае, когда имеет место обратное соотношение. В этом случае деление может произойти путем *туннельного просачивания* через потенциальный барьер, как это имеет место при α-распаде. Однако вероятность этого процесса мала. Она тем меньше, чем выше потенциальный барьер. В частности, возможно и *спонтанное деление* ядра, происходящее при полном отсутствии внешнего возбуждения.

Спонтанное деление ядер урана впервые наблюдали К.А. Петржак и Г.Н. Флеров (р. 1913) в 1940 г. В их опытах была использована многослойная ионизационная камера с рабочей площадью пластин около 1000 см^2 и больше, на которую наносился уран. При поднесении к ионизационной камере источника нейтронов в осциллографе наблюдались

мощные ионизационные толчки, происходящие от вынужденного деления ядер урана. Эти предварительные опыты позволяли изучить характер ионизационных толчков, происходящих от деления ядер урана. При удалении источника нейтронов такие толчки полностью не прекращались, что свидетельствовало о спонтанном делении ядер. В начальных опытах Петржак и Флеров наблюдали в среднем примерно 6 толчков в час. Окончательные опыты были поставлены на одной из станций Московского метрополитена на глубине 50 м, чтобы как можно лучше защитить аппаратуру от мешающего фона космических лучей. В одном грамме урана за час самопроизвольно делится в среднем всего около 25 ядер урана. Пользуясь этим, легко рассчитать, что период полураспада урана по отношению к спонтанному делению составляет около 10^{16} лет. На рис. 161 приведена зависимость периода T спонтанного деления от

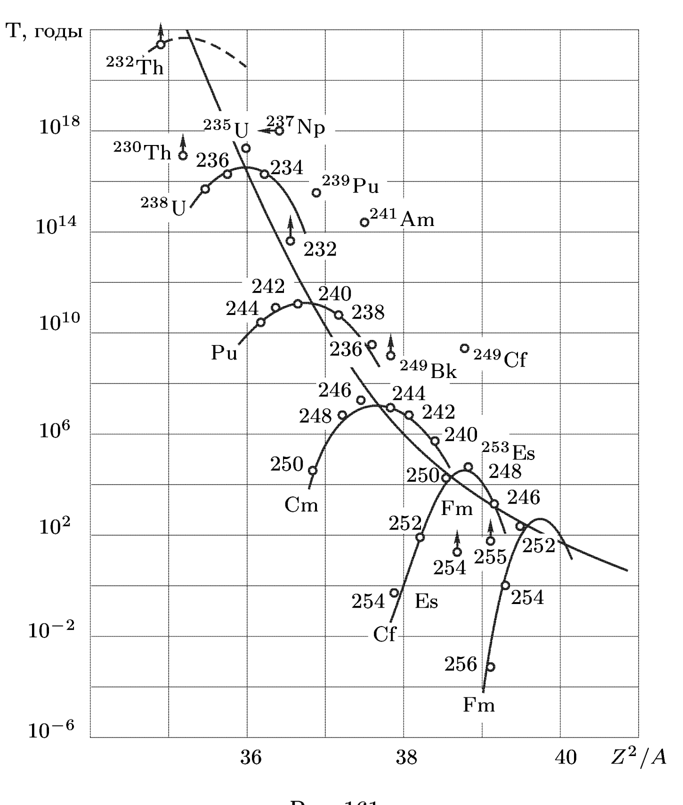


Рис. 161

параметра Z^2/A для различных тяжелых ядер. Светлые точки соответствуют экспериментальным данным, пересекающая рисунок сплошная кривая рассчитана по модели жидкой капли.

10. Как уже указывалось выше, ядро чаще всего делится на два осколка. Но отношение масс этих осколков может быть разным. При

делении тепловыми нейтронами осколки равных или близких масс почти не наблюдаются, хотя все числовые оценки выше мы делали в предположении равенства масс осколков, так как для этой цели такое предположение не существенно. На самом деле наиболее вероятно деление на осколки, один из которых примерно в полтора раза тяжелее другого. Это иллюстрируется рис. 162, на котором приведено количество осколков различных массовых чисел в процентах для ^{235}U

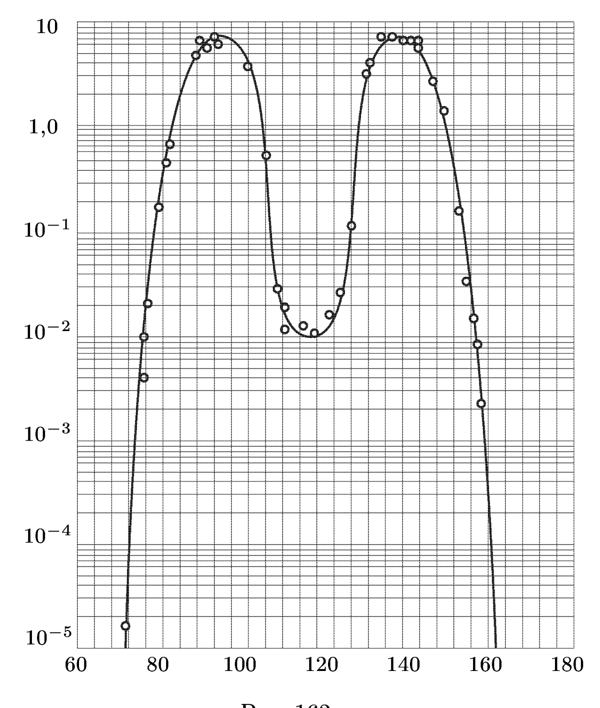


Рис. 162

при делении тепловыми нейтронами. Считается, что такая асимметрия деления объясняется влиянием ядерных нейтронных оболочек — ядру энергетически выгоднее делиться так, чтобы число нейтронов в каждом из осколков было близко к одному из магических чисел — 50 или 82.

11. Процесс деления ядра сопровождается вылетом *вторичных нейтронов.* Этого следует ожидать на основе следующих простых соображений. Отношение числа нейтронов N к числу протонов Z в ядре, вообще говоря, тем больше, чем тяжелее ядро. Для β-стабильных ядер это видно из рис. 120, а также из формулы (64.8a), если ее переписать в виде

$$\frac{N}{Z} = 0{,}97 + 0{,}0150\,A^{2/3}.$$

Допустим теперь, что тяжелое ядро разделилось на два осколка. Если бы при делении общее число нейтронов в системе не изменилось,

то отношения N/Z в обоих осколках были бы либо равны такому же отношению в исходном тяжелом ядре, либо в одном из них оно было бы больше, а в другом меньше. Значит, по крайней мере один из осколков получился бы нейтроноизбыточным и должен был бы освобождаться от лишних нейтронов.

Появление вторичных нейтронов можно понять и с точки зрения капельной модели ядра. В шейке гантелеобразного ядра (положение *3* на рис. 159) почти нет протонов, так как из-за кулоновского отталкивания они сосредоточиваются главным образом в удаленных — шарообразных — частях ядра. Поэтому при разрыве шейки в процессе деления из нее могут вылетать лишь нейтроны, и притом за времена порядка ядерных (10^{-22}–10^{-23} с), т. е. практически мгновенно. Такие вторичные нейтроны называются *мгновенными*.

Наряду с мгновенными при делении ядер появляются и *запаздывающие вторичные нейтроны*. Дело в том, что осколки деления ядер радиоактивны. При их β-распаде могут появляться нейтроноизбыточные ядра в сильно возбужденных состояниях. Возбуждение таких ядер снимается путем конкурирующих процессов испускания нейтронов и γ-квантов. Оба процесса происходят практически мгновенно. Первый из этих процессов и порождает запаздывающие нейтроны. Запаздывание понимается в смысле временного отставания момента вылета рассматриваемых нейтронов от момента испускания мгновенных нейтронов (появляющихся непосредственно при делении ядра). Оно определяется периодом полураспада изотопа-предшественника, при β-распаде которого и получилось возбужденное ядро, испустившее затем нейтрон.

Процесс возникновения запаздывающих нейтронов поясняется схемами на рис. 163 и 164. На рис. 163 показано ядро ^{87}Br, появившееся

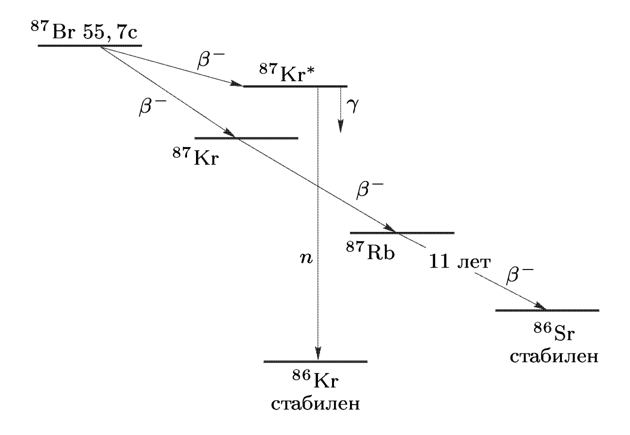


Рис. 163

в результате ядерного деления. Это ядро испытывает β^--распад с периодом полураспада 55,6 с. В результате таких распадов возникают ядра ^{87}Kr, бо́льшая часть которых находится в невозбужденном состоянии

и лишь незначительная часть — в сильно возбужденном состоянии ^{87}Kr*. Невозбужденное ядро после двух последовательных β^--рас-

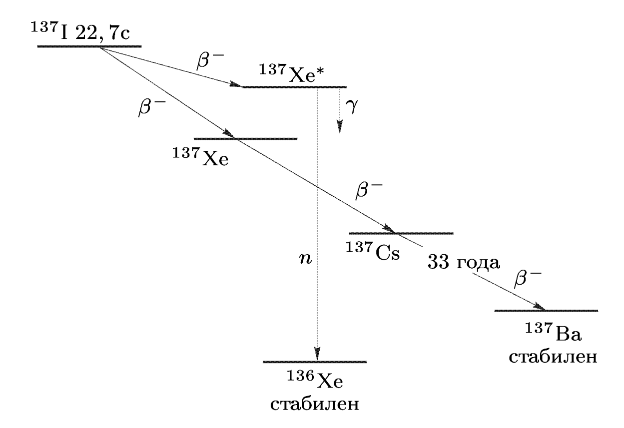


Рис. 164

падов переходит в стабильное ядро ^{87}Sr. Сильно же возбужденное ядро ^{87}Kr* почти мгновенно переходит в невозбужденное состояние ^{87}Kr (с испусканием γ-квантов) или же в стабильное состояние ^{86}Kr (с испусканием нейтрона). В последнем процессе и возникает запаздывающий нейтрон [1]. Аналогичная схема приведена и на рис. 164.

Таблица 15

Запаздывающие нейтроны

Период полураспада	Выход, % (к общему числу вторичных нейтронов)	Кинетическая энергия запаздывающих нейтронов, МэВ
55,7	0,021	0,25
22,7	0,140	0,56
6,2	0,125	0,43
2,3	0,253	0,62
0,6	0,074	0,42
0,2	0,027	—
—	—	—
Средние 8,97	0,64	0,508

Запаздывающие нейтроны делятся на несколько групп, различающихся временем запаздывания и энергией. В табл. 15 приведены ха-

[1] Следует отметить, что изотоп ^{87}Kr не случайно оказался «нейтроноактивным». В ядре этого изотопа 51 нейтрон, т. е. на один нейтрон больше магического числа 50; этот «лишний» нейтрон и покидает возбужденное ядро. У изотопа ^{137}Xe (рис. 164) число нейтронов равно 83, так что ситуация аналогична.

рактеристики запаздывающихся нейтронов, возникающих при делении ядер урана-235.

Свыше 99 % от всех выделяющихся при делении нейтронов освобождается мгновенно. На долю запаздывающих нейтронов приходится примерно 0,75 %. Несмотря на это, запаздывающие нейтроны играют важную роль в ядерной энергетике — они позволяют сделать управляемыми ядерные реакции, происходящие при делении в ядерных реакторах (см. § 95, п. 5).

12. В заключение приведем более точное примерное распределение энергии деления между различными способами ее освобождения при делении ^{235}U тепловыми нейтронами:

Кинетическая энергия осколков	$166{,}2 \pm 1{,}3$ МэВ
Энергия нейтронов деления	$4{,}8 \pm 0{,}1$ МэВ
Энергия мгновенных γ-квантов	$8{,}0 \pm 0{,}8$ МэВ
Энергия β-частиц продуктов деления	$7{,}0 \pm 0{,}3$ МэВ
Энергия γ-излучения продуктов деления	$7{,}2 + 1{,}1$ МэВ
Энергия антинейтрино продуктов деления	$9{,}6 \pm 0{,}5$ МэВ
Всего	$202{,}8 \pm 0{,}4$ МэВ

§ 94. Трансурановые элементы

1. Причину, по которой периодическая система химических элементов, встречающихся в природе в естественном состоянии, обрывается на уране $_{92}$U, надо искать в происхождении химических элементов и их последующих радиоактивных превращениях. В настоящее время можно считать доказанным, что все химические элементы Солнечной системы образовались свыше 5 млрд лет назад в результате гравитационного сжатия огромных масс галактического водорода, при котором сильно повысилась его температура. Чрезвычайно высокая температура и обеспечила синтез сложных ядер из более простых ядер водорода. При этом были синтезированы и многочисленные изотопы химических элементов с атомными номерами больше 92. Однако период их полураспада оказался значительно меньше времени существования Земли (около $4{,}5 \cdot 10^9$ лет). К настоящему времени все эти изотопы из-за радиоактивных превращений полностью распались и исчезли на Земле (см. п. 10). Самым тяжелым из сохранившихся оказался изотоп урана ^{238}U, период полураспада которого ($4{,}5 \cdot 10^9$ лет) того же порядка, что и возраст Земли.

2. Истинные границы периодической системы, за которыми существование более тяжелых элементов невозможно, казалось бы, должны определяться нестабильностью электронной оболочки атома. Дело в том, что самый глубокий электрон атомной оболочки не может приблизиться к центру ядра на расстояние, меньшее радиуса последнего. Такой электрон был бы сразу поглощен ядром, что привело бы

к уменьшению атомного номера элемента. Расстояние самого глубокого электрона атомной оболочки до центра атомного ядра с зарядовым числом Z по теории Бора равно r_B/Z, где r_B — боровский радиус. Радиус самого ядра определяется формулой (65.1). Таким образом, для возможности существования атома, во всяком случае, необходимо выполнение условия $r_B/Z \geqslant r_0 A^{1/3}$, или

$$ZA^{1/3} \leqslant \frac{r_B}{r_0} \approx 38\,000. \qquad (94.1)$$

Исключение Z с помощью соотношения (64.8а) приводит к неравенству

$$\frac{A^{4/3}}{1{,}97 + 0{,}015A^{2/3}} \lesssim 38\,000. \qquad (94.1\text{a})$$

Решение этого неравенства сводится к решению квадратного уравнения относительно $A^{2/3}$. В результате получается $A \lesssim 17700$ и, следовательно, $Z \lesssim 1460$. Итак, совершенно невозможно существование атомов с порядковым числом $Z \gtrsim 1460$.

Приведенная оценка дает слишком завышенное значение для верхней границы Z. Она, в сущности, основана на безусловно верном утверждении, что атом не может существовать, если ближайший к ядру электрон находится на уровне, с которого практически мгновенно происходит электронный захват, в результате которого зарядовое число Z (равное порядковому номеру элемента) уменьшается на единицу. А такой захват (из-за туннельного эффекта) с большой вероятностью происходит не только с расстояния до центра ядра, равного его радиусу, но и с расстояний, значительно больших. Поэтому стабильность электронной оболочки атома должна нарушаться уже при Z, значительно меньших найденного выше значения. Более подробное рассмотрение показывает, что такое нарушение должно начинаться при $Z = 180$–200. И все же периодическая система элементов обрывается еще раньше. Ее верхняя граница связана не с неустойчивостью электронной оболочки, а определяется *неустойчивостью самого ядра.*

3. Элементы с атомными номерами больше 92, как уже указывалось, называются *трансурановыми* («заурановыми») или, короче, *трансуранами.* Все они получаются искусственно, т. е. в результате различных ядерных реакций, в которых тот или иной (тяжелый) элемент подвергается облучению или бомбардировке различными ядерными частицами. Наиболее важными из них являются нейтроны, поскольку они лишены электрического заряда и, следовательно, им не требуется преодолевать кулоновский потенциальный барьер. Но и заряженные частицы являются эффективными снарядами для получения трансурановых элементов, если только их энергия достаточно велика.

При облучении нейтронами изотопа урана ^{238}U получается промежуточное ядро ^{239}U. Обладая излишком нейтронов, оно испытывает β^--распад и превращается в ядро трансуранового элемента с $Z = 93$. Этот элемент был назван *нептунием* (Np) по аналогии с Солнечной

системой, в которой за планетой Уран следует планета Нептун. Претерпевая дальнейший β^--распад, нептуний превращается в наиболее важный искусственный трансуран с $Z = 94$, названный *плутонием* (Pu), опять-таки по аналогии с Солнечной системой, в которой за Нептуном следует планета Плутон.

Такая схема получения трансуранов с $Z = 93$ и $Z = 94$ была абсолютно ясна Ферми уже в 1934 г., когда он начал облучать нейтронами уран. Правда, в то время Ферми не удалось наблюдать Np и Pu из-за их больших периодов полураспада (2, 3 дня для $^{239}_{93}\mathrm{Np}$ и $2{,}4 \cdot 10^4$ лет для $^{239}_{94}\mathrm{Pu}$) и слабости радон-бериллиевого источника нейтронов, которым он тогда пользовался. В опытах Ферми в действительности наблюдались не радиоактивные излучения трансуранов, а излучения радиоактивных изотопов, получающихся при *делении ядер урана* (см. § 93). Только после создания ядерных реакторов, из которых исходят мощные потоки нейтронов (до 10^{15} нейтронов через 1 см^2 в 1 с), открылась возможность получать Np и Pu и притом в промышленных масштабах. Их получение можно представить следующей схемой:

$$^1_0\mathrm{n} + {}^{238}_{92}\mathrm{U} \to {}^{239}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\beta^-} {}^{239}_{93}\mathrm{Np} \xrightarrow{\beta^-} {}^{239}_{94}\mathrm{Pu} \xrightarrow{\alpha} . \qquad (94.2)$$

Это, конечно, не единственная схема получения нептуния и плутония. Например, изотоп нептуния $^{238}_{93}\mathrm{Np}$ был получен в результате облучения урана $^{238}\mathrm{U}$ дейтронами с энергией 16 МэВ:

$$^2_1\mathrm{d} + {}^{238}_{92}\mathrm{U} \to {}^{238}_{93}\mathrm{Np} + 2\mathrm{n}. \qquad (94.3)$$

Всего в настоящее время известно не менее 12 изотопов нептуния с массовыми числами от 230 до 241. Изотоп нептуния $^{239}_{93}\mathrm{Np}$ представляет собой тяжелый ($\overline{\rho} = 19{,}5$ г/см^3) металл с серебристым блеском, медленно окисляющийся на воздухе. Температура плавления нептуния 640 °C.

В настоящее время известны не менее 15 изотопов плутония с массовыми числами от 232 до 246. Элемент плутоний — блестящий металл с голубоватым оттенком. Плотность его в разных модификациях изменяется от 15,9 до 19,8 г/см^3. Температура плавления плутония 640 °C. Коэффициент линейного расширения плутония отрицательный.

4. Путем облучения нейтронами плутония получается следующий трансуран с $Z = 95$. Он был получен в США и назван *америцием* (Am). Способ его получения в ядерном реакторе представляется следующей схемой:

$$^1_0\mathrm{n} + {}^{239}_{94}\mathrm{Pu} \to {}^{240}_{94}\mathrm{Pu},$$

$$^1_0\mathrm{n} + {}^{240}_{94}\mathrm{Pu} \to {}^{241}_{94}\mathrm{Pu} \xrightarrow{\beta^-} {}^{241}_{95}\mathrm{Am}.$$

Америций $^{241}_{95}\mathrm{Am}$ представляет собой серебристый металл с плотностью 11,7 г/см^3.

Облучение $^{241}_{94}$Am нейтронами с последующим β^--распадом промежуточного ядра приводит к образованию трансурана с $Z = 96$ по схеме

$$ {}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{241}_{95}\mathrm{Am} \to {}^{242}_{95}\mathrm{Am} \xrightarrow{\beta^-} {}^{242}_{96}\mathrm{Cm}. \tag{94.4}$$

Он был назван *кюрием* (Cm) в честь Марии и Пьера Кюри. Это также серебристый металл с плотностью 7 г/см^3. Он α-радиоактивен с периодом полураспада 160 дней. Его α-радиоактивность настолько велика (10^{13} α-частиц в 1 мин на 1 мг), что она приводит к разогреванию, разбрызгиванию и даже разложению воды в водных растворах солей кюрия, а также к свечению их в темноте.

Не вдаваясь в подробности, заметим, что 97-й и 98-й элементы также могут быть получены путем длительного облучения нейтронами плутония $^{239}_{94}$Pu в ядерных реакторах. Они были названы соответственно *берклием* (Bk) и *калифорнием* (Cf). Эти названия происходят от города Беркли (США) и Калифорнийского университета в Беркли, где впервые были получены рассматриваемые трансураны. Существуют различные способы получения берклия и калифорния, равно как америция и кюрия. Однако в больших количествах все эти элементы получаются только реакторным способом. В настоящее время известно 11 изотопов америция с массовыми числами от 237 до 247, 13 изотопов кюрия ($238 \leqslant A \leqslant 252$), 9 изотопов берклия ($243 \leqslant A \leqslant 251$) и 16 изотопов калифорния ($240 \leqslant A \leqslant 255$).

5. Реакторный способ, хотя он и является единственным способом получения трансуранов в больших количествах, все же не всегда применим. Оказалось, что следующие за калифорнием ($Z = 98$) новые элементы вблизи ядерного реактора упорно не появляются. Причина этого в том, что не все ядра одного и того же изотопа после поглощения нейтрона претерпевают β^--распад. Большая часть ядер или испытывает деление, или распадается иным способом, не приводящим к образованию нового элемента с большим атомным номером. Эти процессы идут тем интенсивнее, чем тяжелее атомные ядра, и, наконец, полностью вытесняют β^--распад. Можно было бы думать, что указанные трудности имеют только технический характер и могут быть преодолены путем повышения мощности реактора. Но помимо технических трудностей есть и трудности принципиальные, когда в результате длинного ряда радиоактивных превращений опять возникает исходный элемент, подвергнутый облучению нейтронами. К этому, в частности, может привести α-распад какого-либо ядра. Примером может служить следующая цепочка превращений:

$$ {}^{239}_{94}\mathrm{Pu} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \to {}^{240}_{94}\mathrm{Pu},$$

$$ {}^{240}_{94}\mathrm{Pu} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \to {}^{241}_{94}\mathrm{Pu} \xrightarrow{\beta^-} {}^{241}_{95}\mathrm{Am},$$

$$ {}^{241}_{95}\mathrm{Am} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \to {}^{242}_{95}\mathrm{Am} \xrightarrow{\beta^-} {}^{242}_{96}\mathrm{Cm} \xrightarrow{\alpha} {}^{238}_{94}\mathrm{Pu},$$

$$ {}^{238}_{94}\mathrm{Pu} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \to {}^{239}_{94}\mathrm{Pu}.$$

Непреодолимое препятствие для реакторного способа возникает также, когда одно из звеньев в цепочке превращений выпадает. Такое препятствие возникает, когда в этом звене время жизни ядра очень мало, а также тогда, когда ядро, входящее в звено, полностью распадается нежелательным образом, например путем спонтанного деления.

6. Указанные затруднения связаны прежде всего с тем, что при облучении нейтронами от ядерных реакторов облучаемое ядро, как правило, поглощает только один или малое число нейтронов. Если увеличить поток облучающих нейтронов во много раз, то некоторые ядра, возможно, будут поглощать сразу несколько нейтронов и окажутся в состоянии перепрыгнуть через «запрещенную» область в реакторном методе. Таким путем могут образовываться новые трансурановые элементы или новые изотопы уже известных элементов. И действительно, в 1952 г. в США произвели испытание водородной бомбы, в которой происходит сгорание дейтериево-тритиевой смеси. Реакция происходит при температуре порядка ста миллионов градусов и длится всего доли секунды. В течение такого короткого времени через урановую оболочку бомбы проходит поток нейтронов, на много порядков превышающий поток нейтронов в ядерных реакторах за то же время. В радиоактивной пыли, образовавшейся при взрыве, были обнаружены ранее неизвестные изотопы плутония ^{244}Pu и ^{246}Pu. Они образуются в результате захвата ядром ^{238}U сразу 6 или 8 нейтронов с последующим β^--распадом, т. е.

$$^{238}_{92}\mathrm{U} + 6\,^{1}_{0}\mathrm{n} \to {}^{244}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\beta^-} {}^{244}_{93}\mathrm{Np} \xrightarrow{\beta^-} {}^{244}_{94}\mathrm{Pu}, \tag{94.5}$$

$$^{238}_{92}\mathrm{U} + 8\,^{1}_{0}\mathrm{n} \to {}^{246}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\beta^-} {}^{246}_{93}\mathrm{Np} \xrightarrow{\beta^-} {}^{246}_{94}\mathrm{Pu}. \tag{94.6}$$

Американские ученые запросили срочно доставить с атолла Бикини, где произошел взрыв водородной бомбы, около тонны кораллов. После весьма кропотливого труда из этих кораллов были выделены ничтожные количества 99-го и 100-го элементов. Они были названы соответственно *эйнштейнием* и *фермием* в честь Эйнштейна и Ферми. Обнаруженные изотопы эйнштейния ($^{253}_{99}$Es) и фермия ($^{255}_{100}$Fm) получаются в результате следующих процессов. При взрыве водородной бомбы некоторые ядра урана одновременно захватывают 15 или 17 нейтронов. Последующая цепь β^--распадов и приводит к образованию новых трансуранов:

$$^{238}_{92}\mathrm{U} + 15\,^{1}_{0}\mathrm{n} \to {}^{253}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\beta^-} {}^{253}_{93}\mathrm{Np} \xrightarrow{\beta^-} \ldots \xrightarrow{\beta^-} {}^{253}_{99}\mathrm{Es}, \tag{94.7}$$

$$^{238}_{92}\mathrm{U} + 17\,^{1}_{0}\mathrm{n} \to {}^{255}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\beta^-} {}^{255}_{93}\mathrm{Np} \xrightarrow{\beta^-} \ldots \xrightarrow{\beta^-} {}^{255}_{100}\mathrm{Fm}. \tag{94.8}$$

Всего в настоящее время известно 14 изотопов эйнштейния с массовыми числами от 243 до 256 и 16 изотопов фермия с массовыми числами от 242 до 258. Эйнштейний и фермий характеризуются еще меньшими периодами полураспада относительно процессов спонтанного деления

и испускания α-частиц, чем предшествующие трансураны. Самый долгоживущий изотоп эйнштейния $^{254}_{99}$Es имеет период α-распада около 480 дней, а самый долгоживущий изотоп фермия $^{257}_{100}$Fm — только 80 дней. У изотопа фермия $^{256}_{100}$Fm очень небольшой период полураспада относительно спонтанного деления — всего около 160 мин.

Можно было бы надеяться, что дальнейшие трансураны могут быть получены таким же способом, что и эйнштейний и фермий, если только увеличить мощность потока облучающих нейтронов. Но эти надежды не оправдались. В 60-х годах в США была произведена серия подземных ядерных взрывов. Поток нейтронов в наиболее мощном из них по своей интенсивности превосходил примерно в 10 раз соответствующий поток на атолле Бикини. Но трансураны с атомным номером выше атомного номера фермия не образовывались. Причиной этого является спонтанное деление ядер. В цепочке ядерных превращений появляется ядро, практически мгновенно испытывающее спонтанное деление и тем самым обрывающее эту цепочку.

Изложенные методы не позволяют получить ядра с $Z > 100$. Причины — недостаточная плотность нейтронных потоков, малая вероятность захвата большого числа нейтронов и (что наиболее важно) быстрый радиоактивный распад ядер с $Z > 100$.

7. Для получения трансуранов с $Z > 100$ пришлось обратиться к более старому методу, который применялся еще до открытия нейтрона. В этом методе мишень, содержащую атомные ядра одного элемента, подвергали бомбардировке атомными ядрами другого элемента. Происходило столкновение двух атомных ядер, в результате чего образовывалось новое атомное ядро. Оно могло оказаться промежуточным и испытать в дальнейшем радиоактивный распад с образованием других атомных ядер. В качестве мишени брали чаще всего уран или какой-либо из ранее полученных трансуранов, а в качестве бомбардирующего ядра — более легкие атомные ядра, например α-частицы.

Недостаток метода состоит в том, что оба сталкивающихся ядра заряжены положительно, а потому они отталкиваются друг от друга. Принято говорить, что между ядрами существует *кулоновский потенциальный барьер.* Чтобы при проникновении частицы-снаряда внутрь ядра-мишени между этими частицами произошла ядерная реакция, необходимо этот барьер преодолеть. Это сделать тем легче, чем больше энергия бомбардирующей частицы.

Естественные α-частицы, испускаемые радиоактивными элементами, обладают сравнительно небольшими энергиями (не превышающими 8 МэВ). Хотя они и могут преодолевать потенциальный барьер, но это происходит только в результате маловероятного квантовомеханического эффекта — туннельного просачивания через барьер. Поэтому-то вместо α-частиц, возникающих при распаде, применяются искусственные α-частицы, т. е. ускоренные ионы гелия $^4_2$He, а также ускоренные ионы других элементов.

В 1940–1950 гг. в распоряжении физиков имелись только маломощные ускорители, которые могли ускорять до небольших энергий

лишь простейшие ядра водорода — протоны ${}_{1}^{1}\mathrm{H}$, дейтроны ${}_{1}^{2}\mathrm{H}$, а также ядра гелия ${}_{2}^{4}\mathrm{He}$ (α-частицы). Для синтеза нового трансурана сначала получали в реакторе ядра самого тяжелого из известных трансуранов и из них приготовляли мишень, а затем бомбардировали ее протонами, дейтронами или α-частицами. В результате получался элемент, атомный номер которого на одну или две единицы был больше, чем у ядра мишени.

Примерами могут служить ядерные реакции

$$ {}_{1}^{2}\mathrm{H} + {}_{92}^{238}\mathrm{U} \to 2\,{}_{0}^{1}\mathrm{n} + {}_{93}^{238}\mathrm{Np} \xrightarrow[\text{2,1 дня}]{\beta^-} {}_{94}^{238}\mathrm{Pu}, $$

$$ {}_{2}^{4}\mathrm{He} + {}_{94}^{239}\mathrm{Pu} \to {}_{96}^{242}\mathrm{Cm} + {}_{0}^{1}\mathrm{n}, $$

$$ {}_{2}^{4}\mathrm{He} + {}_{95}^{241}\mathrm{Am} \to {}_{97}^{243}\mathrm{Bk} + 2\,{}_{0}^{1}\mathrm{n}, $$

$$ {}_{2}^{4}\mathrm{He} + {}_{96}^{242}\mathrm{Cm} \to {}_{98}^{245}\mathrm{Cf} + {}_{0}^{1}\mathrm{n}, $$

с помощью которых впервые были синтезированы изотопы элементов 94, 96, 97, 98. Они были получены в США в 1940, 1944, 1949 и 1950 гг. соответственно. Отметим, что сначала был открыт кюрий, а потом америций. Впоследствии другие изотопы тех же элементов получались другими способами, в частности путем облучения ядер трансуранов и самого урана нейтронами. На образном языке технику эксперимента путем облучения трансуранов легкими заряженными частицами можно было бы назвать «легкой артиллерией».

Последним элементом, синтезированным с помощью «легкой артиллерии», был 101-й элемент, названный *менделевием* в честь великого русского химика Д. И. Менделеева. Его впервые удалось получить в Беркли (США) в 1955 г. в результате реакции

$$ {}_{2}^{4}\mathrm{He} + {}_{99}^{253}\mathrm{Es} \to {}_{101}^{256}\mathrm{Md} + {}_{0}^{1}\mathrm{n}. \tag{94.9} $$

Мишенью служил невидимый глазом тонкий слой атомов изотопа эйнштейния-253 (всего около миллиарда атомов), нанесенный на тонкую (тоньше человеческого волоса) золотую фольгу. На ускорителе в Беркли эта фольга облучалась α-частицами с энергией 41 МэВ. Альфа-частица, проникая в ядро эйнштейния, увеличивала его заряд на 2 единицы. В результате образовывались нейтрон и ядро 101-го элемента, которые попадали на расположенную сзади вторую золотую фольгу и осаждались на ней. Со второй фольги в первом опыте химикам удалось собрать всего 17 атомов 101-го элемента. И все же химики определили некоторые радиоактивные и химические свойства этого элемента. Работой по синтезу 101-го элемента руководил А. Гиорсо (р. 1915).

8. Все трансурановые элементы от 93-го до 101-го включительно были впервые получены в США под руководством Г. Сиборга (р. 1912) и А. Гиорсо. Для получения трансуранов с большими атомными номерами от «легкой артиллерии» требовалось перейти к «артиллерии среднего калибра», что и было сделано. В качестве снарядов для бомбардировки мишеней стали использоваться ускоренные ионы углерода

$_6$C, азота $_7$N, кислорода $_8$O, неона $_{10}$N, аргона $_{18}$Ar. Существенно, чтобы бомбардирующие ионы были многозарядными, так как при прочих равных условиях энергия, приобретаемая ионом в циклическом ускорителе, пропорциональна квадрату заряда иона. В середине 60-х годов лишь физики Дубны (СССР) и Беркли (США) располагали ускорителями, пригодными для ускорения ионов аргона.

В дальнейшем для бомбардировки мишеней стали применять еще более массивные ионы:

$$_{26}\mathrm{Fe},\ _{27}\mathrm{Co},\ _{28}\mathrm{Ni},\ _{29}\mathrm{Cu},\ _{30}\mathrm{Zn},\ _{32}\mathrm{Ge},\ _{36}\mathrm{Kr},\ _{54}\mathrm{Xe}$$

и т. д. вплоть до $_{92}$U включительно. Короче говоря, в строй вступила «тяжелая артиллерия». Но чем больше заряд ядра иона, тем до большей кинетической энергии должен быть ускорен ион. Действительно, чтобы ядро ускоренного иона могло слиться с ядром мишени, кинетическая энергия иона должна превышать высоту кулоновского барьера между ядрами. А последняя пропорциональна зарядам обоих сталкивающихся ядер. Например, кулоновский барьер для цинка ($Z = 30$) в 15 раз выше кулоновского барьера для α-частицы ($Z = 2$). Вот почему для использования тяжелых ионов требуются ускорители на высокие энергии.

Для ускорения ионов при получении новых трансуранов в США пользовались линейными ускорителями различных типов, в том числе и перезарядными линейными ускорителями (тандемами), принцип действия которых такой же, по которому работает соответствующий тандем-генератор Ван-де-Граафа (см. § 84, п. 2). Линейными ускорителями пользовались и ученые Дармштадта (ФРГ) и во многих других лабораториях мира. В СССР в Объединенном институте ядерных исследований (Дубна) в Лаборатории ядерных реакций, руководимой Г. Н. Флеровым, для получения новых трансуранов и изучения их свойств применялись циклотроны. Поскольку ученым Дубны при изучении трансуранов принадлежит ведущее место в мире, мы остановимся только на краткой характеристике этих циклотронов. При этом мы совершенно не будем касаться способов выделения полученного трансуранового изотопа из смеси или соединения его с другими элементами, а также способов идентификации заряда и массового числа соответствующего ему ядра, хотя эти вопросы не менее трудны и важны, чем и получение самого изотопа.

9. В 1961 г. в Дубне для ускорения тяжелых ионов был построен циклотрон У-300, который для того времени был самым мощным в мире и специально приспособлен для синтеза новых трансурановых элементов. (Число 300 означает, что диаметр полюсов магнита в циклотроне составляет 300 см, точнее, 310 см. Аналогично, символы У-200 и У-400 означают циклотроны с диаметрами полюсов магнитов 200 и 400 см соответственно.)

Энергия, приобретаемая ионом в циклотроне, пропорциональна квадрату заряда иона q, квадрату радиуса r полюсов магнита и квадрату напряженности магнитного поля H (см. задачу 2 к этому параграфу). Масса магнита в циклотроне У-300 2200 т, мощность высоко-

частотного генератора, питающего циклотрона 500 кВт, напряжение между высокочастотными электродами-дуантами 260 кВ.

В 1966 г. в Дубне появился новый циклотрон У-200. Он стал одним из лучших в своем классе ускорителей (т. е. ускорителей с такими же диаметрами полюсов магнита) и оказался непревзойденным по интенсивности пучка легких ионов, а это очень важно для синтеза трансуранов. На строившихся до него циклотронах того же класса напряженность магнитного поля составляла, как правило, 14–16 кГс с вариацией амплитуды относительно этого значения около 4 кГс. На циклотроне У-200 удалось довести напряженность поля до 20 кГс, а амплитуду — до 6. В результате энергия ускоряемых частиц на циклотроне увеличилась вдвое, если учесть ее зависимость от магнитного поля, отмеченную выше. На циклотроне У-200 впервые были синтезированы изотопы 106-го и 107-го элементов, о чем подробнее будет сказано ниже.

С момента вступления в строй циклотрона У-200 появилась возможность дальше повышать энергию ускоряемых ионов комбинацией циклотрона У-300 с меньшим циклотроном У-200. Таким путем получался *перезарядный* или *тандем-циклотрон*, работающий по принципу, сходному с тем, по которому работает тандем-генератор Ван-де-Граафа (см. § 84, п. 2). В тандем-циклотроне ион сначала ускорялся циклотроном У-300, затем поступал в циклотрон У-200, пройдя предварительно через угольную пленку толщиной 0,2 мкм. В пленке частично «обдирается» электронная оболочка иона, так что положительный заряд иона увеличивается. Благодаря этому появляется возможность дальнейшего ускорения иона в циклотроне У-200, хотя он и меньше циклотрона У-300. Однако этот метод не получил распространения из-за своей сложности, а главным образом потому, что интенсивность ионных пучков на выходе получалась очень малой.

На циклотроне У-200, как уже отмечалось выше, были произведены важные исследования по синтезу трансурановых элементов. Но циклотрон У-200 главным образом был задуман как уменьшенная вдвое модель более мощного циклотрона У-400, который вступил в строй в конце декабря 1979 г. Циклотрон У-400 проектировался как специализированный ускоритель для получения ускоренных пучков ионов средней массы от неона ^{20}Ne до серебра ^{108}Ag. При его сооружении был учтен опыт строительства, эксплуатации и модернизации циклотронов У-300 и У-200, а также тандем-циклотрона. В результате У-400 оказался лучшим в мире в своем классе ускорителей. В частности, при той же массе электромагнита и том же потребляемом им токе питания, что и у ускорителя У-300, интенсивность ускоренных пучков на циклотроне У-400 возросла в сотни раз.

10. Обращаемся к вопросу о синтезе трансурановых элементов после получения 101-го элемента — менделевия. В 1956 г. к работам по синтезу 102-го элемента приступили ученые Нобелевского института физики в Стокгольме, Калифорнийского института в Беркли и Института атомной энергии в Москве.

Не прошло и года, как из Нобелевского института сообщили, что на стокгольмском циклотроне при облучении мишени из кюрия $^{244}_{96}$Cm

ионами углерода $^{13}_{6}$C обнаружены атомы 102-го элемента. Авторы работы предложили называть новый элемент *нобелием* ($_{102}$No) в честь учредителя Нобелевской премии. Однако через несколько месяцев ученые в Беркли в точности воспроизвели стокгольмские опыты и не нашли активности с описанными свойствами. Но и они сообщили данные о свойствах якобы 102-го элемента, впоследствии опровергнутые. Поэтому и их работа не может претендовать на открытие 102-го элемента.

Впервые элемент 102, точнее, его изотоп ^{254}102 [1]) был с достоверностью синтезирован в Дубне в 1963 г. путем бомбардировки $^{238}_{92}$U ионами $^{22}_{10}$Ne и правильно по порядку величины был определен период полураспада синтезированного изотопа (уточненное значение этого периода 55 с). Эта работа и может претендовать на приоритет в получении 102-го элемента. Впоследствии данные, полученные в Дубне по всем изотопам 102-го элемента, были согласованы с данными, полученными в Беркли.

В 1961 г. из Беркли пришло сообщение о синтезе изотопа ^{257}103. Элемент с $Z = 103$ был назван *лоуренсием* в честь изобретателя циклотрона Лоуренса. Однако данные, сообщенные об изотопе ^{257}103, оказались ошибочными. Впоследствии сами авторы выразили сомнение в том, что массовое число обнаруженного ими изотопа равно 257, а не 258 или 259. В 1965 г. в Дубне с достоверностью был открыт изотоп ^{256}103 путем бомбардировки америция атомами изотопа кислорода:

$$^{18}_{8}\mathrm{O} + {}^{243}_{95}\mathrm{Am} \to {}^{256}103 + 5\,{}^{1}_{0}\mathrm{n}. \tag{94.10}$$

При этом были получены правильные данные о вновь открытом изотопе ^{256}103. Поэтому можно считать, что элемент 103 был также впервые синтезирован в Дубне в 1965 г.

Элементы 102 и 103 не получили еще общепринятых названий. Ученые социалистических стран, работающие в Объединенном институте ядерных исследований в Дубне, где впервые с достоверностью были синтезированы указанные элементы, предложили называть элемент 102 *жолиотием* (Jl) в честь Фредерика Жолио-Кюри, а элемент 103 — *резерфордием* (Rf) в честь Резерфорда. Но и эти названия до сих пор еще не получили всеобщего признания. Споры о приоритете открытия элементов 102 и 103 и их названиях продолжаются до сих пор. По этой причине мы условно и сохраняем первоначальные названия — нобелий и лоуренсий.

В 1964 г. в Дубне на циклотроне У-300 был синтезирован 104-й элемент (точнее, изотоп ^{260}104), названный *курчатовием* (Ku) в честь видного советского физика и организатора науки И.В. Курчатова (1903–1960). При синтезе этого элемента в качестве бомбардирующих частиц применялись ионы неона $^{22}_{10}$Ne с энергией 115 МэВ, а в качестве

---

[1]) Символ ^{254}102 означает, что порядковый номер элемента равен 102, а его массовое число 254. Такая символика употребляется тогда, когда название элемента еще не установлено.

мишени использовался $^{242}_{94}\mathrm{Pu}$. Происходила ядерная реакция

$$^{22}_{10}\mathrm{Ne} + ^{242}_{94}\mathrm{Pu} \to ^{260}_{104}\mathrm{Ku} + 4\,^{1}_{0}\mathrm{n}, \qquad (94.11)$$

в результате которой и получился указанный изотоп курчатовия. Всего в настоящее время открыто восемь изотопов курчатовия.

11. Во всех рассмотренных выше способах получения трансурановых элементов путем бомбардировки мишеней заряженными ионами в качестве мишеней брался либо уран, либо ранее полученный трансуран. Последним элементом, найденным таким путем, был элемент 105, впервые синтезированный в Дубне в 1970 г. в результате реакции

$$^{22}_{10}\mathrm{Ne} + ^{243}_{95}\mathrm{Am} \to ^{261}105 + 4\,^{1}_{0}\mathrm{n}. \qquad (94.12)$$

Он был назван *нильсборием* (Ns) в честь Нильса Бора.

В 1973 г. Ю. Ц. Оганесян в Дубне предложил вместо тяжелых радиоактивных мишеней применять обычный свинец. Это предложение основывалось на следующих соображениях. Бомбардирующее ядро должно быть ускорено до громадной кинетической энергии, достаточной для преодоления кулоновского потенциального барьера между этим ядром и ядром мишени. Пусть в результате взаимодействия этих ядер сначала образуется компаунд-ядро. Оно получается в сильно возбужденном, или, как принято говорить, в сильно «нагретом» состоянии. В дальнейшем происходит «остывание» ядра.

С точки зрения капельной модели механизм остывания аналогичен тому, который описан в предыдущем параграфе (см. п. 11). Сильно возбужденное компаунд-ядро начинает совершать колебания. Если эти колебания становятся достаточно интенсивными, то ядро принимает форму гантели (см. рис. 159, положение *3*). Из шейки гантели, как было выяснено в указанном параграфе, начинают интенсивно испаряться мгновенные нейтроны. За счет этого испарения и происходит остывание компаунд-ядра. При испускании нейтрона ядро может разделиться на части, но может и не разделиться. Испарение одного нейтрона без деления ядра — процесс, больше чем в 100 раз менее вероятный по сравнению с испарением, которое сопровождается делением. При испускании двух нейтронов доля ядер, не испытавших деления, уменьшается больше чем в $100^2 = 10\,000$ раз, при испускании трех нейтронов — больше чем в $100^3 = 1\,000\,000$ раз, и т. д.

Таким образом, чем больше нейтронов испустит компаунд-ядро при образовании нового трансуранового элемента, тем менее вероятно появление последнего.

Допустим сначала, что мишенью служит малоустойчивое, или «рыхлое», ядро. При слиянии его с ядром-снарядом лишь относительно малая часть энергии последнего тратится на дополнительное «разрыхление» образовавшегося компаунд-ядра. Основная доля энергии ядра-снаряда расходуется на дальнейшее возбуждение уже «рыхлого» компаунд-ядра. Поэтому последнее получается сильно возбужденным, или «горячим». Такая ситуация имеет место, когда мишенью служит тяжелое радиоактивное ядро. Так, при использовании ионов C, O, Ne и мишеней из Pu, Cm, Cf образуются сильно возбужденные ядра

с энергией возбуждения 40–60 МэВ. Каждый испаряемый нейтрон способен унести из ядра энергию, в среднем равную 10–12 МэВ, так что для «остывания» компаунд-ядра и образования более устойчивого трансурана из компаунд-ядра должно вылететь до 5 нейтронов. Подтверждением этого могут служить ядерные реакции (94.10), (94.11), (94.12), рассмотренные выше. Таким образом, вероятность образования трансурана будет очень малой.

Допустим теперь, что в качестве мишени берется очень устойчивое, или «плотноупакованное», ядро. Тогда ядро-снаряд предварительно «разрыхляет» его, на что тратится значительная доля энергии. Лишь оставшаяся энергия ядра-снаряда идет на дальнейшее возбуждение образовавшегося компаунд-ядра. Последнее получается менее возбужденным, или «холодным».

Наиболее устойчивыми плотноупакованными ядрами являются магические и в особенности дважды магические ядра. У ядер с магическим числом протонов энергия, как функция числа N нейтронов, минимальна. Минимальна энергия и у ядер с магическим числом нейтронов, если ее рассматривать как функцию зарядового числа Z. Для дважды магических чисел энергия минимальна уже как функция обоих переменных Z и N. Ядро изотопа свинца $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$ $(Z = 82, N = 126)$ дважды магическое, все остальные ядра этого элемента магические $(Z = 82, N \neq 126)$. Магическим является и ядро висмута $^{209}_{83}\mathrm{Bi}$. При использованиии мишеней из этих ядер компаунд-ядро получается сравнительна мало возбужденным. Так, при бомбардировке плотноупакованного ядра свинца ионами аргона, титана, хрома энергия возбуждения оказывается сравнительно низкой (всего 10–15 МэВ), так что для снятия возбуждения достаточно испускания уже одного-двух нейтронов. Примерами могут служить ядерные реакции (94.13), (94.14), приводимые ниже.

На основании изложенного можно было надеяться, что метод так называемого «холодного» или «магического» синтеза трансурановых элементов, предложенный Оганесяном, более эффективен, чем метод, в котором в качестве мишеней используются тяжелые радиоактивные элементы. Эти надежды оправдались.

12. Эффективность метода Оганесяна была испытана в Дубне прежде всего при облучении свинцовой мишени $_{82}\mathrm{Pb}$ ускоренными ионами $_{22}\mathrm{Ti}$. В результате этого сразу были открыты три новых изотопа курчатовия $_{104}\mathrm{Ku}$ (в зависимости от того, какие изотопы свинца и титана применялись на опыте). Несмотря на то что ускоренных ионов титана было в сотни раз меньше, чем ионов неона в реакции (94.11), на изучение свойств каждого изотопа курчатовия потребовалось всего несколько десятков часов работы циклотрона У-300, в то время как длительность первых опытов, в которых был синтезирован элемент 104, составляла свыше 10^4 ч.

Методом Оганесяна в Дубне в 1974 г. был открыт 106-й элемент. Он получался в реакции

$$^{54}_{24}\mathrm{Cr} + ^{207}_{82}\mathrm{Pb} \to ^{259}106 + 2\,^{1}_{0}\mathrm{n}, \tag{94.13}$$

а в 1976 г. в реакции

$$^{54}_{24}\mathrm{Cr} + ^{209}_{83}\mathrm{Bi} \to {}^{261}107 + 2\,^1_0\mathrm{n} \qquad (94.14)$$

был синтезирован 107-й элемент. Попутно были получены новые изотопы предшественников этих элементов по периодической системе Менделеева — от 100-го до 105-го.

Группа западно-германских экспериментаторов в Дармштадте на линейном ускорителе «Унилак» синтезировала методом Оганесяна новый изотоп 107-го элемента, воспроизвела и подтвердила многие другие результаты дубненских исследователей и получила ряд новых данных.

Предпринятые затем в Дубне и в Дармштадте попытки синтезировать 109-й элемент в реакции между висмутом ^{209}Bi и железом ^{58}Fe встретили затруднения. Выяснилось, что вероятность его образования в десятки раз меньше вероятности образования 107-го элемента. В 1982 г. в опыте западно-германских физиков, который длился двенадцать суток подряд, удалось зарегистрировать только одно событие, которое могло претендовать на распад 109-го элемента с атомной массой 266. Для дальнейшего продвижения вперед требовалось значительно повысить чувствительность опытов. В Дубне она была повышена в несколько десятков раз. Там же на рубеже 1982–1983 гг. в ходе 260-часового опыта было зафиксировано восемь событий, свидетельствовавших о рождении ядер 109-го элемента. Несмотря на столь малый эффект, можно было сделать первые общие суждения о свойствах этого элемента.

В начале 1984 г. в Дубне впервые были синтезированы два изотопа элемента 108 с массовыми числами 264 и 265. Они получались путем бомбардировки изотопов свинца $^{207}_{92}$Pb и $^{208}_{92}$Pb ионами железа ^{58}Fe. Изотоп с массовым числом 265 примерно в то же время был синтезирован и в Дармштадте. Весной 1984 г. в трех ядерных реакциях, проведенных на новом циклотроне У-400 (в реакциях свинца с железом и висмута с марганцем), были зарегистрированы 44 случая распада трех изотопов 108-го элемента с массовыми числами 263, 264 и 265. Все они чрезвычайно короткоживущи и распадаются не спонтанно, а испуская α-частицы. По спонтанному же делению они не менее живучи, чем 104-й и 106-й элементы, — вывод очень важный для теории и практики.

Одновременно три ядра 108-го элемента (точнее, изотопа ^{265}108) были зарегистрированы в аналогичной ядерной реакции, проведенной на ускорителе «Унилак» группой западно-германских физиков. Располагая уникальным, пока единственным в мире чрезвычайно селективным масс-спектрографом, западно-германские физики установили важнейшие характеристики изотопа ^{265}108: период полураспада — около 2 мс, энергия α-частиц — 10,4 МэВ.

В середине 1987 г. появилось сообщение о получении 110-го элемента периодической таблицы Менделеева. Ядро этого элемента было получено в Объединенном институте ядерных исследований в Дубне в результате бомбардировки тория и изотопов урана мощным пучком ускоренных ядер кальция и аргона. Всего было получено около 40 ядер 110-го элемента. Время жизни этих ядер оказалось порядка сотых долей

секунды. Для столь тяжелых элементов такое время жизни исключительно велико. Возможно, что это является указанием на существование острова стабильности сверхтяжелых элементов. Существование такого острова стабильности современная теория предсказывает в районе элементов с атомными номерами 110–114 (см. п. 13).

13. Трансурановые элементы испытывают все виды радиоактивного распада. Однако процессы β-распада относительно медленные; для ядер с $Z > 100$, имеющих короткие времена жизни относительно α-распада и спонтанного деления, роль β-распада невелика. С ростом Z конкуренция между спонтанным делением, α- и β-распадами проявляется все более отчетливо.

Нестабильность относительно спонтанного деления и определяет верхнюю границу периодической системы элементов. Период полураспада относительно спонтанного деления $^{238}_{92}$U равен 10^{16} лет, $^{239}_{94}$Pu — 10^{10} лет, $^{255}_{100}$Fm — 20 ч. Для $^{260}_{104}$Ku он снижается до 0,1 с, а для 106-го и 107-го элементов измеряется тысячными долями секунды.

Естественно, возникает вопрос, почему физики упорно работают над получением столь короткоживущих элементов и исследованием их свойств? К тому же такие элементы получаются в ничтожных количествах, иногда составляющих всего несколько атомов. Возможно, что в чисто научном отношении это и представляет интерес, но на непосредственное практическое применение рассматриваемых элементов вряд ли можно рассчитывать. Однако такое заключение в настоящее время является поспешным.

В 1966 г. В.М. Струтинский предложил метод расчета ядерных оболочек, который неплохо воспроизводил периодические изменения свойств изученных ядер. Экстраполируя найденные таким путем закономерности на неисследованную область, можно было попытаться предсказать свойства еще не полученных трансуранов. В последующее десятилетие физиками разных стран были произведены расчеты на самых сложных вычислительных машинах. Согласно этим расчетам ядра с числом протонов 114 или числом нейтронов 184 должны быть магическими, а ядро $^{298}114$ — дважды магическим.

Гипотетические элементы с числом протонов, близким к 114, и числом нейтронов около 184 называются *сверхэлементами*, а их ядра — *сверхядрами.* Есть основание ожидать, что сверхядра должны характеризоваться повышенной стабильностью, проявляющейся в относительно больших временах жизни. Поэтому совокупность значений Z и A сверхэлементов называют *островом стабильности.*

Основными типами радиоактивного распада сверхядер являются спонтанное деление и α-распад. По теории самым устойчивым по отношению к спонтанному делению должно быть дважды магическое ядро $^{298}114$. Однако время жизни по отношению к α-распаду у всех ядер сильно уменьшается с увеличением зарядового числа Z. Конкуренция между α-распадом и спонтанным делением должна по теории приводить к тому, что самым долгоживущим сверхэлементом будет изотоп $^{294}110$. Ожидается, что наиболее вероятное время жизни для него должно составлять 10^8–10^9 лет. Однако этот вывод основан на

теории ядра, а она далеко не совершенна. Удовлетворительная теория ядра еще не создана. Не исключено, что истинное время жизни во много раз больше или меньше приведенного выше, а самым долгоживущим ядром окажется одно из ядер с зарядовым числом между 108 и 126.

Предсказываемое теорией поведение гипотетических элементов в окрестности магического ядра $^{298}114$ характеризуется резким изменением устойчивости и времени жизни даже при незначительных изменениях хотя бы одного из чисел Z или N. Так, если у самого долгоживущего ядра $^{294}110$ изменить всего на 2–3 единицы число протонов или нейтронов, то время жизни по теории уменьшится примерно в миллионы раз. Такой эффект аналогичен тому, что наблюдается у обычных элементов в окрестности предшествующего дважды магического ядра свинца $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$. Это ядро настолько устойчиво, что его радиоактивный распад никому еще не удавалось наблюдать. Но стоит к нему добавить всего один нейтрон, как время жизни полученного изотопа $^{209}_{82}\mathrm{Pb}$ из-за β^--распада снизится до 4,8 ч.

Таким образом, по теории при приближении к сверхэлементам и в их окрестности время жизни меняется нерегулярно: с возрастанием атомного номера оно то уменьшается, то снова увеличивается, достигая очень больших значений для некоторых изотопов на острове стабильности, так что они могут считаться практически стабильными. В этом отношении элементы в окрестности дважды магического ядра $^{298}114$ ведут себя аналогично элементам в окрестности предшествующего дважды магического ядра $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$. У таллия $(Z = 81)$ и следующих за ним свинца и висмута есть изотопы со столь большими временами жизни, что эти времена практически не удается измерить. За висмутом идут радиоактивные элементы: полоний $(Z = 84)$, астат $(Z = 85)$, радон $(Z = 86)$ ... Все изотопы элементов от полония до актиния превращаются в дочерние за очень короткие времена. Зато периоды полураспада наиболее стабильных изотопов урана и тория — элементов с большими порядковыми номерами — равны соответственно 4,5 и 14 млрд лет и сравнимы с возрастом Земли. Нептуний, плутоний, америций, кюрий менее радиоактивны, чем полоний или радий, хотя их порядковые номера значительно выше.

14. Если гипотетический остров стабильности действительно существует и если бы удалось найти способ синтезирования долгоживущих сверхэлементов в макроскопических количествах, то научно-техническое значение такого открытия было бы трудно переоценить. Поэтому понятен интерес ученых к вопросу о сверхэлементах.

Вопрос о существовании сверхэлементов, в особенности стабильных и долгоживущих, может быть окончательно решен только экспериментально. Для этой цели можно воспользоваться уже рассмотренным нами методом синтеза трансурановых элементов путем слияния ядра-мишени с ядром-снарядом с последующим охлаждением образовавшегося компаунд-ядра в процессе испускания нейтронов. Помимо этого метода слияния есть и другой метод получения трансурановых элементов — метод деления ядер, предложенный Г.Н. Флеровым в 1965 г. В этом методе для бомбардировки урана используются ускоренные тяжелые

ионы (Xe, U). Ядро-снаряд на очень короткое время (порядка 10^{-21} с) слипается с ядром-мишенью с образованием сильно перегретого гантелеобразного ядра, быстро вращающегося вокруг его центра масс (см. задачу 4 к этому параграфу). В это время нуклоны в количестве до нескольких десятков имеют возможность перейти из одной половины гантелеобразного ядра в другую. Затем под действием громадной центробежной силы гантелеобразное ядро разрывается. Образовавшиеся осколки, будучи сильно перегретыми, сами испытывают деление. В результате деления образуются сотни изотопов самых разных элементов, в том числе и тяжелых.

И действительно, уже в первом опыте в Дубне на тандем-циклотроне были обнаружены нейтроноизбыточные ядра тяжелых трансуранов, которые ранее получались при термоядерных взрывах.

В дальнейшем подобные опыты неоднократно повторялись не только в Дубне, но и в других странах, в частности в ФРГ (Дармштадт), где был использован наиболее мощный в мире ускоритель ионов урана, причем мишенью служил также уран. Ученые ФРГ обнаружили, что ядерные «гантели» чаще всего делятся на два равных ядра урана. Более тяжелые и легкие осколки встречались реже. Чем больше различие в массах осколков, образовавшихся при делении ядерной «гантели», тем менее вероятно такое деление. Была надежда, что среди изотопов, образовавшихся при делении, появятся и изотопы сверхэлементов. Но эта надежда не оправдалась. С большим трудом удалось найти лишь ничтожные количества 102-го элемента.

15. Во многих лабораториях мира пытались найти ядерные реакции, в которых, по предположению, должны получаться магические ядра $^{298}114$, хотя бы и в ничтожных количествах. Примерами могут служить предполагаемые реакции

$$^{238}_{92}\mathrm{U} + {}^{238}_{92}\mathrm{U} \to {}^{476}184 \to {}^{166}_{70}\mathrm{Yb} + {}^{298}114 + 12\,{}^{1}_{0}\mathrm{n}, \tag{94.15}$$

$$^{136}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{238}_{92}\mathrm{U} \to {}^{374}146 \to {}^{298}114 + {}^{72}_{32}\mathrm{Ge} + 4\,{}^{1}_{0}\mathrm{n}. \tag{94.16}$$

Однако практически осуществить все гипотетические реакции подобного рода пока никому не удалось. Таким образом, на вопрос о существовании острова стабильности сверхэлементов опыты пока не дают ответа.

16. Быть может, сверхэлементы или следы их существования надо искать в самой природе — на Земле или, лучше, в метеоритах? Не останавливаясь на подробностях, ограничимся только некоторыми, далеко не полными, принципиальными замечаниями по этому трудному вопросу.

Ядра урана и всякого трансуранового элемента испытывают спонтанное деление. Получающиеся осколки в момент своего образования обладают большой кинетической энергией — порядка 100 МэВ. Если деление произошло в кристаллической среде (минерале), то, двигаясь в ней, осколок до замедления производит множество разрушений — ведь атомы в решетке связаны относительно слабыми силами, для преодоления которых достаточно всего 2–3 эВ. Осколки оставляют в среде следы, или треки, в виде микроскопически узких каналов. Подвергнув минерал травлению, т. е. подействовав на него подходящей кислотой или щелочью, эти каналы можно расширить в сотни раз, так как вещество нарушенных участков кристалла гораздо легче

подвергается травлению, чем ненарушенных. Расширенные треки легко увидеть в обычный оптический микроскоп (с увеличением в 100 и более раз).

Продукты деления, накапливающиеся при делении, являются изотопами элементов, лежащих в середине периодической системы. Они могут быть выделены из исследуемого минерала, например, при нагревании его до 1000 °C и выше (разумеется, для этого не требуется производить травления минерала), а затем подвергнуты анализу с помощью масс-спектрографа. По изотопному составу того или иного элемента можно однозначно судить о том, какие ядра испытали спонтанное деление, в результате которого образовались выделенные элементы. Конечно, за время, прошедшее с момента образования изотопов, часть их могла рассеяться и уйти из исследуемого образца. Однако это обстоятельство не играет роли, так как для рассматриваемого метода существен лишь *относительный* изотопный состав, а не абсолютные количества образовавшихся изотопов. А относительный изотопный состав одного и того же элемента не меняется при их рассеянии.

В изложенном методе наиболее удобны изотопы ксенона, так как естественная распространенность этого элемента в земных и космических минералах очень мала — она в миллионы и миллиарды раз меньше, чем распространенность других химических элементов. Поэтому даже незначительные добавки ксенона, образующиеся при делении, легко зафиксировать на слабом фоне обычного ксенона, содержащегося, например, в атмосфере. У других элементов природный фон полностью маскирует такие добавки.

Для проблемы обнаружения следов спонтанного деления ядер сверхэлементов более подходящими являются минералы космического, а не земного происхождения. Дело в том, что на Земле такие следы не могут сохраняться столь длительное время, как это возможно в метеоритах. На Земле они исчезают под действием многочисленных разрушающих факторов. При исследовании рассматриваемой проблемы предпочтение было отдано *метеоритам-ахондритам*. Так называются метеориты, в состав которых входят *хондры* — затвердевшие капли силикатного вещества, возможно, образовавшегося еще в начальной стадии формирования Солнечной системы. Размеры хондр колеблются от долей миллиметра до сантиметров.

17. При исследовании кристаллов минералов, извлеченных из некоторых метеоритов-ахондритов, были обнаружены миллионы следов осколков деления каких-то ядер на каждом квадратном сантиметре. Однако сами ядра обнаружены не были. Естественно было предположить, что время жизни их недостаточно велико, так что за время существования Солнечной системы они полностью распались. Что же это за ядра?

При термоядерных взрывах, как уже говорилось в п. 6, обнаружен плутоний-244 — наиболее долгоживущий элемент из всех известных трансурановых элементов (период полураспада ^{244}Pu равен $8{,}3\cdot10^7$ лет). Состояние вещества, подобное тому, какое было при термоядерном взрыве, но уже в громадных космических масштабах существовало и при возникновении Солнечной системы — в период образования химических элементов. Несомненно, что в этот период образовывался и плутоний-244, и другие трансурановые элементы, но к настоящему времени все они полностью исчезли на Земле из-за сравнительно коротких времен жизни.

Следы спонтанного деления ядер, оставленные в метеоритах-ахондритах, не могут принадлежать ядрам урана-238 или тория-232, так как в противном случае эти долгоживущие элементы сохранились бы в метеоритах до настоящего времени, как это имеет место на Земле. Можно думать, что эти следы оставлены ядрами трансуранов. Однако все известные относительно короткоживущие трансураны должны быть сразу же исключены, поскольку они распались бы еще задолго до затвердевания метеоритов. Исключение

составляет только самый долгоживущий трансуран, а именно плутоний-244. Только он мог оставить рассматриваемые следы, а затем еще задолго до настоящего времени полностью исчезнуть из метеоритов. Это предположение подтвердилось экспериментально.

В метеоритах сохранились не только треки, оставленные осколками деления ядер, но и сами осколки в виде соответствующих атомов. Эти атомы частично можно было извлечь из метеоритов путем нагревания их до температуры 1000–1200 °C и масс-спектроскопически определить изотопный состав извлеченного газа. Оказалось, что в этом газе среди прочих изотопов содержатся и изотопы ксенона, представляющие для нас основной интерес. Как уже подчеркивалось, важно знать только относительное содержание изотопов ксенона, а не количество его, сохранившееся в метеорите.

С другой стороны, в потоке нейтронов, исходящем из ядерного реактора, синтезируется множество элементов, в том числе и ^{244}Pu. Несколько миллиграммов этого изотопа было помещено в кварцевую ампулу, из которой затем был выкачан воздух, после чего сама ампула была герметически запаяна. Из-за спонтанного деления ядер плутония в ампуле среди прочих продуктов образовывался и ксенон. Примерно через два года ампулу вскрыли, а образовавшийся ксенон был исследован с помощью масс-спектрометра. Хотя за это время путем деления распалась мизерная часть плутония-244, однако при высокой чувствительности современных приборов ее оказалось достаточно, чтобы исследовать изотопный состав полученного ксенона. Он оказался в точности таким же, как и в метеоритах-ахондритах. Это и доказывает, что следы деления, наблюдавшиеся в метеоритах, оставлены ядрами именно плутония-244.

18. Возникла идея, что в углистых метеоритах-хондритах надо искать следы деления ядер гипотетических сверхэлементов. (Углистыми называют метеориты, в состав которых входят углеродсодержащие минералы и соединения. В этих веществах в метеорите и содержатся хондры.) Их былое существование можно было бы обнаружить по изотопному составу ксенона, содержащегося в метеоритах. В основе такой идеи лежали следующие соображения. На основе квантовой механики с использованием ЭВМ было рассчитано строение электронных оболочек гипотетических сверхтяжелых атомов и тем самым определены их химические свойства. Оказалось, что наиболее устойчивые сверхэлементы должны быть химическими аналогами легколетучих элементов вроде свинца. А из всех метеоритов наиболее богаты такими элементами именно углистые метеориты.

Из углистых метеоритов-хондритов путем нагревания до 1000–1200 °C были выделены нейтроноизбыточные изотопы ^{136}Xe, ^{134}Xe, ^{132}Xe и ^{131}Xe. Казалось, что эти изотопы выделялись при делении ядер какого-то трансурана. Но все ядра известных трансуранов при делении не выделяют ксенон с таким же изотопным составом. Первоначально это считалось доказательством былого существования сверхэлемента, при делении ядер которого и получился ксенон наблюдаемого изотопного состава. Однако такое заключение вскоре было опровергнуто. Действительно, непосредственно при делении сначала получаются нейтроноизбыточные, но β^--неустойчивые ядра (см. § 93, п. 11). Претерпев β^--распад, они в конце концов переходят в стабильные ядра ксенона. Эти стабильные ядра также еще должны быть нейтроноизбыточными. Нейтронодефицитные ядра ксенона при делении получиться не могут. А между тем в метеоритах они содержатся. Оказалось, что чем больше нейтроноизбыточных стабильных ядер, тем больше и нейтронодефицитных стабильных ядер. Это не согласуется с предположением, что все стабильные изотопы ксенона в метеоритах получились в результате деления. Другие контрольные опыты также подтвердили такое заключение.

Таким образом, исследование изотопного состава ксенона в метеоритах не принесло доказательства существования в настоящее время или в отдаленном прошлом сверхэлементов. Другие методы, основанные на измерении длины треков в метеоритах и на Земле, также пока не дали окончательного ответа на вопрос о существовании сверхэлементов. Для этого требуются дальнейшие исследования.

ЗАДАЧИ

1. Для качественного уяснения влияния электронного захвата на стабильность электронной оболочки атома можно предположить, что захват электронов как бы мгновенно происходит с боровской орбиты с главным квантовым числом n. Исходя из такого представления, оценить наименьшее значение числа Z, выше которого стабильность электронной оболочки атома становится невозможной, предполагая, что $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Решение. Такое представление эквивалентно предположению, что внутри сферы с радиусом n-й боровской орбиты электронов нет, а размер ядра (при том же заряде) как бы увеличен до размеров этой сферы. Но радиус n-й боровской орбиты пропорционален n^2. Тем самым задача свелась к задаче, разобранной в п. 2, если только в уравнении (94.1) r_0 заменить на $r_0 n^2$. Иначе говоря, надо оперировать с неравенством

$$\frac{A^{4/3}}{1{,}97 + 0{,}015A^{2/3}} \lesssim \frac{38\,000}{n^2}. \tag{94.1б}$$

Из него находим, что для стабильности электронной оболочки необходимо выполнение условий:

$$Z \lesssim 1460 \quad (n = 1), \qquad Z \lesssim 370 \quad (n = 3),$$

$$Z \lesssim 630 \quad (n = 2), \qquad Z \lesssim 250 \quad (n = 4),$$

$$Z \lesssim 185 \quad (n = 5).$$

2. Определить в нерелятивистском приближении кинетическую энергию, приобретаемую зарядом q массой m, если радиус орбиты, по которой он вращается, равен r, а магнитное поле H однородно.

Ответ. $\mathscr{E} = q^2R^2H^2/(2mc^2)$.

3. Ядро ускоренного иона ^{238}U сталкивается с покоящимся ядром того же урана и на короткое время сливается с ним в гантелеобразное вращающееся ядро. Оценить минимальную угловую скорость вращения ω полученного гантелеобразного ядра.

Решение. Момент импульса вращающегося гантелеобразного ядра определяется формулой $L^2 = l(l+1)\hbar^2$, в которой следует положить $l = 1$. Таким образом, $L = \sqrt{2}\hbar$. С другой стороны, $L = J\omega$, где J — момент инерции гантелеобразного ядра относительно его центра масс. Для оценки J заменим гантель двумя соприкасающимися ядрами урана. Момент инерции сплошного шара относительно касательной к нему равен $(7/5)mr^2$, а двух шаров относительно общей касательной — $(14/5)mr^2$. Радиус ядра урана $r = 8{,}7 \cdot 10^{-13}$ см, $m = 4 \cdot 10^{-22}$ г, $J = 8{,}5 \cdot 10^{-46}$ г $\cdot$ см^2. Следовательно,

$$\omega = \frac{\sqrt{2} \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-27}}{8{,}5 \cdot 10^{-46}} = 1{,}7 \cdot 10^{18}\ \text{c}^{-1}.$$

4. В урановых рудах обнаружены ничтожные количества $^{239}_{94}$Pu. Такой плутоний образуется из $^{238}_{92}$U под действием нейтронных потоков, всегда имеющихся в руде. Нейтронные потоки в свою очередь возникают и поддерживаются при спонтанном делении ядер урана или под действием космических лучей.

Оценить долю атомов $^{239}_{94}$Pu, отнесенную к числу атомов руды, предполагая, что руда состоит из чистого урана-238 и что плутоний образуется только под действием нейтронов от спонтанного деления ядер урана. Период полураспада урана-238 относительно спонтанного деления $T^{\mathrm{U}}_{1/2} \approx 10^{16}$ лет, плутония $T^{\mathrm{Pu}}_{1/2} \approx 2{,}4 \cdot 10^4$ лет.

Решение. Предположим, что каждый нейтрон, возникающий при спонтанном делении ядра урана, поглощается ядром того же урана с образованием плутония. Как при всяком радиоактивном равновесии, искомая доля плутония $N_{\mathrm{Pu}}/N_{\mathrm{U}}$ найдется из требования, чтобы число распадающихся в единицу времени при спонтанном делении ядер урана было равно числу распадающихся за то же время ядер плутония. Это дает

$$N_{\mathrm{Pu}}/N_{\mathrm{U}} = T^{\mathrm{U}}_{1/2}/T^{\mathrm{Pu}}_{1/2} \approx 10^{-12}.$$

В действительно встречающихся рудах отношение числа атомов плутония к числу атомов руды примерно на два порядка меньше приведенного значения. Причина расхождения заключается в том, что $N_{\mathrm{U}} < N_{\text{руды}}$, а главное в том, что большая часть нейтронов, возникающих при спонтанном делении ядер урана, поглощается ядрами других веществ руды, а также уходит наружу. Кроме того, не всякий нейтрон, поглощенный ядром урана, вызывает деление.

§ 95. Цепная реакция и ядерные реакторы

1. При делении тяжелых ядер освобождается энергия, равная в среднем около 200 МэВ на каждое делящееся ядро (см. § 93). Эта величина в сотни миллионов и миллиарды раз превосходит энергию, освобождающуюся в единичном акте химических реакций (последняя величина в лучшем случае составляет несколько электронвольт, а обычно — десятые и даже сотые доли электронвольта). Энергия, освобождающаяся при делении атомных ядер, называется *ядерной* или *атомной энергией*. Ее получение в больших макроскопических количествах производится в *ядерных реакторах*. Теория ядерных реакторов, включающая наряду с физическими множество технических проблем, весьма обширна и сложна. Из этой теории в общем курсе физики, понятно, можно затронуть только немногие принципиальные вопросы чисто физического порядка.

Вещества, используемые в ядерных реакторах для осуществления ядерных реакций деления, называются *ядерным топливом*. В природе в естественном состоянии встречается только одно ядерное топливо — уран. Естественный уран содержит примерно 0,7 % изотопа ^{235}U. Собственно, изотоп ^{235}U и является *ядерным горючим*, поддерживающим реакцию ядерного деления. В естественном уране почти 99,3 % составляет изотоп ^{238}U. Он, а также ^{232}Th являются сырьевыми материалами, из которых искусственно получаются делящиеся изотопы ^{239}Pu и ^{233}U, являющиеся также ядерным горючим. Но эти изотопы в естественном

состоянии в природе не встречаются. Плутоний-239 получается в реакции (94.2), а уран-233 — в реакции

$$ {}^{232}_{90}\mathrm{Th}(\mathrm{n},\gamma){}^{233}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow[22,4\text{ мин}]{\beta^-} {}^{233}_{91}\mathrm{Pa} \xrightarrow[27,4\text{ дня}]{\beta^-} {}^{233}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow[1,6\cdot 10^5\text{ лет}]{\alpha} . \tag{95.1} $$

Высшие трансураны — америций, кюрий, берклий, калифорний, ввиду трудности и дороговизны их получения, не могут быть использованы для освобождения ядерной энергии в больших количествах.

Основную роль в ядерной энергетике играют ядра изотопов ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, ${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$, ${}^{233}_{92}\mathrm{U}$, содержащие нечетное число нейтронов, так как они делятся нейтронами любых энергий, в том числе и тепловыми. Под *тепловыми* понимают нейтроны, энергия которых порядка kT. При комнатной температуре (300 K) $kT \approx 4{,}14 \cdot 10^{-14}$ эрг $\approx$ 0,025 эВ. При таких малых энергиях сечение деления пропорционально $1/v$, где v — скорость нейтрона. Если энергия нейтрона $\mathscr{E} \gtrsim 1$ МэВ, то такие нейтроны называются *быстрыми.* Ядра ${}^{238}\mathrm{U}$ и ${}^{232}\mathrm{Th}$ медленными нейтронами не делятся, а делятся только быстрыми нейтронами.

Важнейшей величиной, характеризующей делящееся ядро, является среднее число вторичных нейтронов ν, вылетающих при делении одного ядра. Другая величина η характеризует уже не отдельное ядро, а однородную среду из одинаковых ядер, причем размеры среды достаточно велики (в пределе — бесконечно велики). Это есть среднее число вторичных нейтронов, приходящееся на единичный акт захвата нейтрона ядром. Числа ν и η не совпадают между собой, так как нейтроны в среде вызывают не только деление ядер, но также захватываются последними, не производя деления, но испуская γ-кванты, т. е. вступают в реакцию *радиационного захвата* (n, γ). (Упругое рассеяние нейтронов на ядрах в размножении числа нейтронов непосредственной роли не играет.) Пусть $\sigma_{\mathrm{n}f}$ — сечение деления, а $\sigma_{\mathrm{n}\gamma}$ — сечение радиационного захвата. Тогда средняя доля ядер, способных к делению и фактически испытавших последнее, будет $\sigma_{\mathrm{n}f}/(\sigma_{\mathrm{n}f} + \sigma_{\mathrm{n}\gamma})$. Среднее число испущенных вторичных нейтронов, приходящееся на один акт захвата нейтрона способным к делению ядром, будет

$$ \eta = \nu \frac{\sigma_{\mathrm{n}f}}{\sigma_{\mathrm{n}f} + \sigma_{\mathrm{n}\gamma}}. \tag{95.2} $$

Все величины, входящие в эту формулу, зависят от энергии нейтронов, так что сама формула относится только к моноэнергетическим нейтронам.

В табл. 16 приведены значения ν и η для ядер, делящихся тепловыми и быстрыми нейтронами. В области не слишком больших возбуждений ядра ($\mathscr{E} \lesssim 10$ МэВ) при возрастании энергии возбуждения на 1 МэВ число ν увеличивается примерно на 0,11.

2. Из табл. 16 видно, что $\eta > 1$ (и притом заметно больше единицы). Это есть необходимое (но недостаточное) условие для осуществления *цепной ядерной реакции деления атомных ядер.* Термин «цепная реакция» заимствован из химии. Под цепной понимают такую реакцию, в которой воспроизводится, и притом в большем количестве, одно из

исходных реагирующих веществ, которое вновь вступает в такую же реакцию. В результате это вещество снова воспроизводится, но в еще большем количестве.

Таблица 16

Ядро		$^{233}_{92}$U	$^{235}_{92}$U	$^{239}_{94}$Pu
Тепловые нейтроны ($\mathscr{E} = 0{,}025$ эВ)	ν	2,48	2,42	2,86
	η	2,28	2,07	2,11
Быстрые нейтроны ($\mathscr{E} = 1$ МэВ)	ν	2,59	2,52	2,98
	η	2,45	2,3	2,7

В цепной ядерной реакции деления атомных ядер воспроизводятся нейтроны. Приведем идеализированный пример такой реакции. Пусть тело достаточно больших размеров (что считается достаточно большим, выяснится само собой в ходе изложения) состоит из чистого урана-235. Допустим, что в результате спонтанного деления или под действием космических лучей в теле появился нейтрон. Отвлекаясь от всех усложняющих обстоятельств, примем для простоты, что каждый нейтрон рано или поздно захватывается одним из ядер ^{235}U и вызывает деление последнего с возникновением двух новых нейтронов, которые мы будем называть нейтронами *первого поколения.* Эти два нейтрона в свою очередь вызовут деление двух ядер; в результате появятся четыре нейтрона *второго поколения.* На смену четырем нейтронам второго поколения придут $2^3 = 8$ нейтронов *третьего поколения*, и т. д. Число нейтронов n-го поколения будет экспоненциально нарастать со временем.

Среднее время жизни одного поколения нейтронов в уране-235 порядка 10^{-7}–10^{-8} с. Возьмем для примера завышенное значение 10^{-7} с. Тогда уже через время 10^{-5} с после начала реакции появятся нейтроны сотого поколения в количестве $N_{100} = 2^{100} = 1{,}27 \cdot 10^{30}$. Всего за это время произойдет $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{100} \approx 2^{101} \approx 2{,}54 \cdot 10^{30}$ ядерных делений с выделением энергии $200{\cdot}2{,}54{\cdot}10^{30} \approx 5{\cdot}10^{32}$ МэВ $\approx 8 \cdot 10^{26}$ эрг. Это вызовет колоссальный взрыв, средняя мощность которого равна около $8 \cdot 10^{31}$ эрг/с. Для сравнения заметим, что полная мощность излучения Солнца составляет $3{,}8 \cdot 10^{33}$ эрг/с. Масса всех ядер урана-235, претерпевших деление за рассматриваемое время, будет $235 \cdot 1{,}68 \times \times 10^{-24} \cdot 2{,}54 \cdot 10^{30} \approx 10^9$ г $\approx 10^6$ кг $= 10^3$ т. Поэтому, чтобы рассматриваемый взрыв мог произойти реально и реакция деления к рассматриваемому моменту времени не затухла, начальное количество делящегося вещества должно быть заметно больше 10^3 т. В земных условиях приведенные числа нереальны. Однако проведенные вычисления могут служить хорошим примером для уяснения принципа действия атомной бомбы.

3. Цепная реакция деления и есть основной процесс, который идет в ядерных реакторах. Объем, занимаемый делящимся веществом, называется *активной зоной* реактора. Цепная реакция практически осу-

ществляется на так называемом *обогащенном уране.* Как уже было сказано, основную массу естественного урана составляет изотоп ^{238}U (99,3 %), а изотоп ^{235}U содержится в нем в количестве примерно 0,7 %. В обогащенном уране содержание изотопа ^{235}U доводится до 2–5 %. Обогащение естественного урана производится путем *разделения изотопов.* Это очень длительный и дорогостоящий процесс. Его практически невозможно осуществить химическими методами, так как химические свойства изотопов ^{235}U и ^{238}U почти одинаковы. Приходится применять различные физические методы, использующие небольшое различие масс атомов подлежащих разделению изотопов. К таким методам в случае тяжелых элементов относятся главным образом *газовая диффузия* через пористые перегородки, *термодиффузия*, *центрифугирование*, *электромагнитный метод разделения изотопов.* Изотоп ^{235}U, добавляемый к естественному урану, может быть заменен плутонием-239 или ураном-233, свойства которых по отношению к реакции деления аналогичны свойствам урана-235.

Для смеси изотопов, заполняющей активную зону, сохраняет смысл введенный выше коэффициент η, как среднее число вторичных нейтронов деления, приходящееся на один нейтрон, поглощенный смесью. Но формула (95.2), разумеется, в этом случае неприменима. Если делящимся является только один изотоп в смеси, то она должна быть заменена на

$$\eta = \frac{\nu\sigma_{\mathrm{n}f}}{\sigma_{\mathrm{n}t}}, \tag{95.3}$$

где $\sigma_{\mathrm{n}f}$ — сечение деления, а $\sigma_{\mathrm{n}t}$ — полное сечение захвата нейтрона всеми компонентами смеси. Так, сечение деления урана-235 на тепловых нейтронах $\sigma_{\mathrm{n}f}^{(235)} = 582$ барн, сечения радиационного захвата $\sigma_{\mathrm{n}\gamma}^{(235)} = 100$ барн, $\sigma_{\mathrm{n}\gamma}^{(238)} = 2{,}73$ барн. Так как в естественном уране на один атом урана-235 приходится 140 атомов урана-238, то полное сечение для естественного урана на тепловых нейтронах будет

$$\sigma_{\mathrm{n}t} = \sigma_{\mathrm{n}f}^{(235)} + \sigma_{\mathrm{n}\gamma}^{(235)} + 140 \cdot \sigma_{\mathrm{n}\gamma}^{(238)} = 1064 \text{ барн}.$$

Для тепловых нейтронов $\nu = 2{,}42$ (см. табл. 16). Поэтому для естественного урана и тепловых нейтронов

$$\eta = \frac{\nu\sigma_{\mathrm{n}f}^{(235)}}{\sigma_{\mathrm{n}t}} = 1{,}32.$$

Важнейшей величиной, характеризующей активную зону реактора, является *коэффициент размножения* нейтронов k. Это есть отношение общего числа нейтронов в каком-либо поколении к породившему их общему числу нейтронов в предыдущем поколении. Таким образом, если в первом поколении было N_1 нейтронов, то их число в n-м поколении будет $N_n = N_1 k^n$.

При $k = 1$ реакция деления *стационарна*, т. е. число нейтронов во всех поколениях одинаково — размножения нейтронов нет. Соответствующее состояние реактора называется *критическим.* При $k > 1$

число N_n растет с увеличением n — такое состояние называется *надкритическим.* При $k < 1$ число N_n убывает с увеличением n — такое состояние называют *подкритическим.* В предельном идеальном случае, когда реактор состоит из одной только активной зоны, причем последняя бесконечно велика, коэффициент размножения нейтронов снабжают индексом ∞, т. е. обозначают через k_∞. Очевидно, коэффициент k_∞ является характеристикой только среды, заполняющей активную зону, и не имеет никакого отношения к устройству реактора.

От каких же параметров зависит коэффициент размножения нейтронов? Если бы активная зона состояла только из одного делящегося изотопа (например, урана-235), то было бы $k_\infty = \eta$. В случае реального реактора это не так. Для конкретности мы будем иметь в виду реактор на естественном или слабо обогащенном уране. Основная часть вторичных нейтронов появляется при делении ядер урана-235 тепловыми нейтронами. Но при делении образуются главным образом быстрые нейтроны. Чтобы сделать их более эффективными, используют различные *замедлители*, при рассеянии на ядрах которых нейтроны и замедляются до тепловых скоростей. Поэтому рассматриваемый реактор является *реактором на тепловых нейтронах.* Приводимая ниже формула (95.4) относится именно к таким реакторам.

В процессе замедления нейтрон может поглотиться ядрами ^{238}U, ядрами замедлителя и ядрами других конструктивных элементов реактора. Ясно, что коэффициент размножения пропорционален вероятности p того, что нейтрон не будет поглощен такими ядрами. Конечно, некоторые ядра урана-238 разделятся быстрыми нейтронами, еще не успевшими замедлиться. Это обстоятельство учитывается введением множителя ε — *коэффициента размножения на быстрых нейтронах.* Коэффициент размножения на быстрых нейтронах есть отношение числа нейтронов, возникших при делении на быстрых и тепловых нейтронах к числу нейтронов, возникших при делении только на тепловых нейтронах. Введем еще коэффициент теплового использования f — вероятность того, что замедлившийся нейтрон будет поглощен ядрами изотопов урана, а не ядрами замедлителя и других конструктивных материалов реактора. Тогда

$$k_\infty = \eta p f \varepsilon. \qquad (95.4)$$

Поскольку размеры активной зоны конечны, часть нейтронов будет уходить из нее наружу. Поэтому можно положить

$$k = k_\infty P, \qquad (95.5)$$

где P — вероятность того, что нейтрон не уйдет из активной зоны. Эта формула справедлива для реакторов любого вида, независимо от конкретного выражения для k_∞. Она сохраняет смысл и для атомной бомбы, активная зона которой состоит из чистого урана-235 или плутония-239. Величина P зависит от состава, размеров и формы активной зоны, а также от среды, окружающей активную зону. Если

такая среда отражает нейтроны обратно в активную зону, то она увеличивает P. В этом случае она называется *отражателем* и состоит из легких атомов, слабо поглощающих нейтроны (графит, бериллий).

Как уже указывалось выше, для работы реактора необходимо, чтобы $k \equiv k_\infty P \geqslant 1$. В пределе, когда $k_\infty P = 1$, цепная реакция, происходящая в реакторе, является самоподдерживающейся, стационарной. Размеры и массу активной зоны, а также вероятность P, когда в реакторе становится возможной самоподдерживающаяся цепная реакция, т. е. когда

$$P = P_{\text{крит}} = 1/k_\infty, \tag{95.6}$$

называют *критическими.* Эти величины, конечно, зависят от состава и формы активной зоны, а также от устройства реактора.

Для уменьшения утечки нейтронов активной зоне придают сферическую или близкую к сферической форму, например форму цилиндра с высотой порядка диаметра или форму куба, так как для тел такой формы отношение поверхности к объему тела минимально или близко к минимальному. Для чистого ^{235}U критическая масса приблизительно равна 0,8 кг, для ^{239}Pu — 0,5 кг, для ^{251}Cf — 10 г.

Если масса активной зоны значительно превышает критическую, то цепная реакция приобретает характер взрыва. На этом принципе основано действие атомной бомбы. Последняя состоит из двух или больших частей, содержащих уран-235 или плутоний-239, масса каждого из которых значительно меньше критической. Когда эти части разведены, то и масса всех частей вместе меньше критической. В таком состоянии рассматриваемое ядерное устройство не взрывается. Но если с помощью химического взрыва (при котором развивается давление порядка миллиона атмосфер) части быстро сблизить, то масса полученной активной зоны станет заметно больше критической, и произойдет ядерный взрыв.

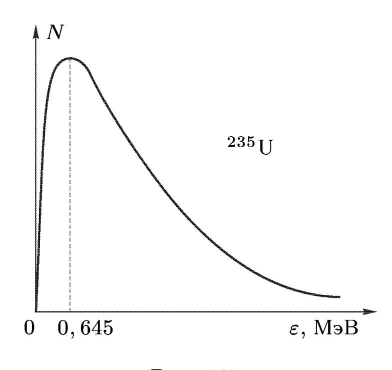


Рис. 165

4. Выясним теперь более подробно, почему в реакторах на природном или слабообогащенном уране требуется замедлитель нейтронов. Примерный энергетический спектр нейтронов, возникающих при делении урана-235, представлен на рис. 165. По оси абсцисс отложена кинетическая энергия нейтронов $\mathscr{E}$ в системе отсчета, в которой исходное делящееся ядро покоится. По оси ординат в произвольных единицах отложено число нейтронов деления $N(\mathscr{E})$, приходящееся на единичный интервал энергии. Таким образом, $N(\mathscr{E})\,d\mathscr{E}$ будет числом нейтронов, энергия которых заключена в интервале между $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E} + d\mathscr{E}$. Кривая имеет максимум примерно при $\mathscr{E} = 0{,}645$ МэВ.

Как видно из рис. 165, при делении ^{235}U образуются преимущественно быстрые нейтроны. Ядра урана-238 делятся только под действием быстрых нейтронов с энергией $\mathscr{E} \approx 1$ МэВ. Но эффективное сечение такого деления очень мало — около 0,3 барна. Напротив, ядра урана-235 делятся под действием нейтронов любых энергий, причем эффективное сечение деления здесь быстро возрастает с уменьшением энергии. Для тепловых нейтронов оно достигает значения 582 барна. Поэтому было бы выгодно замедлить нейтроны до тепловых энергий.

Конечно, при упругих столкновениях с ядрами урана-238 и урана-235 нейтроны замедляются, но этот процесс идет очень медленно ввиду большой массы ядер урана. Главным же препятствием для замедления нейтронов в естественном уране является радиационный захват нейтронов ядрами урана-238. Особенно интенсивно процесс радиационного захвата идет в резонансной области энергий. На рис. 166 представлена

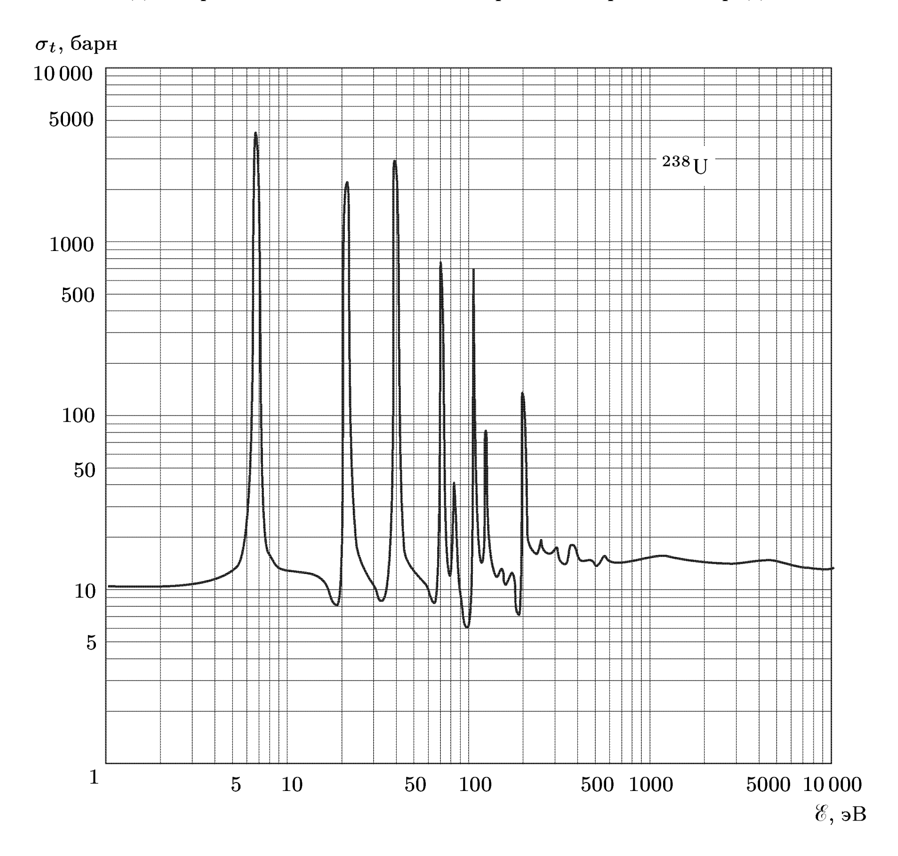


Рис. 166

зависимость полного эффективного сечения захвата σ_t нейтронов ядрами урана-238 в зависимости от энергии нейтрона. В резонансной

области энергий наблюдаются частые и резкие пики, в которых σ_t достигает нескольких тысяч барн, причем $\sigma_t \approx \sigma_{n\gamma}$, так как $\sigma_t = \sigma_{nn} + \sigma_{n\gamma}$, но $\sigma_{nn} \ll \sigma_{n\gamma}$. При замедлении нейтроны должны пройти через резонансную область, где они поглощаются и поэтому не достигают области тепловых энергий. Кроме того, известная доля нейтронов уходит за пределы активной зоны. Для того чтобы как можно более значительная доля нейтронов замедлилась до тепловых скоростей, применяется замедлитель, т. е. вещество, состоящее из легких ядер, слабо захватывающих нейтроны. В качестве замедлителя часто используется графит. Применяются также тяжелая и обычная вода (обычная вода в реакторах на природном уране не применяется из-за большого поглощения нейтронов ядрами водорода), бериллий и его окись, а также некоторые органические вещества.

Если активная зона ядерного реактора содержит замедлитель нейтронов, то основная часть ядерных делений происходит под действием тепловых нейтронов. Реакторы с замедлителем бывают *гомогенными* и *гетерогенными*. В гомогенном реакторе ядерное топливо и замедлитель нейтронов представляют собой однородную смесь (раствор или суспензию). В гетерогенном реакторе ядерное топливо в активной зоне располагается дискретно в виде вертикальных стержней, называемых *тепловыделяющими элементами* (ТВЭЛами). Обычно ТВЭЛы образуют правильную решетку, а между ними располагается замедлитель. В гомогенном реакторе на естественном уране цепная реакция не идет, так как в результате поглощения нейтронов в резонансной области тепловых нейтронов остается недостаточно и коэффициент размножения нейтронов k получается меньше единицы. Напротив, при наличии достаточно большого количества замедлителя в гетерогенном реакторе можно получить $k > 1$ даже для естественного урана, так что развитие цепной реакции становится возможным. Это объясняется тем, что большая часть нейтронов, получающихся при делении, попадает из ТВЭЛов в замедлитель, а после замедления уже в виде тепловых нейтронов возвращается опять в ТВЭЛы, где вызывает новые ядерные деления.

Первый ядерный реактор был построен под руководством Ферми в декабре 1942 г. в Чикаго. Это был гетерогенный реактор, собранный из 45 т естественного урана и 450 т графита ($k = 1{,}0006$). Его первоначальная мощность была 200 Вт. Позднее этот реактор был демонтирован и собран вновь, а его мощность была доведена до 100 кВт. Сходными параметрами обладал и первый в Европе ядерный реактор, запущенный в СССР в декабре 1946 г. под руководством И.В. Курчатова. Он содержал 50 т естественного урана и 500 т графита. Его стандартная мощность была 10 кВт.

Если замедлителя в активной зоне нет, то основная часть ядерных делений вызывается быстрыми нейтронами с энергией $\mathscr{E} \gtrsim 1$ МэВ. Возможны также ядерные реакторы на промежуточных нейтронах с энергиями 1–1000 кэВ.

5. Время жизни τ одного поколения мгновенных нейтронов сильно зависит от среды, заполняющей активную зону реактора, и меняется в пределах примерно от 10^{-3} до 10^{-8} с. Малость этого времени

вынуждает при работе с большой точностью поддерживать равенство $k = 1$. Допустим, например, что $k = 1{,}01$, и возьмем наиболее благоприятный случай, когда $\tau = 10^{-3}$ с. Тогда за одну секунду произойдет смена $1/10^{-3} = 1000$ поколений нейтронов, а их число увеличится в $1{,}01^{1000} \approx 20\,000$ раз. Это вызвало бы колоссальный взрыв реактора.

В действительности управление реактором сильно упрощается *благодаря запаздывающим нейтронам.* Коэффициент размножения нейтронов, о котором до сих пор шла речь, мы теперь обозначим через $k_{\text{м}}$, и будем называть *коэффициентом размножения мгновенных нейтронов.* Этот коэффициент не учитывает дополнительное размножение из-за появления запаздывающих нейтронов. Введем, далее, несущественное для понимания сути дела упрощающее предположение, что имеется только один тип запаздывающих нейтронов, появляющихся через время T после деления. Пусть в начальный момент общее число нейтронов было N_0. Через время $n\tau$, когда запаздывающие нейтроны еще не появлялись, число мгновенных нейтронов возрастет до $N_0 k_{\text{м}}^n$, где n — число поколений нейтронов. В момент $T = n\tau$ появятся запаздывающие нейтроны, возникшие в результате деления ядер в начальный момент. Число таких нейтронов мы обозначим через βN_0, где β — малая дробь ($\beta \approx 0{,}64\,\%$). Общее число всех нейтронов в момент T будет $N = N_0 k_{\text{м}}^n + \beta N_0$. Отношение N/N_0 можно назвать *полным коэффициентом размножения* и обозначить через k. Таким образом,

$$k = k_{\text{м}}^n + \beta. \tag{95.7}$$

При этом предполагается, что смена поколений нейтронов периодически повторяется через промежуток времени T.

Допустим, что $k = 1 + \beta \approx 1{,}0064$. Тогда $k_{\text{м}} = 1$. Это значит, что процесс размножения на мгновенных нейтронах стационарен. Размножение нейтронов будет происходить только из-за появления *запаздывающих нейтронов*, т. е. периодически повторяться через промежуток времени T, причем каждый раз число нейтронов будет возрастать в $k \approx 1{,}0064$ раза. Число нейтронов через время $10T$ увеличится в $k^{10} \approx 1{,}066$ раза. Средний период полураспада осколков деления, порождающих запаздывающие нейтроны, как легко вычислить, используя табл. 15, равен примерно 9 с. Поэтому среднее время жизни одного поколения нейтронов будет $T \approx 9/\ln 2 \approx 13$ с. Таким образом, количество нейтронов через 13 с увеличится только в 1,0064 раза, а через 130 с — в 1,066 раз. Еще медленнее увеличение количества нейтронов будет происходить, когда $1 < k < 1{,}0064$. Столь медленное размножение нейтронов существенно упрощает процесс управления работой реактора. Катастрофическое увеличение числа нейтронов наступит лишь тогда, когда k заметно начнет превышать 1,0064, так как в этом случае размножение будет идти уже на мгновенных нейтронах. (Конечно, в случае реальных реакторов на значение $k = 1{,}0064$ надо смотреть как на грубо ориентировочное, так как оно получено для сильно упрощенной модели, предполагавшей, что имеется только один вид запаздывающих нейтронов, вызывающих деление ядер через строго постоянный промежуток времени T.

Регулирование цепной реакции в ядерном реакторе на тепловых нейтронах обычно осуществляется дистанционно с пульта управления путем передвижения в активной зоне вертикальных регулирующих стержней. Такие стержни изготовляются из кадмия, карбида бора и других веществ, сильно поглощающих нейтроны. Поглощение нейтронов происходит в основном на изотопах кадмия ^{113}Cd и бора ^{10}B. Сечения поглощения тепловых нейтронов на них равны соответственно $2{\cdot}10^4$ и $4{\cdot}10^3$ барн. При увеличении глубины погружения регулирующих стержней в активную зону число поглощаемых нейтронов увеличивается, вследствие чего цепная реакция ослабевает и даже может совсем затухнуть. Наоборот, при выдвижении регулирующих стержней из активной зоны поглощение нейтронов уменьшается, а цепная реакция усиливается. Таким путем можно менять мощность реактора и поддерживать ее на требуемом уровне.

Быстрые нейтроны сравнительно слабо поглощаются в регулирующих стержнях. Поэтому для регулирования реакторов малых размеров на быстрых нейтронах применяют приближение и удаление отражателя от активной зоны реактора.

6. В результате деления ядер в активной зоне выделяется энергия в виде тепла. Количество тепловой энергии, выделяющейся в единицу времени, называется *мощностью реактора.* Так как при каждом акте деления выделяется энергия около 200 МэВ $= 3{,}2 \cdot 10^{-11}$ Дж, то мощности 1 МВт соответствует $10^6 : (3{,}2{\cdot}10^{-11}) \approx 3{\cdot}10^{16}$ актов деления в секунду. Отвод тепла из активной зоны осуществляется *теплоносителем*, который в энергетическом реакторе должен с наименьшими потерями передать его в установку, вырабатывающую электроэнергию. При не чрезмерно больших тепловых потоках в реакторах на тепловых нейтронах в качестве теплоносителя используются вода, водяной пар, воздух, азот, углекислый газ и т. д. В мощных реакторах, где активная зона прогревается до температуры 300 °C, использование воды затрудняется ее закипанием. Для избежания закипания приходится сильно повышать давление в системе теплоотвода. В реакторах на быстрых нейтронах, где энерговыделение громадно (около 0,5 кВт на 1 см^3), как правило, теплоносителем служит жидкий натрий, обладающий хорошими теплоотводящими свойствами.

7. При работе реактора мощностью 1 МВт из активной зоны исходит мощный поток нейтронов (свыше 10^{13} нейтронов на 1 см^2 в секунду, а в импульсных реакторах с длительностью импульса 0,1 с, когда мгновенная мощность реактора составляет 10^5 МВт, плотность нейтронного потока достигает 10^{18} нейтронов на 1 см^2 в секунду). Излучается также поток γ-квантов примерно такой же мощности, возникающий при делении и β-распадах радиоактивных ядер. Это примерно в 100 миллиардов раз превышает допустимую плотность потока. Защита должна сильно ослабить оба потока, чтобы они не превышали приемлемую плотность потока. Наилучшими материалами для защиты от γ-квантов являются материалы с большими атомными номерами Z. Для защиты от нейтронов, помимо хороших поглотителей, нужны также эффективные замедлители, так как проникающая способность особенно велика для

быстрых нейтронов. В качестве замедлителей используются легкие элементы, а в качестве поглотителей — бор и тяжелые элементы (кадмий, железо, свинец и др.). Должна быть предусмотрена защита и от довольно жестких вторичных γ-квантов, возникающих при радиационных захватах (n, γ) ядрами защиты. Хорошей и дешевой защитой как от нейтронов, так и от вторичных γ-квантов является бетон с железным заполнителем и соединениями бора.

8. На рис. 167 схематически представлен разрез части активной зоны гетерогенного ядерного реактора (*1* — замедлитель, *2* — отражатель, *3* — ТВЭЛ, *4* — канал охлаждения, *5* — регулирующие стержни, *6* — защита).

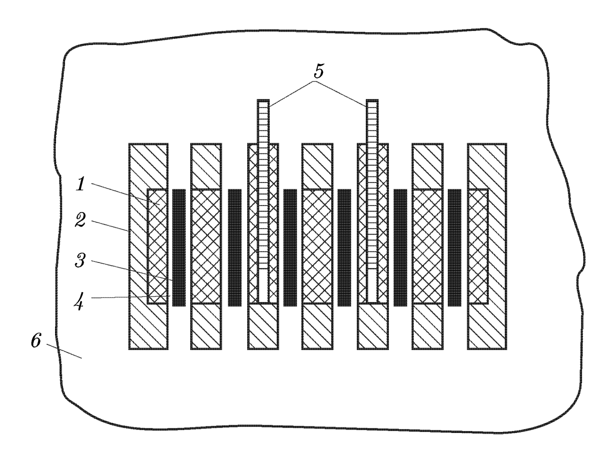


Рис. 167

В качестве примера приведем некоторые данные об активной зоне гетерогенного ядерного реактора первой в мире атомной электростанции (АЭС), вступившей в строй в Обнинске в 1954 г. Активная зона реактора имеет форму цилиндра размерами 1,5 × 1,7 м. В графитовый замедлитель введено 128 ТВЭЛов, содержащих около 550 кг обогащенного до 5 % урана. Теплоносителем служит вода. Мощность электростанции составляет 5 МВт. Это — небольшая мощность; в мощных электростанциях количество ядерного топлива больше в сотни раз.

9. При работе ядерного реактора происходит накопление продуктов деления и образование трансурановых элементов, главным образом плутония. Накопление радиоактивных продуктов называется *отравлением реактора*, а накопление стабильных продуктов — *зашлаковыванием.* Отравление вызывается преимущественно изотопом ксенона ^{135}Xe, обладающим наибольшим сечением поглощения нейтронов ($2{,}6 \cdot 10^6$ барн). Основная часть изотопа ^{135}Xe образуется в результате β-распада изотопа иода ^{135}I ($T_{1/2} = 6{,}8$ ч). Изотоп ^{135}Xe в свою очередь претерпевает β-распад с периодом $T_{1/2} = 9{,}2$ ч и превращается в практически стабильный изотоп цезия ^{135}Cs. Отравление и зашлаковывание

приводят к уменьшению коэффициента размножения k и, следовательно, к уменьшению тепловой мощности реактора. Для увеличения срока действия ТВЭЛов, загружаемых в активную зону, регулирующие стержни сначала погружают глубоко. Затем по мере выгорания ядерного топлива их постепенно выдвигают. Замена ТВЭЛов, являющихся сильными излучателями, производится дистанционно.

10. По назначению и мощности различают следующие виды ядерных реакторов.

1) *Экспериментальные реакторы.* Их мощность не превышает нескольких киловатт. Эти реакторы предназначены для изучения и измерения различных физических величин (ν, η, ε и т. д.), знание которых необходимо для проектирования и эксплуатации других ядерных реакторов.

2) *Исследовательские реакторы.* Их мощность не превышает 100 МВт, а выделяющаяся энергия, как правило, не используется. Потоки нейтронов и γ-квантов, исходящие из активной зоны, используются для исследований в ядерной физике, физике твердого тела, радиационной химии, биологии, для испытания материалов в нейтронных потоках и т. д. Импульсные реакторы также относятся к исследовательским реакторам.

3) Реакторы, предназначенные для получения *новых делящихся трансуранов и радиоактивных изотопов.*

4) *Энергетические реакторы.* Они используются для выработки электроэнергии, теплофикации, в силовых установках на кораблях, для опреснения морской воды и т. д. Тепловая мощность современных энергетических реакторов достигает 3–5 ГВт.

Ядерные реакторы различаются также по виду ядерного топлива (естественный и обогащенный уран), по его химическому составу (металлический U, UO_2, UC и т. д.), по виду замедлителя (C, H_2O, D_2O, Be, BeO, гидриды металлов, отсутствие замедлителя), по виду теплоносителя (H_2O, газ, D_2O, органические жидкости, расплавленные металлы). Наиболее распространены гетерогенные ядерные реакторы на тепловых нейтронах с замедлителями из C, H_2O, D_2O и теплоносителями из H_2O, газа, D_2O.

11. Важная роль в ядерной энергетике в настоящее время отводится *реакторам-размножителям* (иначе называемым *бридерами*). В будущем роль таких реакторов должна становиться все большей и большей и в конце концов сделаться определяющей. Реактором-размножителем называется такой реактор, в котором происходит не только выработка энергии, но и *расширенное воспроизводство* делящегося материала. Циклы воспроизводства основаны на ядерных реакциях (94.2) и (95.1). В первой реакции не делящееся медленными нейтронами ядро ^{238}U превращается в ядро ^{239}Pu. Во второй реакции ядро ^{232}Th, также не делящееся медленными нейтронами, превращается в ядро ^{233}U. Ядра же ^{239}Pu и ^{233}U в отношении деления не хуже, а даже лучше ядра ^{235}U. Существенно заметить, что выделение образовавшегося ^{239}Pu из ^{238}U, а также образовавшегося ^{233}U из ^{232}Th производится химически, а это

несравненно легче и быстрее, чем в трудоемких и медленно идущих процессах разделения изотопов.

Коэффициентом воспроизводства $K_в$ реактора-размножителя называется отношение скорости образования делящихся ядер к скорости уничтожения исходных делящихся ядер. Для получения $K_в > 1$ необходимо, чтобы на одно поглощение нейтрона исходным делящимся ядром приходилось больше двух ($\eta > 2$) рождающихся нейтронов, так как один из этих нейтронов должен расходоваться на продолжение цепной реакции деления. Фактически из-за поглощения нейтронов в конструкционных материалах и продуктах деления необходимо $\eta > 2{,}2$–$2{,}3$. На изотопах ^{235}U и ^{239}Pu расширенное воспроизводство ядерного горючего практически возможно только в реакторах на быстрых нейтронах, так как для медленных нейтронов величина η слишком мало отличается от 2 ($\eta = 2{,}07$ для ^{235}U и $\eta = 2{,}11$ для ^{239}Pu). На быстрых же нейтронах η заметно превышает 2 (2,3 и 2,7 соответственно). У урана ^{233}U коэффициент η достаточно велик (2,28) уже для тепловых нейтронов и мало повышается (до 2,45) при переходе к быстрым нейтронам. Поэтому расширенное воспроизводство на ^{233}U можно было бы вести и в тепловых реакторах.

В реакторах-размножителях пока применяется обогащенный уран с высоким содержанием ^{235}U (до 30 %), но в будущем, по мере накопления запасов ^{239}Pu, ядерным топливом будет служить смесь естественного урана с плутонием. Торий ^{232}Th как сырьевой материал для получения делящихся ядер ^{233}U пока не нашел применения. Этот элемент не образует богатых месторождений, и технология его извлечения из руд сложнее технологии извлечения урана. Но в перспективе торий должен будет использован в ядерной энергетике широко, так как его запасы на Земле в десятки раз больше, чем урана.

В реакторах-размножителях активная зона окружена слоем воспроизводящего вещества, называемым *зоной воспроизводства.* Через реактор в качестве теплоносителя прокачивается жидкий натрий, который практически не замедляет нейтроны, но хорошо отводит тепло.

Ядерные реакторы на тепловых нейтронах могут «сжечь» 0,5–1 % урана. Использование же реакторов-размножителей увеличивает это число в десятки раз.

12. В заключение остановимся на мотивах, которые диктуют необходимость развития ядерной энергетики. В начале нашего века потребление энергии в мире удваивалось приблизительно за 50 лет. В середине века это происходило уже за 30 лет, а сейчас — за 10–15 лет. В настоящее время около 70 % энергопотребления в мире обеспечивается нефтью и газом. Однако мировые запасы нефти и газа ограничены. С учетом роста энергопотребления они могут быть исчерпаны в течение 20, максимум — 50 лет. Кроме того, нефть и газ необходимо было бы сохранить на более длительное время как сырье для получения ряда химических продуктов, пластмасс, для производства белка за счет микробиологического синтеза и т. д. Каковы же пути преодоления надвигающегося тотального энергетического кризиса?

Необходимо перестроить энергетику на новой основе. Прежде всего надо шире использовать уголь, так как запасы угля на Земле значительно превосходят запасы других природных горючих. В дальнейшем должна быть широко использована ядерная энергия. Сравнительно дешевого урана, пригодного для энергетических целей, на Земле по оценкам не так уж много — около 4 млн тонн. Сейчас на атомных электростанциях потребляется почти исключительно уран-235 и лишь около 1 % урана-238 включается в топливный цикл, который реализуется в существующих реакторах. Этих ресурсов хватит примерно на такое же время, что нефти и газа. Использование реакторов-размножителей меняет дело. В таких реакторах каждый килограмм природного урана может отдавать энергии в 30–40 раз больше, чем в обычных ядерных реакторах на тепловых нейтронах. Поэтому можно использовать не только дешевый, но и дорогой уран, а также торий. В результате энергетическими ресурсами станут десятки миллионов тонн урана, которые находятся, например, в океанской воде, в бедных урановых рудах, горных породах, а также сотни миллиардов тонн тория. А таких ядерных ресурсов хватит на тысячи лет. Еще более кардинальное решение энергетического кризиса дало бы использование термоядерной энергии, но эта проблема пока еще не решена. О ней говорится в § 98.

Существенным недостатком атомных электростанций является накопление радиоактивных отходов, которые необходимо весьма надежно и длительно хранить, чтобы предотвратить опасное загрязнение внешней среды. Это трудная инженерная проблема, которая, однако, может быть надежно решена при любых масштабах производства энергии. Более того, исследования показали, что вред, наносимый окружающей среде электростанциями на угольном топливе, существенно больше, чем вред от атомных электростанций.

§ 96. Природный ядерный реактор в Окло

1. В 1972 г. во время масс-спектрографического анализа на заводе Пьерлатте (Франция), где проводилось обогащение ядерного топлива из гексафторида урана (UF_6), было обнаружено, что в этом материале из общего числа атомов урана содержится 0,717 % атомов урана-235, тогда как в земных породах, метеоритах и образцах лунного грунта содержание урана-235 больше, а именно 0,72 %. Урановая руда для переработки доставлялась из рудника Окло, расположенного в Габоне вблизи города Франсфиля (Африка). Как выяснилось позднее, уже в более раннее время (в 1970–1972 гг.) на переработку поступала руда, содержащая временами до 20 % урана, обедненного до 0,64 % изотопом ^{235}U. Так как руда при добыче перемешивалась, то обеднение ураном-235 в отдельных образцах могло быть еще сильнее. Всего обедненного урана, использованного в цепной реакции деления, было добыто более 700 т, причем дефицит урана-235 (не замеченный первоначально) составил примерно 200 кг. Изотопный анализ урановых образцов, значительно обедненных ураном-235, обнаружил также заметные отклонения от

природного распределения именно тех редкоземельных изотопов, которые являются продуктами деления ядер урана. Каковы же возможные причины этих отклонений?

Урановое месторождение Окло, исследованное по методу содержания свинца в урановой руде, сформировалось примерно $1{,}8 \cdot 10^9$ лет тому назад. Как полагают геологи, в дельте древней реки образовался осадочный слой богатого ураном песчаника толщиной 4–10 м и шириной 600–900 м. Под ним находилась базальтовая порода, которая под действием тектонических процессов опустилась на глубину в несколько километров. При таком опускании урановая жила растрескалась, и в нее проникли грунтовые воды. Десятки миллионов лет тому назад месторождение поднялось вверх до современного уровня. В руде со средней весовой концентрацией урана 0,5 % были обнаружены 6 глинистых линз, т. е. образований размером от 10 до 20 м и толщиной порядка метра, в которых концентрация урана доходит до 20–40 % и больше. Образование линз со сверхвысоким содержанием урана произошло, по-видимому, под действием фильтрационных вод, хотя детальная картина этого процесса и не ясна.

2. Урановый рудник в Окло в какой-то мере напоминает гетерогенный ядерный реактор. Роль ТВЭЛов выполняют линзы, содержащие уран, роль замедлителя — грунтовая вода между ними. Цепная реакция в таком руднике была бы невозможна, если бы изотопный состав урана в нем был бы таким же, как и изотопный состав современного естественного урана. И действительно, в настоящее время цепная реакция в руднике не идет. Однако уран-238 распадается медленнее, чем уран-235. Их периоды полураспада равны соответственно $4{,}5 \cdot 10^9$ и $7{,}1 \cdot 10^8$ лет. Исходя из этих данных, нетрудно подсчитать, что $1{,}8 \cdot 10^9$ лет тому назад содержание атомов изотопа ^{235}U должно было составлять примерно 3,1 % от общего количества атомов урана. А для такого обогащенного урана в присутствии воды (в качестве замедлителя) коэффициент размножения k_∞ мог достигнуть критического значения $k_\infty = 1$ и даже несколько превзойти его. При таких условиях в далекие времена могла возникнуть самопроизвольная цепная ядерная реакция, что, по-видимому, и произошло на самом деле.

Продолжительность работы естественного ядерного реактора в Окло была оценена по количеству образовавшегося плутония ^{239}Pu. Таким путем было найдено, что она составляет около 0,6–0,8 млн лет. Эта оценка не очень надежна хотя бы потому, что доля делений ^{239}Pu относительно полного числа делений составляет всего лишь несколько процентов и сравнима с долей делений ^{238}U на быстрых нейтронах.

Общее количество энергии, выработанной реактором в Окло, оценивается приблизительно в $1{,}5 \cdot 10^4$ МВт · лет. Такое же количество энергии вырабатывают два блока Ленинградской АЭС за 2,3 года при полной нагрузке. Если принять среднюю продолжительность работы реактора в Окло равной 0,6 млн лет, то средняя мощность выделяющейся в нем энергии составляет всего лишь 25 кВт. Это соответствует среднему потоку тепловых нейтронов в реакторе не выше 10^8 с$^{-1}$·см$^{-2}$.

Не следует думать, что цепная реакция, шедшая в Окло, носила бурный характер — с гулом, шипением пара и пр. На самом деле реакция была медленной — она скорее «тлела». Температура в руднике никогда не превышала 300–600 °С, так как природный реактор был саморегулирующейся системой. При повышении температуры из зоны реакции удалялась вода, а это вело к уменьшению количества медленных нейтронов, к затуханию и даже полному угасанию реакции. Затем рудник начинал остывать и в него снова набиралась вода, замедляющая нейтроны. Это создавало благоприятные условия для возобновления цепной реакции, а следовательно, и для повышения температуры. Вода снова удалялась из реактора, и реакция затухала. Затем опять начиналось накопление воды, увеличение количества тепловых нейтронов, возобновление цепной реакции и т. д. Таким образом, периодически происходила смена возбуждения и затухания реакции.

3. Приведенные факты дают достаточно убедительное доказательство существования в отдаленные времена природного ядерного реактора. Однако ясны далеко не все детали, относящиеся к этому вопросу. Например, среди продуктов деления в природном ядерном реакторе был обнаружен хотя и небольшой, но несомненно существующий избыток изотопов ксенона — ^{131}Xe, ^{132}Xe и ^{134}Xe — по сравнению с изотопным составом ксенона, который возникает при делении ^{235}U тепловыми нейтронами. Причина такого расхождения еще не выяснена.

§ 97. Использование антинейтрино для контроля ядерного реактора

1. В опытах Рейнеса и Коуэна (см. § 74) было найдено, что сечение реакции обратного β-распада (74.12) для антинейтрино, исходящих из ядерного реактора (т. е. антинейтрино низких энергий), составляет примерно $\sigma = 10^{-43}$ см^2. Чтобы более наглядно представить этот результат, допустим, что плоскопараллельный пучок антинейтрино распространяется в железе, причем поглощение антинейтрино происходит исключительно за счет реакции (74.12). В одном моле содержится примерно $6 \cdot 10^{23}$ атомов, т. е. $26 \cdot 6 \cdot 10^{23}$ протонов (26 — атомный номер железа). Так как атомная масса железа 56, а плотность 7,8 г/см^3, то в 1 см^3 железа будет $n = (7{,}8/56) \cdot 26 \cdot 6 \cdot 10^{23} = 2{,}2 \cdot 10^{24}$ протонов. Если среда (железо), в которой распространяются антинейтрино, однородна, то формулу (65.3) можно представить в виде

$$\frac{dN}{N} = -n\sigma l,$$

где l — путь, проходимый антинейтрино в железе. Определим путь l, на котором из пучка выбывает миллионная доля всех антинейтрино. Для этого в предыдущей формуле положим $|dN/N| = 10^{-6}$ и найдем

$$l = \frac{1}{n\sigma} \left| \frac{dN}{N} \right| = 45 \cdot 10^{11} \text{ см} = 45 \cdot 10^{6} \text{ км}.$$

Таким образом, при прохождении пучка из миллиона антинейтрино через слой железа толщиной в 45 млн км (эта величина примерно только в три раза меньше расстояния от Земли до Солнца) в среднем только одно антинейтрино поглотится и выйдет из пучка. Если же толщину слоя железа довести до $45 \cdot 10^{12}$ км (приблизительно 5 световых лет), то на этой толщине интенсивность пучка антинейтрино уменьшится всего в e раз. Эти факты, кажется, не оставляют возможности для практических применений нейтрино и антинейтрино.

И все же такая возможность существует, так как ничтожное поглощение антинейтрино в веществе может быть компенсировано исключительно большой мощностью пучков антинейтрино, исходящих из крупных ядерных реакторов. Допустим в качестве примера, что детектор антинейтрино имеет форму куба со стороной 1 м и что вещество этого детектора поглощает антинейтрино так же, как и железо (это делается только для того, чтобы не повторять вычисления, аналогичные приведенным выше). Пусть в детектор попадает 10^{21} антинейтрино в сутки (это может обеспечить современный большой ядерный реактор). Толщина поглотителя по сравнению с предыдущим случаем уменьшена в $45 \cdot 10^9$ раз, а число нейтрино увеличено в $10^{21} : 10^6 = 10^{15}$ раз. Поэтому число актов обратного β-распада, зафиксированных детектором в сутки, будет

$$1 \cdot \frac{10^{15}}{45 \cdot 10^9} \approx 2 \cdot 10^4.$$

Приведенная оценка показывает, что поток антинейтрино можно регистрировать и гораздо меньшим детектором.

2. В СССР на Ровенской АЭС с 1982 г. функционирует специализированная нейтринная лаборатория. Основным помещением лаборатории является экспериментальный зал площадью $6{,}5 \times 6{,}5$ м и высотой 3,5 м. Этот зал расположен прямо под ядерным реактором на расстоянии 19,2 м от центра активной зоны. От потоков частиц из реактора зал огражден мощной защитой из нескольких слоев специального так называемого тяжелого бетона, стали, воды. Такая защита по своим поглощающим свойствам эквивалентна слою воды толщиной около 30 м. Детектором служит резервуар объемом 235,5 л, заполненный органическим сцинтиллятором — декалином ($C_{10}H_8$), в состав которого входит большое количество водорода и который содержит небольшую примесь гадолиния, поглощающего нейтроны.

В осколках деления ядерной зоны реактора в процессе β-распада нейтроны превращаются в протоны с испусканием электронов и антинейтрино ($\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}$). Антинейтрино и должны регистрироваться. Принцип регистрации по существу не отличается от того, какой применялся в опытах Рейнеса и Коуэна (см. § 74). Антинейтрино, взаимодействуя с протоном в обратной реакции β-распада ($\overline{\nu} + \mathrm{p} \to \mathrm{n} + \mathrm{e}^+$), порождает в сцинтилляторе нейтрон и позитрон. Позитрон сразу же аннигилирует с электроном, в результате чего возникает сцинтилляционная вспышка. Нейтрон же через время порядка 10^{-8} с захватывается ядром гадолиния с испусканием γ-кванта, что дает вторую вспышку.

Световые вспышки улавливаются фотоумножителями (всего их 24), сигналы с которых поступают на электронную схему. Если реакция действительно вызывается антинейтрино, то в сцинтилляторе детектора должны появиться одна за другой две вспышки через определенное короткое время.

Всего за сутки детектор регистрирует до тысячи таких пар вспышек. Трудность опыта состоит в том, что за то же время на детектор обрушивается громадное число нейтронов и γ-квантов и почти каждый из них вызывает в нем соответствующий сигнал. Задача заключается в том, чтобы выделить относительно слабые сигналы от нейтрино на громадном фоне этих не имеющих отношения к делу сигналов. Задача эта успешно решена. Не останавливаясь на этом вопросе, укажем только, что это делается с помощью электрической схемы совпадений, позволяющей регистрировать только нужные пары следующих друг за другом сцинтилляционных вспышек. Таким путем достигается, что полезный сигнал не только не теряется на фоне посторонних событий, но даже значительно превышает его.

3. Как уже говорилось в § 74, реакция обратного β-распада ($\overline{\nu} + \mathrm{p} \to \mathrm{n} + \mathrm{e}^{+}$) эндотермична. Действительно, сумма масс нейтрона и позитрона (939,5731 + 0,5110034 МэВ) превышает массу протона (938,2796 МэВ) на 1,8045 МэВ. Недостаток массы у протона должен быть компенсирован за счет энергии антинейтрино $\overline{\nu}$. Реакция может идти только тогда, когда энергия антинейтрино превышает 1,8 МэВ. В нейтринном спектрометре как раз и измеряется энергия позитрона, равная энергии антинейтрино за вычетом 1,8 МэВ. Это позволяет восстановить энергетический спектр антинейтринного излучения, падающего из активной зоны реактора на прибор.

Количество вылетающих антинейтрино пропорционально числу разделившихся ядер и поэтому позволяет точно судить о выделении энергии в реакторе. Кроме того, антинейтринное излучение осколков деления урана и плутония существенно различно по своему спектральному составу. Это открывает возможность по спектру нейтринного излучения контролировать накопление плутония непосредственно в процессе его образования. В начале работы реактора его антинейтринный спектр полностью определяется осколками деления изотопа ^{235}U. В дальнейшем же, по мере накопления плутония, пропорционально растет и его вклад в спектр антинейтринного излучения.

В качестве иллюстрации приведем некоторые результаты измерений, произведенных на Ровенской АЭС. В течение примерно недели непрерывно регистрировался антинейтринный поток из реактора. Одновременно тепловым методом определялась средняя мощность реактора. За это время всего было выработано энергии 9,79 ГВт · сут по измерениям нейтринным способом, тогда как тепловой метод дал близкое значение 9,64 ГВт · сут (израсходованное топливо соответственно равно 9,41 и 9,27 кг). Принципиальное достоинство нейтринного метода заключается в том, что он не требует непосредственного контакта с делящимся веществом и может производиться дистанционно. Весьма

вероятно, что нейтринный метод окажется в будущем основным источником информации о цепных реакциях, идущих в активной зоне ядерного реактора.

§ 98. Термоядерная проблема

1. Энергия связи ядра, приходящаяся на один нуклон, если отвлечься от ее нерегулярных колебаний, с возрастанием атомного номера сначала систематически возрастает, достигает максимума вблизи ядра железа, а затем начинает систематически убывать (см. рис. 120). Иными словами, слияние (или *синтез*) легких ядер и деление тяжелых приводят, как правило, к более прочной связи между нуклонами. Отсюда следует, что при делении тяжелых ядер и при синтезе легких должна освобождаться энергия. О первом явлении и его использовании в ядерной энергетике уже говорилось в § 94, 95. При делении ядра ^{235}U освобождается энергия, составляющая около 0,85 МэВ на нуклон.

Из реакций синтеза легких ядер особый интерес представляют две реакции:

$$\mathrm{d}+\mathrm{d}\begin{array}{l}\nearrow\ {}^3\mathrm{He}+\mathrm{n}+3{,}27\ \text{МэВ},\\ \searrow\ \ \mathrm{t}+\mathrm{p}+4{,}03\ \text{МэВ},\end{array} \tag{98.1}$$

$$\mathrm{d}+\mathrm{t}\to {}^4\mathrm{He}+\mathrm{n}+17{,}59\ \text{МэВ} \tag{98.2}$$

(см. § 64, задача 2). Существует и много других экзотермических ядерных реакций синтеза, например

$${}^3\mathrm{He}+\mathrm{d}\to {}^4\mathrm{He}+\mathrm{p}+18{,}3\ \text{МэВ}, \tag{98.3}$$

$${}^6\mathrm{Li}+\mathrm{p}\to {}^4\mathrm{He}+{}^3\mathrm{He}+4\ \text{МэВ}, \tag{98.4}$$

которые в перспективе могут быть использованы для решения обсуждаемой здесь термоядерной проблемы. Однако в настоящее время основное внимание уделяется реакции (98.2), а затем реакции (98.1), так как в них участвуют самые легкие ядра, благодаря чему облегчается получение и использование выделяющейся энергии.

На один нуклон в верхней ветви реакции dd (98.1) выделяется энергия (3,27/4) МэВ, в нижней — (4,3/4) МэВ. Обе ветви реакции dd идут практически с одинаковой вероятностью. Поэтому в среднем в реакции dd на один нуклон выделяется энергия $(1/2)(3{,}27/4 + 4{,}03/2) \approx 0{,}9$ МэВ, т. е. примерно такая же, что и при одном акте деления тяжелого ядра. В реакции dt (98.2) выделяющаяся энергия на один нуклон составляет $17{,}59/5 \approx 3{,}52$ МэВ. Однако в этой реакции только 3,52 МэВ приходятся на заряженные частицы ^{4}He, а 14,07 МэВ уносятся нейтронами. Энергия же заряженных частиц может быть преобразована в электрическую со значительно большим КПД, чем энергия нейтронов (см. п. 5).

В реакции (98.3) на один нуклон освобождается энергия 3,66 МэВ, а в реакции (98.4) — 0,57 МэВ. Продуктами этих реакций являются только нерадиоактивные заряженные частицы, что в энергетическом

отношении должно рассматриваться как их достоинство (см. п. 5). Однако эти реакции труднее осуществить, а потому в дальнейшем они не будут рассматриваться.

Таким образом, как и при делении тяжелых ядер, в реакциях синтеза легких освобождается энергия, в миллионы раз превосходящая тепло, получающееся при сжигании химического топлива (уголь, нефть и пр.). Однако получение этой энергии в макроскопических количествах, к величайшему сожалению, удалось пока только для военных целей — в водородной бомбе, где реакции (98.1) и (98.2) осуществляются с огромной скоростью и сопровождаются чудовищным взрывом. По этой причине они совершенно неуправляемы. Для использования энергии этих реакций в мирных целях необходимо придать им спокойный управляемый характер. Соответствующая проблема называется проблемой *управляемого термоядерного синтеза* (УТС). Она усиленно разрабатывается в СССР, США и других странах, начиная примерно с 1951 г. В СССР работы по УТС в основном ведутся в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова. Они были начаты под руководством Л. А. Арцимовича (1909–1973) и М. А. Леонтовича (1903–1981).

Управляемый термоядерный синтез еще не осуществлен, хотя ученые и надеются получить его к концу настоящего или в начале следующего столетия. Детальное рассмотрение этой проблемы далеко выходит за рамки этой книги. Мы можем дать о ней только общее и поверхностное представление.

2. Обе реакции (93.1) и (93.2) происходят с положительно заряженными ядрами, между которыми действуют кулоновские силы отталкивания. Для возможности проведения обеих реакций взаимодействующим ядрам должна быть сообщена кинетическая энергия, достаточная для сближения их на расстояние порядка 10^{-11} см. Только после этого с заметной вероятностью начнется процесс слияния ядер за счет *туннельного эффекта*. С увеличением зарядового числа Z кулоновский барьер между сближающимися ядрами возрастает пропорционально произведению зарядов обоих ядер. Осуществить слияние ядер тем легче, чем меньше Z. Вот почему выбираются ядра дейтерия и трития, для которых число $Z = 1$, т. е. минимально.

Можно осуществить реакции слияния легких ядер, ускоряя на ускорителе ядра одного изотопа и бомбардируя ими мишени из изотопа того же или другого элемента. Однако такой метод применим и действительно применяется для изучения ядерных реакций, а также для получения нейтронов. Но он совершенно не годится для получения ядерной энергии в промышленных масштабах, если даже воспользоваться весьма сильноточным ускорителем. Дело в том, что эффективные сечения ядерных реакций, хотя и быстро возрастают с увеличением относительной скорости сталкивающихся ядер, но даже в оптимальных условиях несравненно меньше эффективных сечений атомных столкновений. При столкновениях кинетическая энергия ускоренных ядер быстро растрачивается на ионизацию и возбуждение атомов мишени. Оставшейся энергии ускоренного ядра в подавляющем большинстве случаев

совершенно недостаточно для его слияния с ядром мишени. В результате почти все столкновения ядер не будут завершаться ядерными реакциями. Полученная таким путем ядерная энергия будет ничтожна по сравнению с энергией, которую надо затратить для осуществления ускорения ядер с помощью ускорителей.

Поэтому процессы ионизации и возбуждения атомов мишени не должны происходить. А это имеет место только в уже *полностью ионизованной плазме*, нагретой до весьма высокой температуры — порядка 10 кэВ (10^8 К). Вот почему проблема получения энергии в промышленных масштабах в управляемых реакциях синтеза ядер легких элементов получила название *термоядерной проблемы.* В своей основе она прежде всего опирается на физику плазмы — на получение, изучение и управление этим состоянием вещества. Физика же плазмы ныне составляет самостоятельный и весьма обширный отдел физики. Его изложение не входит в цели настоящего руководства. По этой причине мы можем дать только общее представление о термоядерной проблеме.

3. Дейтерий ^{2}H (иначе обозначаемый через D) — стабильный изотоп водорода. Он встречается в воде в виде молекул D_2O и HDO. В естественной воде по числу атомов содержится примерно 0,015 % дейтерия. Значит, в 18 г воды содержится $N_A \cdot 0{,}00015 \sim 9 \cdot 10^{18}$, а в 1 г около $5 \cdot 10^{17}$ атомов дейтерия, содержащих около 10^{18} нуклонов. Так как на один нуклон в реакции dd освобождается около 0,9 МэВ энергии, то за счет этой реакции в 1 г воды может выделиться энергия $10^{18} \cdot 0{,}9 \approx 9 \cdot 10^{17}$ МэВ $\approx 1{,}5 \cdot 10^5$ Дж. По сравнению с энергией химического топлива это громадная величина. Например, удельная теплота сгорания каменного угля составляет около $3{,}5 \cdot 10^7$ Дж/кг (не учитывая кислорода). Таким образом, 250 г воды в энергетическом отношении эквивалентны примерно 1 кг каменного угля. Масса воды в океанах Земли составляет примерно $1{,}45 \cdot 10^{24}$ кг. По содержанию энергии это эквивалентно $6 \cdot 10^{21}$ кг $= 6 \cdot 10^{18}$ т каменного угля. Это составляет 10^{-3} массы всей Земли (около $6 \cdot 10^{21}$ т). Таким образом, дейтерий, содержащийся в океанах, является *практически неисчерпаемым* источником энергии, которой хватило бы на сотни миллионов лет.

Тритий ^{3}H (иное обозначение — T) — радиоактивный изотоп водорода с периодом полураспада $T_{1/2} = 12{,}3$ года. Тритий образуется в небольших количествах в атмосфере под действием космических лучей (примерно 1000–2000 атомов T на 1 м^2 поверхности Земли в 1 с). Получающийся таким образом тритий соединяется с кислородом воздуха, образуя сверхтяжелую воду, но из-за распада ^{3}H такая вода не накапливается. В природной воде содержится всего около 10^{-18} атомов трития по отношению к числу атомов водорода.

Таким образом, можно сказать, что из-за радиоактивности тритий в естественном состоянии в природе не встречается. Поэтому для использования в термоядерных установках тритий должен создаваться искусственно. Он получается в реакции

$$^6\mathrm{Li} + \mathrm{n} \to {}^3\mathrm{H} + {}^4\mathrm{He} + 4{,}8\ \text{МэВ} \tag{98.5}$$

путем облучения изотопа лития ^{6}Li нейтронами от ядерного реактора. Поэтому управляемый термоядерный синтез на основе реакции (98.2) должен предусмотреть получение и воспроизводство трития. Воспроизводство трития может быть осуществлено в самом термоядерном реакторе, поскольку реакция dt сопровождается выделением нейтронов. Для этого в соответствии с реакцией (98.5) рабочую зону реактора следует окружить слоем легкого изотопа лития ^{6}Li. Такой слой называется бланкетом. Поэтому количество трития, которым можно располагать в УТС в конце концов определяется запасом дейтерия и ^{6}Li в природе (в естественном литии изотоп ^{6}Li составляет около 7,52 %, а изотоп ^{7}Li^2 около 92,48 %). Запасы этих элементов на Земле настолько велики, что при прогнозируемых темпах потребления их энергии должно хватить на сотни тысяч лет.

Заметим, что в перспективе бланкет может быть использован и для создания *комбинированных ядерно-термоядерных реакторов.* Термоядерный реактор на dd следует окружить бланкетом, содержащим ^{238}U, делящийся быстрыми нейтронами. Быстрые нейтроны, возникающие в реакции dd будут вызывать деление ^{238}U и производить ядерное горючее — плутоний, используемый в ядерном реакторе. Реактор на dt для этой цели не годится, так как получающиеся нейтроны необходимы для воспроизводства трития.

4. При использовании термоядерного топлива, как и при использовании делящихся ядер, не приходится сжигать мировые запасы кислорода или углеводородов, так что в атмосферу не попадают углекислый газ и другие продукты сгорания. В отношении загрязнения окружающей среды (т. е. с экологической точки зрения) термоядерный реактор обладает громадным преимуществом по сравнению с реактором деления. В реакциях ядерного деления образуется много долгоживущих радиоактивных отходов, захоронение которых является непростой задачей. В термоядерном реакторе эта задача не стоит, так как в реакциях синтеза (98.1) и (98.2) долгоживущих радиоактивных отходов не образуется. В этих реакциях основными продуктами будут нейтроны, нерадиоактивные ядра гелия ^{3}He и водорода, а также ядра трития. Правда, тритий радиоактивен — он испускает ионизующую радиацию в виде β-частиц с максимальной энергией 18 кэВ. Но тритий является одним из наименее токсичных радиоактивных изотопов, тогда как плутоний, служащий топливом в ядерных реакторах, — один из наиболее токсичных из известных нам радиоактивных материалов. Кроме того, в реакции dt тритий сам является термоядерным топливом, так что его можно возвратить в активную зону реактора для дальнейшего сжигания. В результате эффективное время жизни трития сводится примерно к 5 дням вместо обычных 18 лет.

5. Сформулируем общее требование, накладываемое на термоядерный реактор законом сохранения энергии, предполагая, что в реакторе идет либо реакция dd, либо реакция dt. Не приводя детального вывода, ограничимся указанием только его общего хода и окончательными результатами.

Пусть в реактор введена плазма из чистого дейтерия или равнокомпонентной смеси дейтерия и трития, уже нагретая в результате какого-либо нетермоядерного процесса. Конечно, плазма предполагается *квазинейтральной*, т. е. такой, в которой средние концентрации положительных ионов и отрицательных электронов в каждом макроскопическом объеме почти одинаковы. Основанием для такого предположения служит замечание, что даже незначительное нарушение квазинейтральности возбудило бы сильные электрические поля, которые, однако, в плазме существовать не могут из-за ее высокой электрической проводимости. В дальнейшем через n обозначается число положительных ионов (и равное ему числу электронов) в кубическом сантиметре плазмы.

Если температура T плазмы достаточно высока, что столкновения ионов друг с другом, по крайней мере частично, будут заканчиваться реакциями с выделением термоядерной энергии. Ясно, что число таких столкновений в единице объема пропорционально n^2, а коэффициент пропорциональности зависит от T. Поэтому мощность ядерной энергии, выделяющейся в единице объема активной зоны реактора, можно представить в виде $P_{\text{яд}} = f_{\text{яд}}(T)n^2$, причем функция $f_{\text{яд}}(T)$ зависит от того, используется ли в качестве топлива чистый дейтерий или равнокомпонентная смесь дейтерия и трития.

Продуктами ядерных реакций (98.1) и (98.2) будут заряженные частицы ^{3}He, t, p, ^{4}He и нейтроны, не имеющие электрического заряда. Кинетическая энергия теплового движения заряженных частиц может быть превращена в электрическую с КПД, близким к 1. Для этого можно использовать *магнитогидродинамический генератор*, в котором происходит прямое преобразование тепловой энергии в электрическую, минуя тепловой цикл. Принцип его работы основан на электромагнитной индукции: если поперек магнитного поля движется проводящая среда, то в ней возбуждается электрический ток. В качестве такой проводящей среды может быть использована высокотемпературная плазма. Ее электрическая проводимость, как показывает теория, пропорциональна $T^{3/2}$ и не зависит от концентрации частиц. При $T \approx 1{,}6 \cdot 10^7$ К ($1{,}4 \cdot 10^3$ эВ) проводимость водородной плазмы примерно равна проводимости меди при нормальной температуре, а при $T \approx 1{,}6 \cdot 10^8$ К она будет примерно в 30 раз больше. Если поток горячей плазмы поперек магнитного поля направить между пластинами конденсатора, то возникающий индукционный ток зарядит конденсатор, т. е. тепловая энергия плазмы перейдет в электрическую.

Нейтроны, поскольку они лишены электрического заряда, таким путем не могут быть использованы. Их кинетическая энергия теплового движения может быть превращена в электрическую с использованием *теплового цикла.* КПД последнего ограничен сверху теоремой Карно. С некоторой долей оптимизма примем, что этот КПД равен $1/3$.

Однако надо учесть не только тепловую энергию, освобождающуюся в ядерных реакциях. Нейтроны уходят из активной зоны реактора и поглощаются защитой. При этом выделяется энергия *нейтронного*

сродства в виде тепла. При каждом акте поглощения его выделяется примерно 8 МэВ. Это тепло может быть также использовано в тепловом цикле. Его надо прибавить к энергии нейтронов в ядерных реакциях. Таким образом, можно принять, что тепловая энергия заряженных частиц может быть преобразована в электрическую практически полностью, а тепловая энергия нейтронов (с учетом энергии нейтронного сродства) — примерно на одну треть. Формально при энергетических расчетах нейтроны можно считать *как бы* заряженными частицами, если число их уменьшить приблизительно в три раза. Предполагается, что это и делается при оценке мощности $P_{\text{яд}}$ и коэффициента $f_{\text{яд}}(T)$.

Рассмотрим сначала реакцию dt (98.2). На долю заряженной частицы ^{3}He приходится энергия 3,5 МэВ, на долю нейтрона — 14 МэВ. С учетом нейтронного сродства ее следует увеличить примерно до $14 + 8 = 22$ МэВ. Таким образом, тепловой эффект реакции dt равен $3{,}5 + 22/3 \approx 10{,}8$ МэВ, или, круглым счетом, 10 МэВ, если все продукты реакции считать как бы заряженными частицами.

Несколько сложнее обстоит дело с реакцией dd (93.1). Как уже указывалось выше, обе ветви этой реакции идут примерно с одинаковой вероятностью. Поэтому все числа, относящиеся к этим реакциям, следует уменьшить вдвое, например 3,27 МэВ заменить на 1,65 МэВ, а 4,03 МэВ — на 2 МэВ. Но главная особенность реакции dd состоит в том, что в одной из ее ветвей выделяется тритий, а он может быть использован в качестве горючего в реакторе, основанном на реакции dt. В первой ветви на долю ^{3}He приходится 0,41 МэВ, на долю нейтрона — 1,24 МэВ или, с учетом нейтронного сродства, 5,24 МэВ, что эквивалентно $5{,}24 : 3 = 1{,}7$ МэВ тепловой энергии заряженных частиц. Во второй ветви вся энергия 2 МэВ локализована в заряженных частицах t и p. К ней надо прибавить $10 : 2 = 5$ МэВ, которые выделяются в генераторе с реакцией dt. Таким образом, в пересчете на заряженные частицы тепловой эффект реакции составляет $0{,}41 + 1{,}7 + 2 + 5 = 9{,}1$ МэВ или, круглым счетом, 10 МэВ, как и в реакции dt.

Помимо выделения энергии будут происходить также ее потери: энергия будет уноситься из активной зоны реактора электромагнитным излучением плазмы и потоком уходящих частиц. Излучение в основном возникает при торможении электронов при их столкновениях с ядрами. Поэтому его мощность из единицы объема также пропорциональна n^2 и может быть представлена в виде $P_{\text{изл}} = f_{\text{изл}}(T)n^2$. Вид функций $f_{\text{яд}}(T)$ и $f_{\text{изл}}(T)$ может быть найден теоретически, но на этом вопросе мы останавливаться не можем.

Для нахождения энергетической мощности уходящего из единицы объема потока частиц введем понятие *среднего времени удержания* τ плазмы в активной зоне реактора. Так называется промежуток времени, в течение которого за единицу времени из единицы объема плазмы уходит n/τ частиц каждого знака. Это единственный феноменологический параметр, характеризующий термоядерный реактор. Поэтому условие, которое мы получим ниже из закона сохранения энергии, совершенно не зависит от индивидуальных особенностей термоядерного реактора, а должно выполняться для реактора любого типа. Через

промежуток времени τ можно выразить энергетическую мощность $P_\text{ч}$ потока частиц, уходящих из единицы объема плазмы. Кинетическая энергия частиц в единице объема плазмы равна $2 \cdot (3/2)nkT = 3nkT$ (половина энергии приходится на ядра, а другая половина — на электроны). Поэтому $P_\text{ч} = 3nkT/\tau$.

Таким образом, энергетическая мощность частиц и излучения, уходящих из единицы объема плазмы, будет $3nkT/\tau + f_\text{изл}(T)n^2$. Эта энергия поглощается защитой и выделяется в виде тепла. Часть такого тепла может быть использована путем превращения в работу с некоторым КПД η, значение которого зависит от уровня развития теплотехники. Мощность бесполезно потерянной энергии в единице объема плазмы будет

$$(1-\eta)\left[\frac{3nkT}{\tau} + f_\text{изл}(T)n^2\right],$$

или

$$\frac{2nkT}{\tau} + \frac{2}{3}\, f_\text{изл}(T)n^2,$$

если принять $\eta = 1/3$, как это уже делалось выше.

Условие протекания самоподдерживающейся ядерной реакции синтеза состоит в том, чтобы выделяющаяся термоядерная энергия была не меньше энергии, уносимой из плазмы электромагнитным излучением и потоком уходящих частиц. Математически это условие выражается формулой

$$f_\text{яд}(T)n^2 \geqslant \frac{2nkT}{\tau} + \frac{2}{3}\, f_\text{изл}(T)n^2. \tag{98.6}$$

В случае равенства в плазме будет протекать только самоподдерживающая термоядерная реакция синтеза, но не будет генерироваться энергия, которую можно было бы использовать. Для превращения установки в генератор энергии необходимо, чтобы в формуле (98.6) соблюдалось неравенство.

Условие (98.6) может быть записано в виде

$$n\tau \geqslant L(T), \tag{98.7}$$

если ввести обозначение

$$L(T) = \frac{2kT}{f_\text{яд}(T) - (2/3) f_\text{изл}(T)}. \tag{98.8}$$

Конечно, знаменатель в последней формуле должен быть положителен, так как освобождающаяся ядерная энергия во всяком случае должна превышать энергию, уносимую излучением.

Формула (98.7) выражает *условие возникновения самоподдерживающейся термоядерной реакции*, или *условие зажигания термоядерной реакции*. Она была получена в 1957 г. английским физиком Лоусоном (р. 1923) и называется *критерием Лоусона*. Функция температуры $L(T)$ зависит от вида применяемого термоядерного топлива: чистого дейтерия или равнокомпонентной смеси дейтерия и трития. Ее нахождение сводится к определению функций $f_\text{яд}(T)$ и $f_\text{изл}(T)$, что может

быть сделано теоретически (об этом уже было сказано выше). Выражение (98.8) получено в предположении, что КПД $\eta = 1/3$. Нетрудно обобщить это выражение и для других значений η; формула (98.7) при этом не меняет своего вида, изменяется только функция $L(T)$.

6. Минимальная температура, при которой начинает выполняться критерий (98.7), может рассматриваться как *оптимальная температура* для осуществления самоподдерживающейся термоядерной реакции. Она может быть найдена из условия $dL/dT = 0$. На рис. 168 приведены графики функций $L(T)$ для реакций dt и dd при $\eta = 1/3$. Из них видно, что для реакции dt оптимальная температура порядка $2 \cdot 10^8$ K, а для реакции dd — порядка 10^9 K. Если значение $n\tau$ таково, что точка $(T, n\tau)$ лежит на кривой $L = L(T)$, то в системе может происходить стационарная термоядерная реакция, но без генерации полезной энергии. Если же такая точка лежит выше указанной кривой, то система начинает работать как генератор энергии.

Далее, из графиков видно, что при $\eta = 1/3$ критерий Лоусона сводится к выполнению условий:

для реакции dt: $n\tau \geqslant 10^{14}$ см$^{-3} \cdot$ с, $T \approx 2 \cdot 10^8$ K;

для реакции dd: $n\tau \geqslant 10^{15}$ см$^{-3} \cdot$ с, $T \approx 10^9$ K.

Отсюда видно, что осуществление термоядерной реакции dt легче, чем реакции dd. Это связано с тем, что сечение реакции dt в области температур 10^8–10^9 K примерно на два порядка превышает сечение реакции dd. Это в свою очередь объясняется тем, что в указанном интервале температур реакция dt носит *резонансный* характер. Вот почему в настоящее время усилия физиков и инженеров направлены на осуществление термоядерной реакции dt. Но в перспективе с развитием термоядерной энергетики должен произойти переход к реакции dd, так как запасы ^{6}Li в природе все же ограничены.

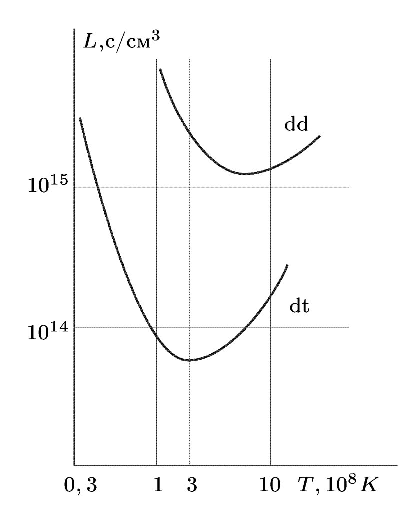


Рис. 168

Таким образом, чтобы начались термоядерные реакции, необходимо нагреть дейтерий-тритиевую плазму до температуры порядка $2 \cdot 10^8$ K, т. е. порядка 10 кэВ. При термоядерных же реакциях освобождается энергия в несколько мегаэлектронвольт на каждый акт реакции. Эта энергия в сотни раз превосходит энергию, которую надо затратить на нагревание самой плазмы. Это обстоятельство и открывает принципиальную возможность получения полезной энергии при термоядерных реакциях.

7. Для нагревания дейтерий-тритиевой плазмы до температур порядка 10^8 K могут быть использованы следующие способы.

1) *Выделение джоулева тепла* при пропускании электрического тока через плазму. Этот способ применим на начальной стадии нагревания и становится неэффективным при $T \geqslant 10^7$ К, так как проводимость плазмы быстро возрастает с температурой (приблизительно пропорционально $T^{3/2}$). Для дальнейшего нагревания плазмы требуются дополнительные способы, из которых наиболее перспективными являются способы 2) и 3), приводимые ниже.

2) *Инжекция в плазму пучков нейтральных частиц достаточно высокой энергии.* Пучки быстрых атомов формируются с помощью инжекторов — ускорителей заряженных частиц, например ядер дейтерия — дейтронов. Ускоренные дейтроны проходят через специальный слой нейтрального газа и превращаются в быстрые нейтральные атомы дейтерия, которые беспрепятственно проникают в плазму под любым углом к магнитному полю, если последнее применяется для удержания плазмы. Уже существуют инжекторы с мощностью пучка 2 МВт при энергии атомов 20–40 кэВ. Использование инжекторов привело к значительному повышению температуры плазмы. Так, на токамаке PLT (США) этим способом удалось достигнуть температуры $7 \cdot 10^7$ К.

3) *Нагревание высокочастотным электромагнитным полем.* Высокочастотное электромагнитное поле в плазме возбуждается петлей с током высокой частоты, помещаемой вблизи рабочей камеры, в которой находится плазма. Если частота поля совпадает с ионной или электронной циклотронными частотами, то происходит резонансное поглощение электромагнитных волн и соответствующее нагревание ионов или электронов плазмы. Высокая эффективность такого метода была впервые продемонстрирована в Институте атомной энергии имени И.В. Курчатова и впоследствии подтверждена на других установках. На установке PLT (США) таким методом была достигнута температура ионов до $4 \cdot 10^7$ К.

4) *Сжатие плазмы* при прохождении через нее электрического тона из-за притяжения параллельно идущих нитей тока (*пинч-эффект*). Нагревание происходит вследствие адиабатического сжатия плазмы, а также выделения тепла за счет ударных волн и турбулентных процессов.

5) *Нагревание лазерным излучением большой мощности.*

6) *Нагревание интенсивными электронными пучками.*

7) *Нагревание пучками ускоренных тяжелых ионов.*

Последние три метода относятся к установкам с плотной плазмой ($n \sim 10^{23}$ см$^{-3}$).

Указанные методы нагрева плазмы до термоядерных температур и выше являются не только принципиальными, но и технически осуществимыми. Основная трудность УТС — проблема *удержания высокотемпературной и достаточно плотной плазмы в рабочем объеме реактора.*

8. Отвлекаясь на время от способов удержания плазмы, посмотрим, какие ограничения накладываются на ее концентрацию n. Обозначим

через $\mathscr{P}_0$ давление плазмы до реакции. Во избежание разрушения стенок реактора $\mathscr{P}_0$ не может быть слишком большим, скажем, не должно превышать одной атмосферы (порядка 10^6 дин/см^2). Но $\mathscr{P}_0 \sim nkT$. При $T \approx 10^8$ K находим отсюда $n \sim \mathscr{P}_0/kT \approx 10^{14}$ см$^{-3}$. В результате выделения термоядерной энергии температура плазмы, а с ней и давление повышаются в несколько сот раз. Такое повышение давления технически допустимо; оно должно восприниматься удерживающими устройствами. При повышении температуры в сто раз выделяющаяся термоядерная энергия составляла бы $100nkT \approx 10$ Дж/см^3. В действительности энерговыделение будет больше, так как температура плазмы повышается в несколько сот раз. Это выделение энергии происходит за время удержания τ. Из критерия Лоусона (98.9) находим, что должно быть $\tau \gtrsim 1$ с. Полагая $\tau = 1$ с, видим, что мощность выделения энергии будет порядка нескольких десятков Вт/(см$^3 \cdot$ с). Для получения мощности порядка 1000 МВт необходимо, чтобы рабочий объем реактора был во много раз больше, т. е. порядка $1000 \cdot 10^6 : 10 \approx 10^8$ см$^3 = 100$ м^3. При таких объемах термоядерный реактор достигнет мощности современных крупных электростанций.

9. Следует различать два направления, по которым в настоящее время проводятся исследования по управляемому термоядерному синтезу: в одном направлении исследования ведутся с плазмой малой концентрации ($n \sim 10^{14}$ см$^{-3}$), в другом — с плазмой большой концентрации ($n \sim 10^{23}$ см$^{-3}$).

При малых концентрациях плазмы основной трудностью является достижение необходимого времени удержания (порядка секунды). Не годятся никакие вещества, из которых можно было бы сделать сосуд для удержания плазмы в течение такого времени: при соприкосновении со стенкой сосуда горячая плазма еще раньше охладилась бы и притом испарила бы стенку. Для удержания плазмы и предотвращения ее от соприкосновения со стенками сосуда используются магнитные поля различной напряженности и конфигурации. Такие поля принято называть *магнитными ловушками.* В т. III (гл. V) уже рассматривалось поведение отдельной заряженной частицы в магнитных ловушках.

В постоянном однородном магнитном поле частица движется по спирали, навивающейся на магнитную силовую линию. Ее движение ограничено только поперек магнитного поля, а параллельно полю может происходить беспредельно. Создадим однородное поле внутри ограниченного цилиндра и усилим его на концах («магнитными пробками»). Тогда получится магнитная ловушка и частица будет удерживаться в ограниченной области пространства, если только направление ее скорости не лежит внутри «конуса потерь» (см. т. III, § 88).

Ограничения области движения частицы можно также достигнуть, свернув цилиндр в тор. Однако в этом случае возникнет дрейф, приводящий к столкновению частицы со стенками тороидальной камеры (см. там же).

10. Переход от исследования движения отдельных заряженных частиц к изучению движения *всей плазмы* осложняется взаимодей-

ствием между частицами. Приближенно это взаимодействие учитывается в гидродинамической модели плазмы. В простейшей из этих моделей считается, что плазма ведет себя подобно квазинейтральной сплошной среде — жидкости, движущейся в магнитном поле. Это — *одножидкостная магнитогидродинамическая модель.* В более сложной *двухжидкостной магнитогидродинамической модели* считается, что плазма состоит как бы из двух жидкостей: одна описывает движение *электронов*, другая — *ионов.*

Можно показать, что обмен энергиями между одноименными частицами плазмы, т. е. между электронами или между ионами, происходит много быстрее, чем между разноименными, т. е. между легкими электронами и тяжелыми ионами. Иными словами, обмен теплом между различными жидкостями плазмы есть процесс более медленный, чем установление равновесного состояния каждой из этих жидкостей в отдельности. Поэтому пока не наступило полное термодинамическое равновесие плазмы, электронной и ионной компонентам можно приближенно приписать определенные температуры, вообще говоря, не совпадающие между собой.

Не входя ни в какие подробности, ограничимся простейшим примером. Пусть плазма заполняет бесконечно длинный цилиндр, параллельно оси которого в ней течет электрический ток J (такая конфигурация называется *плазменным шнуром*). Последний возбуждает магнитное поле $\mathbf{H}$, которому соответствует магнитное давление $H^2/8\pi$ (см. т. III, § 72). Если на поверхности цилиндра оно превосходит газокинетическое давление $2nkT$ (мы применим одножидкостную модель), то плазменный шнур будет сжат — это явление называется *пинч-эффектом.*

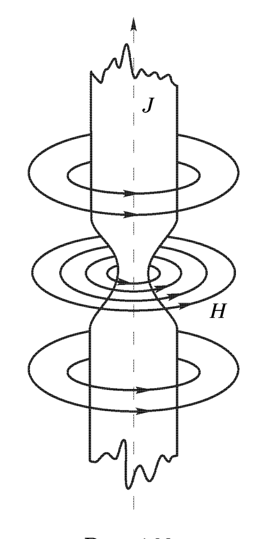


Рис. 169

Для равновесия плазменного шнура необходимо, чтобы на его поверхности магнитное давление $H^2/8\pi$ уравновешивалось газокинетическим давлением $2nkT$. Однако такое равновесие будет крайне неустойчиво. Действительно, допустим, что по случайным причинам на шнуре возникло небольшое сужение (перетяжка). В силу большой проводимости высокотемпературной плазмы магнитный поток через поперечное сечение шнура сохранится (см. т. III, § 71), так что магнитное давление на суженную часть шнура увеличится. Правда, в суженной части возрастет и газокинетическое давление. Но это вызовет только перетекание части плазмы в более широкие участки плазменного шнура. Поэтому под действием возросшего магнитного давления перетяжка на шнуре усилится, т. е. равновесие будет неустойчиво по отношению к такого рода возмущениям (рис. 169). Но равновесие плазменного шнура неустойчиво и по отношению к его малым изгибаниям. Это

видно из рис. 170 — на вогнутой стороне шнура магнитное поле, а с ним и магнитное давление больше, чем на выпуклой.

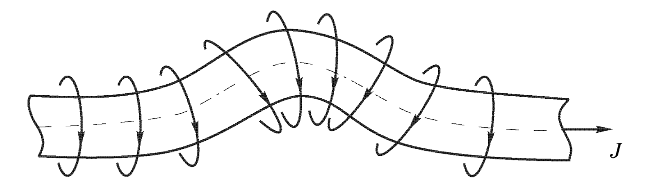


Рис. 170

В плазме существует и много других типов неустойчивостей. Природа многих из них может быть понята на основе гидродинамических моделей, но есть и такие неустойчивости, для понимания которых требуется кинетическое рассмотрение. На всех этих специальных вопросах, далеко выходящих за пределы настоящего курса, мы останавливаться не можем. Заметим лишь, что крайняя неустойчивость плазмы во всех магнитных полях простой геометрической конфигурации создает *главную трудность*, которую надо преодолеть на пути осуществления управляемого термоядерного синтеза.

Для преодоления указанной трудности идут по пути усложнения конфигурации и напряженности магнитных полей. Магнитные поля создаются не только токами, текущими в плазме, а главным образом *внешними источниками*. Не входя в детали, заметим, что удерживающее и стабилизирующее действие магнитных полей основано, в частности, на высокой электрической проводимости плазмы.

Из-за высокой проводимости магнитный поток через любой замкнутый контур, состоящий из одних и тех же частиц, остается практически постоянным при любом движении плазмы (см. т. III, § 79). Это утверждение называется *вмороженностью магнитных силовых линий в плазму*. Кроме того, вдоль магнитных силовых линий существует *натяжение* (см. там же § 72); силовые линии ведут себя подобно натянутым струнам. Оба эти фактора способствуют удержанию и стабилизации плазмы. Особенно наглядно это проявляется при устранении случайно возникших изгибов плазменного шнура.

11. Из различных магнитных ловушек в настоящее время специалисты считают наиболее перспективной ловушку, называемую *токамаком* (сокращение от «тороидальная камера с магнитными катушками»). Она была предложена и наиболее полно изучена экспериментально и теоретически в Институте атомной энергии в Москве группой физиков, возглавлявшейся Л. А. Арцимовичем и М. А. Леонтовичем, а позднее Б. Б. Кадомцевым (р. 1928). И в других странах, ведущих исследования по управляемому термоядерному синтезу (США, Япония, страны Евратома), в настоящее время отдается предпочтение токамакам.

Естественно, что в курсе общей физики можно коснуться, и притом в общих чертах, только принципа действия токамака, опуская все

конструктивные детали и инженерные вопросы. Основной частью токамака является *тороидальная вакуумная камера*, в которую вводится дейтерий (а в дальнейшем, когда от экспериментальных токамаков перейдут к сооружению энергетических реакторов, будет вводиться смесь дейтерия с тритием). Иными словами, камера представляет собой трубу, свернутую в кольцо. Радиус окружности вдоль оси этого кольца R называется *большим радиусом* тороидальной камеры. Через отверстие кольца создается магнитный поток. При его изменении во времени возбуждается параллельное оси трубы вихревое электрическое поле. Происходит электрический пробой, образуется плазма, и в кольцевой камере начинает циркулировать электрический ток. Такой ток нагревает плазму и возбуждает магнитное поле H_φ, силовые линии которого отжимают плазму от внешних стенок тороидальной камеры, формируя кольцевой плазменный шнур. Радиус поперечного сечения этого шнура a называется *малым радиусом* тороидальной камеры.

Несущественно, будет ли ток в плазменном шнуре постоянным (одного направления) или переменным, направление которого периодически меняется. Поэтому описанный индукционный способ возбуждения электрического тока в токамаке не является единственно возможным. Возможен и безындукционный способ. Можно, например, ввести в плазму электромагнитные волны определенной частоты — такие, что они вызовут движение электронов вдоль тороидального магнитного поля (см. следующий абзац), создаваемого внешними источниками. Опыты, поставленные в Японии, свидетельствуют о перспективности такого способа возбуждения тока. Его преимущество, вероятно, состоит в том, что он позволит поддерживать ток в торе токамака более длительное время, чем индукционный способ.

Для удержания и стабилизации плазменного шнура используются *тороидальное* и *полоидальное* магнитные поля, создаваемые внешними источниками. Сильное тороидальное магнитное поле H_θ направлено параллельно току в тороидальной камере и создается катушками, намотанными на тор. Как показывает теория, для магнитогидродинамической устойчивости плазмы должен выполняться так называемый *критерий Шафранова* (р. 1929)–*Крускала* (р. 1925):

$$H_\theta a > H_\varphi R. \tag{98.9}$$

Относительно слабое полоидальное поле $H_\perp \approx H_\varphi a/R$ перпендикулярно к центральной плоскости симметрии тороидальной камеры. Оно создается проводами, расположенными вдоль тора. Такое поле необходимо для удержания плазменного шнура в равновесии и удаления продуктов реакции из плазмы.

Плазма в токамаке, как уже было сказано, нагревается протекающим по ней током. Для дополнительного нагревания используются переменные электромагнитные поля, а также инжекция быстрых нейтральных атомов.

Важным параметром токамака является отношение газокинетического давления плазмы $\mathcal{P}$ к магнитному давлению $H^2/8\pi$. Его принято обозначать через β: $\beta = 8\pi\mathcal{P}/H^2$. Теория показывает, что β не

должно быть большим, так как в противном случае плазма становится неустойчивой. С другой стороны, для экономически оправданного энергетического реактора значение β должно составлять не менее 5 %. К настоящему времени в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова на токамаке Т-11 достигнуто значение $\beta = 3\,\%$, а в США на токамаке «Дублет-III» с эллиптическим сечением плазменного шнура — значение $\beta = 4{,}5\,\%$.

12. Для уменьшения энергетических потерь на создание сильного магнитного поля H (50–60 кГс и выше) предполагается использовать обмотки из *сверхпроводящих сплавов* с высокими значениями критического поля H, при котором начинается разрушение сверхпроводимости (см. т. III, § 80). Этот метод был впервые испытан в СССР на установке Т-7, в которой применялся сплав из ниобия с танталом при гелиевых температурах. В установке Т-15, сооружаемой в нашей стране, предполагается использовать сплав ниобия с оловом.

Решение проблемы высокотемпературной сверхпроводимости произвело бы революцию в криогенной технике, в частности при создании сверхсильных магнитных полей. В этом направлении ведутся интенсивные исследования в СССР, США, Японии и других странах. К концу 1986 г. появились сообщения, что получены материалы, становящиеся сверхпроводящими при температуре не только жидкого азота, но и при температурах, близких к комнатной. Сейчас же заметим, что получение сверхсильных магнитных полей предъявляет очень высокие требования к механической прочности сверхпроводящих катушек (уже при $H = 50$ кГс магнитное давление $H^2/8\pi$ будет порядка 10^2 атм, а при $H = 150$ кГс — порядка 10^3 атм).

13. В общем курсе физики нет смысла приводить подробные научно-технические сведения о состоянии проблемы УТС. Всякие сведения такого рода могут устареть уже к моменту выхода настоящей книги. Ограничимся поэтому только некоторыми произвольно выбранными данными о токамаках и результатах, полученных на них.

Самым крупным из действующих отечественных токамаков является токамак Т-10, запущенный в 1975 г. в Институте атомной энергии (Москва). Тороидальное магнитное поле в нем $H_\theta \approx 50$ кГс, объем плазмы — 5 м^3 ($R = 150$ см, $a = 39$ см), ток в плазме около 800 кА, $T \approx 1{,}2 \cdot 10^7$ К, $\tau \approx 0{,}07$ с, $n \approx 8 \cdot 10^{13}$ см$^{-3}$, $n\tau \approx 6 \cdot 10^{12}$ см$^{-3} \cdot$ с). В 1979 г. там же был запущен токамак Т-7 с параметрами, близкими к параметрам токамака Т-10, но со сверхпроводящими обмотками. Там же при экспериментальных исследованиях на токамаках было выяснено, что время удержания τ быстро возрастает с увеличением объема плазмы — приблизительно пропорционально aR^2.

На токамаке TFTR (США), запущенном в 1983 г., достигнуто рекордное значение $\tau = 0{,}19$ с ($R = 248$ см, $a = 85$ см, $H_\theta = 52$ кГс, ток в плазме — 2,5 МА, мощность дополнительного нагрева инжекцией быстрых атомов — 33 МВт, стоимость установки — 314 млн долларов). В конце 1986 г. на этой установке была получена рекордная температура

$2{,}2 \cdot 10^8$ K. При увеличении $n\tau$ в 5–10 раз при такой температуре токамак на смеси дейтерия с тритием стал бы работать уже в критическом режиме, когда выделяющаяся термоядерная энергия равна энергии, затрачиваемой на нагрев и удержание плазмы. На оси плазменного шнура на той же установке достигнута ионная температура $3{,}3 \cdot 10^8$ K (29 кэВ).

Токамаки — весьма сложные и дорогостоящие установки. Поэтому Советский Союз внес предложение в Международное агентство по атомной энергии (МАГАТЭ) объединить усилия стран, в которых ведутся работы по УТС, для создания опытного термоядерного реактора. Это предложение было принято. Установка получила название ИТЭР (Интернациональный термоядерный экспериментальный реактор). Определились участники проекта ИТЭР: СССР, США, Япония и европейские страны — члены Евратома, включая Швецию и Швейцарию, имеющие соглашения с Евратомом в области термоядерного синтеза. Проект должен быть разработан к концу 1990 г. Проектная группа будет постоянно работать в Институте физики плазмы имени Макса Планка в Гархинге вблизи Мюнхена. Основная задача ИТЭР — техническая демонстрация управляемого термоядерного синтеза. Эта установка еще не будет экономически выгодной, но она должна доказать возможность получения и использования в промышленных целях термоядерной энергии синтеза легких элементов. Ее назначение — стать прообразом будущего реактора термоядерной электростанции.

14. В заключение рассмотрим вопрос о принципиальной возможности термоядерного реактора, в котором не применяются никакие приспособления для удержания плазмы. Первоначально в вакуумную камеру реактора вводится смесь дейтерия и трития в твердом (замороженном) состоянии, которая практически мгновенно нагревается до температуры порядка 10^8 K. Ее пребывание в первоначальном ограниченном объеме определяется временем разлета плазмы порядка l/v, где l — линейный размер рассматриваемого объема, а v — средняя скорость частиц плазмы после ее нагревания. Это время и может быть принято за время удержания плазмы в рассматриваемом объеме, которое входит в критерий Лоусона (98.7). Таким образом, для зажигания плазмы должно быть $nl/v > L$, откуда

$$l > \frac{Lv}{n}. \tag{98.10}$$

Приняв для дейтериево-тритиевой плазмы $L = 10^{14}$ см$^{-3}$ · с и полагая для такой плазмы в твердом состоянии $n = 4{,}5 \cdot 10^{22}$ см$^{-3}$, $v \approx 10^8$ см/с, получим

$$l_{\text{мин}} \approx \frac{10^{14} \cdot 10^8}{4{,}5 \cdot 10^{22}} \approx 0{,}2 \text{ см} = 2 \text{ мм}.$$

Давление плазмы непосредственно после ее нагревания будет $\mathscr{P} = 2nkT \approx 2 \cdot 4{,}45 \cdot 10^{22} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-16} \approx 10^{15}$ дин/см^2 $\approx 10^6$ атм, если не учитывать сжатия плазмы в процессе нагревания. После того как совершится термоядерная реакция, оно увеличится примерно еще

в 1000 раз, т. е. достигнет приблизительно 10^9 атм. Такое повышение давления может быть названо микровзрывом, так как оно происходит в объеме $\omega \approx l^3 \approx 0{,}01$см^3. Если объем камеры $V = 1$ м^3 $=$ $= 10^6$ см^3, а микровзрыв происходит в ее центре, то максимальное давление на стенки камеры будет порядка $10^9 V/\omega \approx 10$ атм, что при достаточной толщине стенок камеры не представляет опасности. В действительности при быстром введении энергии в плазму последняя сильно сжимается. Но это сжатие повышает давление плазмы только в месте ее образования, а повышения давления на стенки камеры не произойдет, так как на них действует уже расширившаяся плазма.

Очевидно, что такой термоядерный реактор будет импульсным: в рабочую камеру реактора должно периодически вводиться и взрываться в ней термоядерное топливо в виде небольших крупинок.

Трудности создания термоядерного реактора рассмотренного вида не исчезают. Они только переносятся с проблемы удержания плазмы на проблему ее нагрева. Ведь этот нагрев должен быть осуществлен за время, не превосходящее времени разлета плазмы, т. е. быстрее чем за $l_{\text{мин}}/v \approx 2 \cdot 10^{-9}$ с.

Преодоление указанной трудности идет по двум направлениям. Во-первых, нагревание плазмы до температуры порядка 10^8 К производится концентрацией лазерного излучения на крупинках термоядерного топлива (Н. Г. Басов (р. 1922) с сотрудниками). Во-вторых, такая же концентрация производится пучками ускоренных релятивистских электронов (Е. К. Завойский (1907–1976) с сотрудниками), а также ускоренных тяжелых ионов. В обоих направлениях достигнуты заметные успехи, но мы не будем на них останавливаться.

§ 99. Нейтронная оптика

1. Волновые свойства нейтронов проявляются тем отчетливее, чем больше длина волны соответствующих им волн де Бройля, т. е. чем меньше их кинетическая энергия. Напротив, для нейтронов очень высоких энергий на первый план выступают корпускулярные свойства. В целях краткости волны де Бройля для нейтронов будем называть в дальнейшем просто *нейтронными волнами.* Некоторые характеристики нейтронов приведены в табл. 17. Самыми длинноволновыми являются *ультрахолодные нейтроны*, у которых длина волны лежит в пределах оптической области электромагнитного спектра (длинный ультрафиолет, видимый свет, инфракрасное излучение). Их скорости не превышают 10 м/с. В поле тяжести Земли свободные ультрахолодные нейтроны движутся по параболам и могут подняться на высоту всего в несколько метров. *Тепловые нейтроны* характеризуются тем, что их кинетическая энергия порядка kT, причем температура T лежит в интервале от нескольких десятков до нескольких тысяч кельвинов.

В общем случае длина нейтронной волны определяется соотношением

$$\lambda = h/p. \tag{99.1}$$

Таблица 17

Некоторые характеристики нейтронов

Нейтроны	Энергия, эВ	Скорость, м/с	Длина волны, нм	Температура, К
Ультрахолодные	$< 5 \cdot 10^{-7}$	< 10	> 40	$6 \cdot 10^{-3}$
Очень холодные	$5 \cdot 10^{-7}$–$2 \cdot 10^{-4}$	10–200	40–2	$6 \cdot 10^{-3}$–2
Холодные	$2 \cdot 10^{-4}$–$5 \cdot 10^{-3}$	200–1000	2–0,4	2–60
Тепловые	$5 \cdot 10^{-3}$–10^{-1}	1000–4500	0,4–0,09	60–1000
Резонансные	10^{-1}–10^{-4}	—	0,09–$3 \cdot 10^{-5}$	—
Промежуточные	10^4–10^5	—	$3 \cdot 10^{-5}$–10^{-4}	—
Быстрые	10^5–10^8	—	10^{-4}–$3 \cdot 10^{-6}$	—
Высокоэнергетичные	10^8–10^{10}	—	$3 \cdot 10^{-6}$–10^{-7}	—
Релятивистские	$> 10^{10}$	—	$< 10^{-7}$	—

Если $p \ll mc$, где m — масса нейтрона, то можно пользоваться нерелятивистской формулой $p^2 = 2m\mathscr{E}$, так что

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m\mathscr{E}}}. \tag{99.2}$$

Здесь $\mathscr{E}$ означает кинетическую энергию нейтрона. Для *быстрых нейтронов* эта формула дает еще достаточную точность. Но для *высокоэнергетических* и в особенности *релятивистских* нейтронов надо пользоваться релятивистским соотношением

$$(pc)^2 = \mathscr{E}_{\text{рел}}^2 - (mc^2)^2.$$

Если учесть, что $\mathscr{E}_{\text{рел}} = \mathscr{E} + mc^2$, то получается релятивистская формула

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{\mathscr{E}^2 + 2\mathscr{E}mc^2}}. \tag{99.3}$$

Общий характер дифракции волн любой природы определяется прежде всего их длиной. В этом отношении, как показывает табл. 17, условия дифракции тепловых и коротковолновых холодных нейтронов примерно такие же, что и для жестких рентгеновских лучей. Дифракция на кристаллах может отчетливо наблюдаться только тогда, когда длина волны порядка или меньше постоянной кристаллической решетки.

Понятно, что направления на главные дифракционные максимумы, поскольку они имеют общеволновой характер, определяются одинаково для волн всех видов: рентгеновских, электронных, нейтронных. В частности, для описания дифракции нейтронных волн в кристаллах справедливо условие Брэгга–Вульфа (18.1), т. е.

$$2d \sin\varphi = m\lambda, \tag{99.4}$$

где d — межплоскостное расстояние, φ — угол скольжения, $m = 1, 2, 3, \ldots$ При выполнении этого условия в кристалле происходит так называемое *интерференционное отражение* волн, т. е. усиление волн, отраженных от параллельных атомных плоскостей кристалла (см. т. IV, § 34, 61).

2. Существенно отметить, что при $\lambda > 2d$ условие (99.4) не может выполняться ни при каком угле скольжения. Таким образом, для достаточно длинных волн интерференционное отражение от кристалла невозможно. Но, конечно, как и в световой оптике, возможно обыкновенное, или полное, отражение от граней кристалла. Для ультрахолодных нейтронов реализуется именно этот случай.

Энергия нейтрона, при которой исчезает интерференционное отражение, называется энергией *брэгговского скачка.* Она различна для различных кристаллов и по порядку величины равна 10^{-3} эВ. Явление брэгговского скачка используется для отфильтровывания холодных нейтронов путем отражения пучка нейтронов от монокристаллов.

Строение кристаллов, сплавов, жидкостей, молекул и других объектов исследуется в рентгенографии и электронографии путем дифракции рентгеновских лучей и электронов. Для исследования кристаллов применяются методы Брэгга, Лауэ и Дебая–Шерера–Хелла (см. т. IV, § 61). Такие же методы применимы и в нейтронографии, основанной на дифракции тепловых нейтронов. Метод Дебая–Шерера–Хелла (метод порошка) в нейтронографии обычно применяется в тех случаях, когда трудно или даже невозможно выращивать достаточно крупные монокристаллы. Но использование порошков дает меньшую информацию по сравнению с тем, что можно получить, используя монокристаллы и добиваясь получения отражения нейтронных волн от максимально возможного числа атомных плоскостей.

Основными методами структурного анализа объемных объектов являются рентгенография и нейтронография. Электронография из-за незначительной проникающей способности электронов применяется преимущественно для исследования поверхностных структур. Метод дифракции нейтронов по распространенности не может сравниться с рентгеновским методом из-за ограниченной доступности источников нейтронов. Однако нейтронографический метод может выявить такие особенности структуры изучаемых объектов, которые недоступны рентгеновскому методу, и наоборот. Это связано с тем, что особенности дифракционных картин определяются не только длиной волны, но и другими физическими свойствами, которые у нейтронов и рентгеновских квантов различны. Оба метода не противоречат, а взаимно дополняют друг друга.

3. В нашу задачу не входит изложение методов и результатов нейтронографии. Отметим только некоторые принципиальные особенности, которые во многих областях делают нейтронографические методы незаменимыми.

При одной и той же длине волны энергии рентгеновских квантов, электронов и нейтронов не одинаковы. Так, при $\lambda = 10^{-8}$ см, как легко вычислить, энергия рентгеновского кванта равна 12,5 кэВ, энергия

электрона 150 эВ, а энергия нейтрона всего 0,08 эВ. Малая энергия частиц, из которых состоит излучение, существенна при облучении легко разрушаемых, например биологических, объектов. В этом отношении предпочтение надо отдать нейтронам по сравнению с рентгеновскими квантами.

Рентгеновские волны рассеиваются электронными оболочками атомов. Амплитуда рассеяния (определение этого понятия см. в п. 4) рентгеновских волн на атоме пропорциональна числу электронов в оболочке, т. е. зарядовому числу Z. Поэтому эти амплитуды сильно отличаются для легких и тяжелых атомов. Рентгенография практически не позволяет различать в кристалле разные атомы, если в них содержится почти одинаковое число электронов; совсем неразличимы изотопы одного и того же элемента. Рентгенография практически не позволяет обнаружить очень легкие атомы (например, водород) на фоне тяжелых (свинец, торий, уран, редкоземельные элементы и пр.). Но все это доступно методам нейтронографии, так как на нейтроны действуют не электрические, а *ядерные силы* — эти частицы рассеиваются атомными ядрами. Поэтому дифракция нейтронов дает информацию не об электронных оболочках, а о расположении *атомных ядер* — центров самих атомов. Амплитуды рассеяния и связанные с ними сечения нейтронов на ядрах одного и того же порядка для всех ядер — от самых легких до самых тяжелых. Поэтому-то на рентгенограммах химических соединений, содержащих как легкие, так и тяжелые элементы (H_2O, PbS, ThD_2 и т. д.), дифракция на легких атомах едва заметна, тогда как на нейтронограммах она проявляется отчетливо. Все же амплитуды рассеяния и сечения нейтронов на ядрах, оставаясь одного порядка по величине, нерегулярно меняются (иногда резко) при переходе от одного ядра к соседнему и от одного изотопа к другому изотопу того же элемента (см. табл. 18). Поэтому методы нейтронографии особенно необходимы для расшифровки структуры сплавов и химических соединений из элементов с близкими зарядовыми числами (FeCo, NiMn и т. д.), компоненты которых имеют сходные электронные конфигурации, но резко различаются по ядерным сечениям.

Нейтроны не имеют электрического заряда и поэтому непосредственно не вызывают ионизации вещества. Ионизация вызывается вторичными заряженными частицами (протонами отдачи, электронами, позитронами), порождаемыми нейтронами при ядерных столкновениях. Эти заряженные частицы в нейтронографии и регистрируются детекторами. Нейтроны не действуют и на фотопластинку, так как фотографическое действие вызывается электрическими, а не ядерными силами. Чтобы для регистрации нейтронов использовать фотопластинку, фотослой покрывают фольгой из элементов, которые под действием нейтронов становятся β- или γ-активными (Gd, Dy, In). В местах, куда попадают нейтроны, они реагируют с ядрами фольги. Образуются радиоактивные ядра, излучения которых и действуют на фотопластинку. Первые нейтронограммы были получены с помощью фотографического метода на экране из индия и фотопленки в 1948 г. (см. § 18, п. 9). Созданная к настоящему времени фольга из смеси ^{6}LiF–ZnS(Ag)

в сочетании с высокочувствительной рентгеновской пленкой позволяет фотометоду успешно конкурировать с традиционными методами детектирования нейтронов.

Жесткие рентгеновские лучи рассеиваются преимущественно вперед. При тех же длинах волн рассеяние нейтронов происходит изотропно. Поэтому при переходе к большим углам рассеяния интенсивность рентгеновских пиков на рентгенограмме резко падает, тогда как на нейтронограмме интенсивность нейтронных максимумов почти не меняется.

Проникающая способность нейтронов в тысячи раз больше, чем у рентгеновских лучей той же длины волны. Это связано с тем, что благодаря электрической нейтральности нейтрон не подвергается воздействию кулоновского поля атома, а потому легко проникает внутрь его и взаимодействует с ядром посредством ядерных сил. Поэтому для исследования внутренних областей образцов нейтронографические методы более эффективны, чем рентгеновские.

Особенно большое значение нейтронографический метод получил для исследования биологических макромолекул. Химический состав последних ограничен практически четырьмя элементами — водородом, углеродом, азотом и кислородом, которые являются близкими соседями по периодической системе Менделеева. А как уже подчеркивалось выше, это обстоятельство делает их практически неразличимыми рентгенографическим методом. Сложность же структурного анализа биологических кристаллов иллюстрируется следующим примером. Элементарная ячейка миоглобина содержит 1200 атомов. Для достижения нужного разрешения 0,14–0,2 нм были произведены измерения с использованием более чем 10 000 брэгговских отражений.

Тепловые и холодные нейтроны (если они не захватываются ядрами) не возбуждают атомные ядра и даже сами атомы. Но они могут возбудить акустические колебания кристаллической решетки — фононы. Это дает метод установления одной из важнейших характеристик вещества — закона дисперсии, т. е. зависимости энергии $\mathscr{E}$ элементарного возбуждения от его импульса p. Именно таким методом была получена кривая на рис. 116, первоначально постулированная Ландау на основе термодинамических соображений в его теории сверхтекучести (см. § 61).

4. Процесс распространения нейтронных волн в среде, частным случаем которого является дифракция, детально может быть описан подобно тому, как описывается распространение световых волн в молекулярной оптике. В основу такого описания кладут элементарные акты рассеяния нейтронных волн на отдельных атомных ядрах. Пусть на ядро падает плоская монохроматическая нейтронная волна вида $\psi = e^{ikr}$. Рассеянная атомным ядром волна на далеких расстояниях в линейном приближении может быть представлена в виде

$$\psi_1 = \frac{b}{r}\,\psi = \frac{b}{r}\,e^{ikr}, \qquad (99.5)$$

где постоянная величина b, имеющая размерность длины, называется *амплитудой рассеяния* (начало координат помещено в рассеивающем центре, т. е. в центре ядра атома). Она может зависеть от направления рассеяния. Но если ядро сферически-симметрично, а его размеры пренебрежимо малы по сравнению с длиной нейтронной волны (только такие волны и рассматриваются в этом параграфе), то такой зависимости нет, т. е. само рассеяние также сферически-симметрично.

Через амплитуду рассеяния можно выразить эффективное сечение σ рассеяния нейтронной волны на атомном ядре. Плотность вероятности нахождения рассеянного нейтрона в пространстве равна $|\psi_1|^2 = |b|^2/r^2$, плотность радиального потока вероятности $v|\psi_1|^2 = v|b|^2/r^2$, где v — радиальная скорость нейтрона. Вероятное число нейтронов, проходящих в одну секунду через площадку dS, нормальную к радиусу, будет $dSv|b|^2/r^2 = v|b|^2\,d\Omega$, где $d\Omega = dS/r^2$ — телесный угол, под которым видна площадка dS из центра рассеяния. Плотность потока вероятности падающей волны равна $v|e^{ikr}|^2 = v$, так что для эффективного сечения рассеяния в телесный угол $d\Omega$ получаем

$$d\sigma = \frac{v|b|^2\,d\Omega}{v} = |b|^2\,d\Omega, \tag{99.6}$$

а для полного сечения рассеяния

$$\sigma = 4\pi|b|^2. \tag{99.7}$$

5. Амплитуда рассеяния может быть введена и для рассеяния рентгеновских лучей на атомах совершенно так же, как это делается для нейтронов. В табл. 18 приведены амплитуды рассеяния f рентгеновских лучей на атомах (для угла рассеяния, равного нулю) и амплитуды рассеяния нейтронов b на атомных ядрах для некоторых элементов. Если у символа химического элемента указано массовое число, то амплитуды рассеяния относятся к определенному изотопу соответствующего элемента. Если же массовое число не указано, то имеется в виду рассеяние на естественной смеси изотопов этого элемента.

Амплитуды рассеяния рентгеновских лучей на атомах, как легко проверить по табл. 18, меняются строго пропорционально числу электронов в электронных оболочках атомов. В частности, они абсолютно одинаковы для изотопов одного и того же химического элемента. На эту закономерность уже было указано выше. Амплитуды же рассеяния нейтронов на ядрах меняются нерегулярно при переходе от одного ядра к другому. По порядку величины они в среднем лежат в интервале 10^{-13}–10^{-12} см для всех ядер — от самых легких до самых тяжелых. Этого и следовало ожидать, так как величина 10^{-24} см^2 является характерным эффективным сечением для ядерных процессов. Так как интенсивность рассеяния определяется квадратом амплитуды рассеяния, то рассеяние рентгеновских лучей атомом урана в $(25{,}9/0{,}282)^2 = 8400$ раз интенсивнее, чем атомом водорода. Для нейтронов же интенсивность рассеяния увеличивается в этом случае всего в $(0{,}82/0{,}374)^2 = 4{,}8$ раз. Важность этого факта в структурном анализе была отмечена выше.

Таблица 18

Амплитуда рассеяния рентгеновских лучей (f) и нейтронов (b) некоторыми элементами (в единицах 10^{-12} см)

Элемент	Число электронов	f	b	Элемент	Число электронов	f	b
H	1	0,282	$-0{,}374$	V	23	6,5	$-0{,}05$
D	1	0,282	0,667	Fe	26	7,3	0,95
Li	3	0,84	$-0{,}214$	Ni	28	7,9	1,03
^{6}Li	3	0,84	$0{,}18 + i\,0{,}025$	^{58}Ni	28	7,9	1,44
B	5	1,41	$0{,}54 + i\,0{,}021$	^{62}Ni	28	7,9	$-0{,}87$
^{10}B	5	1,41	$0{,}14 + i\,0{,}11$	Zr	40	11,3	0,71
O	8	2,25	0,575	Cd	48	13,6	$0{,}37 + i\,0{,}16$
S	16	4,5	0,28	^{113}Cd	48	13,6	$-1{,}5 + i\,1{,}2$
Ti	22	6,2	$-0{,}34$	U	92	25,9	0,82

6. Вследствие наличия у некоторых ядер резонансных уровней энергии, близких к энергии тепловых нейтронов, амплитуда рассеяния b для таких ядер отрицательна, а в случае поглощения ядрами нейтронов становится комплексной. В табл. 18 комплексная амплитуда b дана для нейтронов с длиной волны 0,1 нм. Если ограничиться только незатухающими нейтронными волнами, то амплитуда рассеяния должна быть вещественной: положительной или отрицательной.

Знак амплитуды рассеяния может отразиться на наблюдаемых физических явлениях. Рассмотрим, например, рассеяние нейтронной волны на кристаллической решетке. Его можно интерпретировать как результат отражения волн от параллельных атомных плоскостей и их последующей интерференции. Интерференционное усиление отраженных волн выражается условием Брэгга–Вульфа (99.4). Если атомная плоскость состоит из атомных ядер одного вида, то волны, рассеянные на отдельных ядрах, усиливают друг друга в направлении, в котором должно происходить отражение от этой плоскости. Допустим теперь, что атомная плоскость состоит из атомных ядер двух сортов, амплитуды рассеяния которых вещественны, но противоположны по знаку. Тогда от нее получатся две отраженных волны, фазы которых противоположны. Такие волны будут ослаблять друг друга. В том случае, когда амплитуды рассеяния одинаковы по величине, произойдет интерференционное гашение обеих волн. Значит, на атомной плоскости не будет отражения, не появятся и дифракционные пучки.

Различие знаков амплитуд рассеяния нейтронов практически используется для приготовления так называемых *нулевых матриц* , т. е. сплавов, для которых при определенных концентрациях компонентов амплитуда рассеяния в среднем равна нулю. В таких сплавах не происходит когерентного рассеяния нейтронов. К ним относятся сплавы

Ti–Zr, сплавы на основе Mn, а также изотопическая смесь на основе Ni. Рассмотрим, например, сплав Ti–Zr. Обозначим через x процентное содержание в нем Ti (по числу атомов). Такой сплав не будет когерентно рассеивать нейтроны при выполнении условия

$$0{,}34x + 1{,}44(1 - x) = 0,$$

т. е. при $x = 80\,\%$. Впрочем, это заключение не отличается той же ясностью, какая была в случае кристаллической решетки, построенной из атомов двух сортов. Оно предполагает *когерентность волн*, рассеянных всеми атомами. А это не будет соблюдаться, если различные атомы сплава расположены в пространстве хаотически.

7. Нейтронная волна, проникая из вакуума в среду, рассеивается на атомных ядрах. Если отвлечься от всех флуктуационных процессов, то рассеянные волны будут когерентны между собой, поскольку они возбуждаются одной и той же падающей волной. Конечно, это справедливо только тогда, когда рассеянные ядра достаточно массивны — их массы должны быть велики по сравнению с массой нейтрона. В противном случае при рассеянии на ядрах будет сильно меняться длина нейтронной волны, что поведет к нарушению когерентности. В случае же тяжелых ядер, который только и рассматривается нами, этот эффект незначителен, так что рассеянные волны могут считаться практически когерентными. Разумеется, в веществе не должны происходить ядерные реакции под действием нейтронов. При выполнении этих условий нейтронные волны, рассеянные ядрами, будут интерферировать между собой и с падающей волной. В результате такой интерференции и формируется нейтронная волна в среде. Так же формируются отраженная волна и дифракционные пучки в явлениях дифракции.

8. Исходя из этих представлений, введем *показатель преломления* нейтронных волн в средах. Рассмотрим плоскопараллельный слой вещества, толщина которого Δz много меньше длины волны λ (рис. 171). Пусть на этот слой падает нейтронная волна вида e^{ikz}. Поле нейтронной волны, рассеянной одним ядром, в удаленной точке P будет be^{ikr}/r. Чтобы просуммировать такие поля, используем метод зон Френеля (см. т. IV, § 39). В оптике применимость этого метода предполагает слабое затухание волн, приходящих в точку наблюдения от последовательных зон Френеля. Такое же предположение используется и для нейтронных волн. В этом предположении полное поле излучения рассматриваемого нами слоя в точке наблюдения равно половине излучения вырезанной из него центральной зоны Френеля. Площадь центральной зоны Френеля

$$S = \pi R^2 = \pi\left(z + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \pi z^2 = \pi z\lambda.$$

На ней помещается $NS\Delta z$ ядер, где N — число ядер в единице объема. Если бы все волны, излучаемые ядрами, приходили в точку P в одинаковых фазах, то поле излучения в этой точке было бы

$$\frac{1}{2}\,\frac{S\Delta z N b e^{ikz}}{z} = \frac{1}{2}\,\pi N b e^{ikz}\Delta z.$$

В действительности все рассеянные волны запаздывают по фазе по сравнению с волной, исходящей из центра зоны. Для волн, исходящих из периферийных точек зоны, это запаздывание составляет π. Чтобы учесть запаздывание, применим метод векторных диаграмм. Для этого разобьем всю центральную зону на бесконечно узкие кольца одинаковой площади. Волны, излучаемые такими кольцами, будут иметь одинаковые амплитуды (если не учитывать влияние наклона лучей к плоскости зоны, что приближенно допустимо). Если бы все фазы таких волн

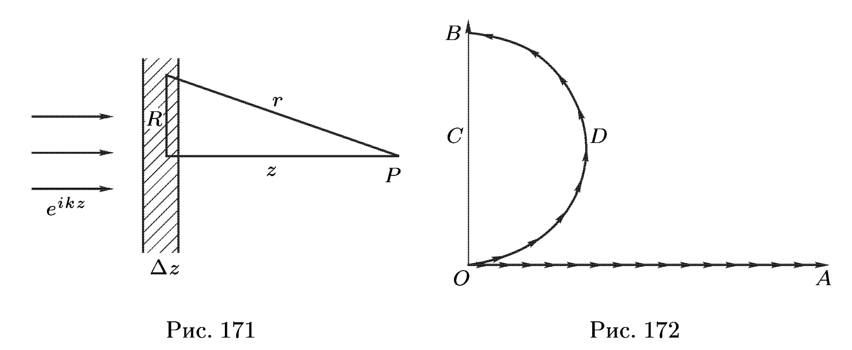


Рис. 171 Рис. 172

были одинаковы, то результирующая волна, излучаемая центральной зоной в точке наблюдения P, изобразилась бы на векторной диаграмме прямолинейной цепочкой OA из бесконечно малых векторов, представляющих излучения таких колец (рис. 172). На самом деле из-за сдвига фаз эти векторы должны быть повернуты относительно друг друга на один и тот же угол, причем направление последнего вектора должно быть противоположно направлению первого. Иными словами, прямолинейная цепочка OA должна быть заменена ломаной ODB той же длины, образующей половину правильного многоугольника.

В пределе, когда длина каждого звена этой ломаной стремится к нулю, она переходит в полуокружность той же длины, что и длина прямолинейной цепочки OA. Вектор $\overrightarrow{OB}$, замыкающий эту полуокружность, и представляет на векторной диаграмме волну в точке наблюдения, излучаемую центральной зоной, а половина $\overrightarrow{OC}$ этого вектора — результирующую волну всего плоскопараллельного слоя. Вектор $\overrightarrow{OC}$ повернут относительно прямолинейной цепочки на угол $\pi/2$. Это значит, что результирующая волна запаздывает по фазе на $\pi/2$ относительно волны, исходящей из центра зоны. Следовательно, для получения правильной амплитуды надо предыдущее выражение умножить на $2/\pi$, а для получения правильной фазы — на $e^{-i\pi/2} = -i$. Таким образом,

рассеянная волна в точке P будет

$$-i\lambda Nbe^{ikz}\Delta z.$$

Добавив сюда падающую волну e^{ikz}, получим полную волну в точке P:

$$\psi_P = (1 - i\lambda Nb\Delta z)e^{ikz} = e^{i(kz-\lambda Nb\Delta z)},$$

так как для применимости вывода необходимо предположить, что $\lambda N|b|\Delta z \ll 1$. С другой стороны, ту же волну можно выразить через показатель преломления n нейтронных волн, а именно

$$\psi_P = e^{ik(z-\Delta z)+ikn\Delta z} = e^{i[kz+k(n-1)\Delta z]}.$$

Сравнивая это выражение с предыдущим, получим

$$n = 1 - \frac{Nb\lambda}{k} = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{Nb\lambda^2}{\pi}. \tag{99.8}$$

9. Формула (99.8) справедлива только при условии

$$N|b|\lambda^2 \ll 1. \tag{99.9}$$

Действительно, в формуле (99.5) под ψ надо понимать *полную волновую функцию*, создаваемую всеми внешними источниками в точке нахождения рассеивающего ядра. Между тем при выводе (99.8) вместо полной волновой функции была использована только *падающая* плоская волна и не были учтены волны, рассеянные всеми ядрами, внешними по отношению к рассматриваемому ядру. В частности, не учитывались эффекты отражения волн на границах слоя Δz. Это, между прочим, проявилось в том, что при прохождении через слой в рассматриваемом приближении менялась только фаза волны, но не ее амплитуда.

Можно было бы обобщить формулу (99.8) на случай, когда условие (99.9) не соблюдается, приняв во внимание рассеяние на ядрах не только первичной падающей волны, но и рассеяние всех вторичных волн, исходящих из ядер среды. Мы не будем этого делать, а предпочтем формальный, но более простой путь, использующий аналогию между волновой оптикой и классической механикой (см. т. IV, § 3, 4).

Пусть нейтрон падает из вакуума на плоскую границу среды. Так как он обладает и волновыми, и корпускулярными свойствами, то показатель преломления n можно определить двояко: либо как отношение фазовых скоростей нейтронных волн в вакууме и среде, либо как отношение скорости самого нейтрона в среде v_2 к его скорости в вакууме v_1:

$$n = v_2/v_1.$$

Траектория нейтрона испытывает преломление на границе среды потому, что на него со стороны границы действует сила отталкивания или притяжения. Это действие можно учесть, введя скачок U потенциальной энергии нейтрона при пересечении границы среды:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + U,$$

где m — масса нейтрона. Следовательно,

$$n^2 = \frac{v_2^2}{v_1^2} = 1 - \frac{2U}{mv_1^2}.$$

Введя сюда длину нейтронной волны в вакууме $\lambda = h/(mv_1)$, получим

$$n^2 = 1 - \frac{2Um\lambda^2}{h^2}.$$

Для определения постоянной Um/h^2 замечаем, что при $|n-1| \ll 1$ последняя формула переходит в

$$n = 1 - \frac{Um\lambda^2}{h^2}.$$

Но в этом случае справедлива также формула (99.8). Из сравнения обеих формул находим $Um/h^2 = Nb/(2\pi)$, так что окончательно

$$n^2 = 1 - \frac{Nb\lambda^2}{\pi}. \tag{99.10}$$

10. При выполнении условия (99.9), как уже было отмечено, показатель преломления нейтронных волн весьма близок к единице. Но в зависимости от знака b он может быть как меньше (когда $b > 0$), так и больше единицы (когда $b < 0$). В этом одно из отличий нейтронных волн от рентгеновских, для которых всегда $n < 1$. Это объясняется тем, что частота рентгеновских волн всегда больше собственных частот колебаний электронов в атомах. Энергия же тепловых нейтронов может как превосходить энергии резонансных уровней ядер, так и быть меньше их. Если $n < 1$, то при достаточно малых углах скольжения нейтронная волна, падая из вакуума, испытывает полное отражение от границы среды.

Более интересен случай ультрахолодных нейтронов, когда выполняется условие

$$\frac{Nb\lambda^2}{\pi} > 1. \tag{99.11}$$

В этом случае, согласно формуле (99.10), показатель преломления n чисто мнимый. Следовательно, если нейтронная волна падает на поверхность среды из вакуума, то она может проникнуть в среду только на малую глубину, а затем полностью отразиться (см. т. IV, § 64, п. 2).

Условию (99.11) можно придать следующую форму:

$$\lambda > \lambda_{\text{гр}}, \tag{99.12}$$

где

$$\lambda_{\text{гр}} = \sqrt{\frac{\pi}{Nb}}. \tag{99.13}$$

Эта величина называется *граничной длиной волны нейтрона*, а соответствующие ей энергия и скорость

$$\mathscr{E}_{\text{гр}} = \frac{mv_{\text{гр}}^2}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{Nbh^2}{\pi m}, \tag{99.14}$$

$$v_{\text{гр}} = \frac{h}{m\lambda_{\text{гр}}} \tag{99.15}$$

— *граничными энергией* и *скоростью нейтрона.* Эти величины приведены для некоторых материалов в табл. 19.

Таблица 19

Граничные энергия, длина волны и скорость нейтронов для некоторых материалов

Материал	$\mathscr{E}_{\text{гр}}$, 10^{-7} эВ	$\lambda_{\text{гр}}$, нм	$v_{\text{гр}}$, м/с
Алюминий	0,55	122	3,2
Магний	0,605	116	3,36
Медь	1,72	69	5,7
Углерод	1,94	65	6,1
Бериллий	2,40	58	6,8

11. Для получения ультрахолодных нейтронов используются ядерные реакторы. При делении ядер урана или плутония в ядерных реакторах получаются нейтроны со средней энергией в несколько мегаэлектронвольт. Они замедляются до тепловых энергий в веществе, окружающем ТВЭЛы с делящимся веществом. При этом возникают и ультрахолодные нейтроны. Однако их число составляет примерно только 10^{-13} часть от общего числа нейтронов (если температура замедлителя близка к комнатной). Ультрахолодные нейтроны выводятся из реактора по сильно изогнутой трубе — *нейтроноводу.* Все нейтроны, за исключением ультрахолодных, не в состоянии преодолеть резкие изгибы нейтроновода и поглощаются его стенками и окружающим веществом. Ультрахолодные же нейтроны испытывают полное отражение на границе вакуум — среда. Обычно вблизи активной зоны реактора в нейтроноводе помещается дополнительный замедлитель, называемый *конвертором.* Его полезно охлаждать для увеличения доли ультрахолодных нейтронов. Часто нейтроновод делают наклонным и поднимающимся вверх. Тогда нейтроны будут испытывать дополнительное замедление под действием силы тяжести.

Другой способ получения ультрахолодных нейтронов использует отражение нейтронов от движущегося («убегающего») магнитного зеркала (принцип работы последнего указан ниже). Удобство этого способа состоит в том, что в нем все приборы располагаются вне защиты реактора.

Указанные способы позволяют получать потоки ультрахолодных нейтронов с интенсивностью в сотни нейтронов в секунду с каждого

квадратного сантиметра поперечного сечения нейтроновода. Реально получаемые плотности ультрахолодных нейтронов не превосходят 1 см^{-3}.

12. На полном отражении ультрахолодных нейтронов, удовлетворяющих условию (99.12), основано устройство *ловушек ультрахолодных нейтронов*, принцип действия которых был указан Я. Б. Зельдовичем (1914–1987) в 1959 г. Ловушка представляет собой полый сосуд, в котором создан вакуум. Ультрахолодные нейтроны, удовлетворяющие условию (99.11) и находящиеся в таком сосуде, падая на его стенки, полностью отражаются обратно, каков бы ни был угол падения. Так действовала бы идеальная ловушка с идеально чистыми и гладкими стенками. В реальной ловушке стенки шероховаты, загрязнены, совершают колебания и т. д. Взаимодействие нейтронов со стенками приводит к их поглощению и нагреванию нейтронного газа. Особенно велико влияние пленки загрязнений, состоящей из водородсодержащих веществ, в частности воды. Все это понижает время хранения ультрахолодных нейтронов в сосуде. Все же к настоящему времени удалось довести это время до 1000 с, что практически совпадает со средним временем жизни нейтрона до β-распада: (917 ± 14) с.

Ультрахолодные нейтроны могут быть использованы в опытах по обнаружению у нейтрона возможного электрического заряда Q_n и электрического дипольного момента d_n, а также для изучения других фундаментальных свойств нейтрона. Опыты показали, что $Q_\text{n} < 2 \cdot 10^{-21} e$ (e — элементарный заряд), а $d_\text{n} < 2 \cdot 10^{-25} e$ (см).

13. Нейтроны обладают магнитным моментом $\mu = 6{,}03 \times \times 10^{-12}$ эВ/Гс. Поэтому нейтронные волны могут рассеиваться не только на ядрах, но и на самих атомах, если их электронные оболочки также обладают магнитными моментами. (Магнитные моменты ядер в тысячи раз меньше и поэтому роли не играют.) Это рассеяние, таким образом, обусловлено не ядерными, а *электромагнитными* силами. Оно может быть описано аналогично рассеянию на ядрах, а именно с помощью *амплитуды магнитного рассеяния нейтронов.* Для магнитных веществ (железо, кобальт, никель и пр.) ядерная и магнитная амплитуды рассеяния — одинакового порядка. Если магнитные моменты атомов в веществе ориентированы хаотически, то магнитное рассеяние атомов не когерентно. Но если их направления упорядочены, то получается когерентное рассеяние с дифракционными максимумами, положение которых определяется магнитной структурой вещества. В качестве примера на применение магнитной нейтронографии укажем, что именно она позволила установить магнитную структуру антиферромагнетиков.

Благодаря наличию магнитного момента ультрахолодные нейтроны могут испытывать полное отражение от областей сильного магнитного поля (магнитных зеркал). Для этого магнитный момент нейтрона должен быть ориентирован так, чтобы нейтрон выталкивался из магнитного поля и чтобы его кинетическая энергия $\mathcal{E}$ не превосходила μH. Если $\mathcal{E} = 10^{-7}$ эВ, то должно быть $H > \mathcal{E}/\mu = 1{,}7 \cdot 10^4$ Гс.

Полное отражение нейтронов от магнитных зеркал в магнитном поле позволяет получать интенсивные пучки *полностью поляризованных* нейтронов. Методы магнитной нейтронографии дают информацию об ориентации магнитных моментов каждого из компонентов в бинарных магнитных сплавах.

Созданы нейтронные ловушки — *нейтронные накопительные кольца*, использующие иной принцип удержания ультрахолодных нейтронов, чем ловушки, описанные выше. В таких кольцах нейтроны с энергией меньше $2 \cdot 10^{-6}$ эВ удерживаются на орбите с диаметром порядка 1 м неоднородным магнитным полем. Время удержания нейтрона в нейтронных накопительных кольцах сейчас уже превышает время жизни нейтрона до β-распада. Принцип удержания ультрахолодных нейтронов с помощью неоднородных магнитных полей был предложен в 1960 г. В.В. Владимирским (р. 1915).

Глава XV
НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АСТРОФИЗИКИ

§ 100. Источники энергии звезд

1. Звезды излучают энергию за счет происходящих внутри них *термоядерных реакций.* Хотя эта мысль в общей форме давно высказывалась некоторыми учеными, но основанная на ней подробная количественная теория источников звездной энергии была развита Бете (р. 1906) только в 1939 г.

По современным представлениям звезды рождаются из протяженных газово-пылевых комплексов, состоящих преимущественно из водорода. Из-за гравитационной неустойчивости газово-пылевой комплекс распадается на множество более мелких частей — облаков. Каждое из этих облаков еще не является звездой. Но облако может превратиться в звезду, если масса его достаточно велика. Поэтому его называют *протозвездой.* В результате гравитационного сжатия протозвезда разогревается. Когда внутри протозвезды начинают происходить протон-протонные термоядерные реакции и дальнейшее гравитационное сжатие ее останавливается силами возросшего газово-кинетического давления, протозвезда и становится *звездой.*

2. Оценим среднюю температуру звезды к моменту ее образования из газово-пылевого облака. Очевидно, для этого достаточно знать среднюю кинетическую энергию теплового движения частиц звезды. Для простоты будем предполагать, что звезда состоит из водорода, который при высоких температурах в недрах звезды *полностью ионизован*, т. е. состоит из «голых» атомных ядер (протонов) и электронов. Энергию теплового движения эти частицы получают за счет гравитационной энергии, освобождающейся при сжатии звезды. Однако не вся освобождающаяся гравитационная энергия идет на нагревание звезды. Значительная часть ее тратится на излучение. Поэтому мы воспользуемся не законом сохранения энергии, а классической *теоремой вириала.*

Теорема вириала относится к поведению механической системы частиц, совершающей финитное движение. Если $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор i-й частицы, m_i — ее масса, а $\mathbf{F}_i$ — действующая на нее сила, то

$$\frac{d}{dt}\left(m_i\mathbf{r}_i\dot{\mathbf{r}}_i\right) = m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2 + \mathbf{r}_i m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = 2K_i + \mathbf{r}_i\mathbf{F}_i.$$

Просуммируем это соотношение по всем частицам системы и обозначим через K ее кинетическую энергию. Тогда

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\mathbf{r}_i\dot{\mathbf{r}}_i = 2K + \sum_i \mathbf{r}_i\mathbf{F}_i.$$

Усреднив это равенство по физически бесконечно большому промежутку времени T, получим

$$\frac{1}{T}\left[\sum(m_i\mathbf{r}_i\dot{\mathbf{r}}_i)_{t=T} - \sum(m_i\mathbf{r}_i\dot{\mathbf{r}}_i)_{t=0}\right] = 2\overline{K} + \overline{\sum\mathbf{r}_i\mathbf{F}_i},$$

где черта означает усреднение по времени. При $T \to \infty$ ввиду ограниченности пространства, в котором движется система, левая часть обращается в нуль и в результате имеем

$$2\overline{K} + \overline{\sum\mathbf{r}_i\mathbf{F}_i} = 0. \tag{100.1}$$

Это равенство и выражает теорему вириала (вириалом называется выражение $(1/2)\overline{\sum\mathbf{r}_i\mathbf{F}_i}$). Теорема вириала есть точное следствие ньютоновской классической механики, если только под $\mathbf{F}_i$ понимать полную силу, действующую на i-ю частицу. Усреднение в теореме вириала понимается в смысле *усреднения по времени*, а в нашей задаче требуется *усреднение по совокупности частиц.* Однако если внешние условия в течение времени T не меняются, то средние значения в указанных двух смыслах совпадают между собой.

В нашей задаче теорему вириала следует, конечно, применять не к протозвезде, а к образовавшейся из нее *звезде*. Протозвезда подвергается гравитационному сжатию и, следовательно, находится в нестационарном состоянии. Для нее не имеет смысла говорить о средних величинах, о которых идет речь в теореме вириала. Только тогда, когда гравитационное сжатие будет остановлено возросшими силами газово-кинетического давления, т. е. когда протозвезда станет звездой, наступает стационарное состояние, в котором средние значения кинетической (тепловой) энергии беспорядочного движения частиц и потенциальной энергии их гравитационного притяжения, а также другие величины принимают определенные значения.

3. Вычислим теперь вириал для звезды, состоящей из равного числа протонов и электронов. Между этими частицами действуют кулоновские электрические силы. Однако при вычислении вириала эти силы учитывать не надо, так как звезда в целом *электрически нейтральна.* Действительно, рассмотрим какую-либо пару частиц i и j. В сумму $\sum_i \mathbf{r}_i\mathbf{F}_i$ эта пара вносит слагаемое

$$\mathbf{r}_i\mathbf{F}_i + \mathbf{r}_j\mathbf{F}_j = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{r}_{ij}\mathbf{F}_{ij},$$

где $\mathbf{F}_{ij}$ — сила, с которой частица j действует на частицу i, а $\mathbf{r}_{ij}$ — радиус-вектор, проведенный от частицы j к частице i. Если частицы одноименно заряжены, то $\mathbf{F}_{ij}$ будет силой отталкивания, а произведение $\mathbf{r}_{ij}\mathbf{F}_{ij}$ — величиной положительной. Напротив, для разноименно заряженных частиц произведение $\mathbf{r}_{ij}\mathbf{F}_{ij}$ отрицательно. Пусть теперь звезда содержит n протонов и n электронов. Число пар протонов и пар электронов, очевидно, равно $n(n-1)/2 \approx n^2/2$ — всего n^2 пар одноименно заряженных частиц. Но таково же будет и число пар разноименно заряженных частиц. Поэтому полная сумма $\sum\mathbf{r}_i\mathbf{F}_i$, относящаяся к силам кулоновского взаимодействия, в среднем обратится в нуль.

Не надо учитывать и магнитные силы, если таковые имеются. Сила $\mathbf{F}$, действующая на частицу в магнитном поле $\mathbf{H}$, пропорциональна $[\mathbf{vH}]$, где $\mathbf{v}$ — скорость частицы. Для одной и той же частицы она с одинаковой вероятностью может быть направлена как в одну, так и в прямо противоположную сторону. Поэтому среднее значение скалярного произведения $(\mathbf{r}[\mathbf{vH}])$ равно нулю.

Единственными существенными силами, определяющими значение вириала звезды, являются *силы тяготения.* Это силы притяжения, а потому для них сумма $\sum \mathbf{r}_i\mathbf{F}_i$ будет отрицательна. Силы тяготения потенциальны. Сумма $\sum \mathbf{r}_i\mathbf{F}_i$ может быть выражена через потенциальную энергию гравитационного взаимодействия частиц системы $U = \sum U_{ij}$, где

$$U_{ij} = -\frac{G}{2}\,\frac{m_i m_j}{r_{ij}}. \tag{100.2}$$

Здесь m_i и m_j — массы частиц i и j, а r_{ij} — расстояние между ними. Выделим какие-либо две частицы с номерами i и j. Они вносят в сумму $\sum \mathbf{r}_i\mathbf{F}_i$ слагаемое $\mathbf{r}_i\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j\mathbf{F}_{ji}$, где $\mathbf{F}_{ij}$, — сила, с которой частица j действует на частицу i. В силу равенства действия и противодействия $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$, так что рассматриваемое слагаемое можно переписать в виде

$$\mathbf{r}_i\mathbf{F}_{ij} - \mathbf{r}_j\mathbf{F}_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{r}_{ij}\mathbf{F}_{ij}.$$

Но, очевидно, $\mathbf{F}_{ij} = -\operatorname{grad}_i U_{ij}$, где градиент берется по координатам частицы i в предположении, что частица j остается неподвижной. Следовательно,

$$\mathbf{r}_i\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{r}_{ij}\operatorname{grad}_i U_{ij} = -r_{ij}\frac{\partial U_{ij}}{\partial r_{ij}}.$$

Здесь у U_{ij} индексы можно опустить, если частную производную по r_{ij} брать в предположении, что меняется расстояние только между частицами i и j, а все остальные междучастичные расстояния остаются неизменными. Таким образом,

$$\sum \mathbf{r}_i\mathbf{F}_i = -\sum_{i,j} r_{ij}\frac{\partial U}{\partial r_{ij}}.$$

Но U есть однородная функция междучастичных расстояний r_{ij} степени -1. Поэтому в силу известной теоремы Эйлера об однородных функциях

$$\sum_{i,j} r_{ij}\frac{\partial U}{\partial r_{ij}} = -U.$$

В результате соотношение (100.1) переходит в

$$2\overline{K} + \overline{U} = 0. \tag{100.3}$$

С частным случаем этого соотношения мы уже встречались в механике (см. т. I, § 58). Это случай движения планеты вокруг Солнца (или искусственного спутника вокруг Земли) по круговой орбите. Только

в этом случае усреднения не требуется, поскольку сами величины K и U постоянны.

Сопоставим соотношение (100.3) с законом сохранения энергии. Гравитационная энергия, освобождающаяся в процессе сжатия протозвезды, расходуется не только на увеличение кинетической (тепловой) энергии K последней, но и тратится на электромагнитное и нейтринное излучения. Обозначим через $\mathscr{E}_{\text{изл}}$ полную энергию, унесенную излучением. Тогда

$$K + U + \mathscr{E}_{\text{изл}} = 0.$$

Усреднив это соотношение и вычитая его из (100.3), получим

$$\overline{K} = \overline{\mathscr{E}}_{\text{изл}}. \tag{100.4}$$

Таким образом, *половина гравитационной энергии, освобожденной при гравитационном сжатии протозвезды к моменту превращения ее в звезду, идет на увеличение кинетической (тепловой) энергии звезды, а другая половина уносится излучением.* Этот вывод имеет общее значение и не связан со специальным предположением, что звезда состоит только из водорода. Когда начнутся термоядерные реакции и наступит стационарное состояние, величины $\overline{K}$ и $\overline{U}$ будут оставаться неизменными. Тогда вся энергия, освобождающаяся при термоядерных реакциях, будет уноситься излучением.

4. Теперь мы подготовлены к тому, чтобы оценить среднюю температуру звезды $\overline{T}$. С этой целью обозначим через $m(r)$ массу звездного вещества внутри сферы радиусом r, центр которой совпадает с центром звезды. При падении на эту сферу из бесконечности массы dm выделяется гравитационная энергия $Gm\,dm/r$. Полная гравитационная энергия, освободившаяся при образовании звезды, выражается интегралом

$$G\int_0^M \frac{m}{r}\,dm,$$

где M — масса образовавшейся звезды. Как доказано выше, половина этой энергии идет на нагревание звезды. В дальнейшем, когда гравитационное сжатие прекратится, внутри звезды должна выделяться энергия в результате термоядерных реакций, чтобы поддержать температуру и излучение звезды на неизменном уровне. В результате тепловая энергия звезды K будет оставаться неизменной и выражаться половиной написанного выше интеграла. Этот интеграл можно было бы вычислить точно, если бы была известна плотность звездного вещества $\rho = \rho(r)$. Из-за незнания функции $\rho(r)$ точное вычисление мы вынуждены заменить оценкой. Очевидно,

$$\overline{K} = \frac{G}{2}\int_0^M \frac{m}{r}\,dm = \frac{GM^2}{4}\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle,$$

или

$$\overline{K} = \frac{GM^2}{4R}\left\langle\frac{R}{r}\right\rangle, \tag{100.5}$$

где R — радиус звезды, $\langle R/r\rangle$ означает усредненное определенным образом значение R/r, а именно

$$\left\langle\frac{R}{r}\right\rangle = \frac{2}{M^2}\int\limits_0^M \frac{R}{r}\, m\, dm. \tag{100.6}$$

Мы занимаемся оценкой средней температуры не звезды вообще, а звезды, только что образовавшейся из газово-пылевого облака, состоящего практически только из полностью ионизованного водорода. К этому времени водород еще не успел «выгореть» в результате термоядерных реакций. Из-за высокой температуры к нему применима классическая статистика Больцмана, которая и используется в дальнейшем.

Средняя энергия теплового движения протона равна $(3/2)k\overline{T}$, где k — постоянная Больцмана. Такова же и средняя энергия электрона. Число протонов (а также электронов) в звезде составляет M/m_{p}, где m_{p} — масса протона. Поэтому тепловая энергия всей звезды равна $3Mk\overline{T}/m_{\text{p}}$. Приравняв ее выражению (100.5), получим

$$\overline{T} = \frac{GMm_{\text{p}}}{12kR}\left\langle\frac{R}{r}\right\rangle. \tag{100.7}$$

Точное вычисление по формуле (100.7) требует знания плотности вещества звезды ρ в зависимости от расстояния r до ее центра. Только тогда можно найти среднее значение отношения R/r. Но так как $R/r > 1$, то во всяком случае должно быть

$$\overline{T} > \frac{GMm_{\text{p}}}{12kR}. \tag{100.8}$$

5. Можно указать и более точную оценку нижней границы для $\overline{T}$. Температура, стоящая в правой части формулы (100.8), получена в предположении, что $R/r = 1$. Такую температуру звезда получила бы, если бы звездное вещество конденсировалось только на ее поверхность. Эта температура заведомо ниже действительной температуры звезды, так как при дальнейшем перемещении вещества к ее центру производится дополнительная работа гравитационных сил, идущая на дальнейшее нагревание звезды. Дополнительную работу можно частично учесть, если предположить, что конденсация ограничивается образованием звезды постоянной плотности ρ. В таком случае $m = (4\pi/3)\rho r^3$, $dm = 4\pi\rho r^2\, dr$ и формула (100.6) дает $R/r = 6/5$. В результате получается более точная, но все еще заниженная оценка средней температуры звезды

$$\overline{T} > \frac{GMm_{\text{p}}}{10kR}. \tag{100.9}$$

Применим полученную оценку к Солнцу ($M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}$ г, $R = 7 \times \times 10^{10}$ см), точнее — к водородной звезде с такими же значениями массы и радиуса. Получим

$$\overline{T}_{\odot} > \frac{6{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{33} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-24}}{10 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-16} \cdot 7 \cdot 10^{10}} = 2{,}3 \cdot 10^{6}\ \text{К}.$$

Этот результат по порядку величины дает правильное, хотя и значительно заниженное значение средней температуры Солнца.

Оптическим методам доступна температура только поверхности Солнца. Она составляет около 6000 К. Однако в современных моделях Солнца масса наружной оболочки, в которой температура меньше 10^6 К, составляет всего около 1 % общей массы Солнца. Поэтому оболочка практически не сказывается на средней температуре Солнца.

6. Для точного вычисления температуры, как уже указывалось выше, надо знать плотность вещества в недрах Солнца. Но она также подлежит определению.

Вообще, точное вычисление температуры в недрах Солнца и звезд — не изолированная, а сложная комплексная задача. В нашем изложении речь шла не о точном вычислении, а о грубой оценке температуры. При строгой постановке должна быть определена не только температура, но и вся совокупность взаимно связанных параметров, характеризующих состояние звезды: давление, плотность, температура, химический состав, светимость звезды и пр. В частности, необходимо, чтобы при этих параметрах получилось равновесное состояние звезды. Все это находится в результате громоздкого численного интегрирования. При этом вместе с измеренными значениями массы и размеров Солнца используются уравнения сохранения и переноса энергии, уравнения гидродинамического, лучистого и конвективного равновесия, закон Стефана–Больцмана и пр. В основу расчета кладутся определенные модели Солнца. Согласованность результатов позволяет выбрать правдоподобную модель Солнца. Все расчеты теперь выполняются на ЭВМ методом проб и ошибок. В теории эволюции звезд такие же расчеты выполняются для моделей звезд с различными параметрами.

Не останавливаясь на этих вопросах, приведем данные, характеризующие Солнце на современном этапе его эволюции. Солнце состоит из водорода H, гелия He и остальных элементов. Относительные содержания их по массам в астрофизике принято обозначать соответственно через X, Y, Z. Для внешних слоев Солнца путем усреднения по различным моделям получено $X = 0{,}71$, $Y = 0{,}265$, $Z = 0{,}025$. Такие данные характерны и для всего Солнца на начальном этапе его эволюции. Но вблизи центра C Солнца в настоящее время $X_{\text{C}} = 0{,}38$. Температура, давление и плотность в центре Солнца равны соответственно $T_{\text{C}} = = 15 \cdot 10^6$ К, $\mathscr{P}_{\text{C}} = 3{,}4 \cdot 10^{17}$ дин/см^2, $\rho_{\text{C}} = 160$ г/см^3.

7. В проблеме источников энергии звезд основной интерес представляет не средняя температура, а температура в глубоких недрах звезд, так как именно там происходят термоядерные реакции.

Приведем одну из возможных оценок температуры в центре звезды, хотя она и обладает теми же принципиальными недостатками, что и приведенная выше оценка средней температуры звезды. Будем предполагать, что в звезде *нет конвекции*. Для этого необходимо, чтобы температурный градиент dT/dr был не меньше так называемого адиабатического температурного градиента (см. т. II, § 121). В реальной звезде из-за местного перегревания ее при термоядерных реакциях конвективное перемешивание, конечно, происходит и притом в некоторых звездах весьма интенсивно. Но мы рассматриваем идеальный случай, когда влияние этого перемешивания на отвод выделяющегося тепла из звезды не очень существенно. В пределе перемешивание исчезает как раз тогда, когда температурный градиент становится адиабатическим. Поэтому мы и принимаем, что в звезде устанавливается адиабатическое распределение температуры. Если еще звездное вещество считать идеальным газом, то должно быть

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{g}{c_{\mathscr{P}}}, \tag{100.10}$$

где $c_{\mathscr{P}}$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении, а g — ускорение свободного падения (см. т. II, § 121). Интегрирование этого уравнения дает

$$T(r) = T_{\text{C}} - \int\limits_0^r \frac{g}{c_{\mathscr{P}}}\, dr,$$

где T_{C} — температура в центре звезды. Температуру $T(R)$ на поверхности звезды можно принять равной нулю, так как она пренебрежимо мала по сравнению с T_{C}. В этом предположении

$$T_{\text{C}} = \int\limits_0^R \frac{g(r)}{c_{\mathscr{P}}}\, dr. \tag{100.11}$$

Если ввести массу вещества m внутрь сферы радиусом r, то $g = Gm/r^2$. Удельную теплоемкость $c_{\mathscr{P}}$ оценим в предположении, что звезда состоит из полностью ионизованного водорода. На каждую частицу (протон и электрон) приходятся средняя кинетическая энергия $(3/2)kT$ и теплоемкость при постоянном объеме $(3/2)k$, а при постоянном давлении $(5/2)k$. Число частиц (протонов + электронов) в единице массы равно $2\cdot(1/m_{\text{p}})$. Поэтому $c_{\mathscr{P}} = 5k/m_{\mathscr{P}}$. В результате

$$T_{\text{C}} = \frac{Gm_{\text{p}}}{5k}\int\limits_0^R \frac{m(r)}{r^2}\, dr. \tag{100.12}$$

Если бы плотность ρ внутри звезды была постоянной, то $m(r) = (4\pi/3)\rho r^3$. В этом случае интеграл в (100.12) легко вычисляется.

Получается
$$T_\text{C} = \frac{GMm_\text{p}}{10kR},$$
что в точности равно средней температуре звезды, вычисленной в тех же предположениях. Тем не менее приведенная оценка температуры в центре звезды не лишена смысла. Дело в том, что при истинной зависимости плотности вещества ρ от радиуса r подынтегральное выражение в формуле (100.11) значительно быстрее возрастает к центру звезды, чем соответствующее подынтегральное выражение в (100.6). Следствием этого является интуитивно очевидное утверждение, что температура в центре звезды выше ее средней температуры.

Насколько существенно распределение плотности вещества в звезде влияет на температуру в ее центре, показывает следующий пример. По современной модели Солнца в сфере радиусом $r = R/2$ сосредоточено около 94 % полной массы. Если массой наружной оболочки пренебречь, то можно воспользоваться предыдущей формулой, заменив в ней радиус R вдвое меньшей величиной. Тогда получилось бы
$$T_\text{C} = \frac{GMm_\text{p}}{5kR},$$
что вдвое больше оценки, полученной ранее. На самом деле концентрация вещества во внутренних зонах Солнца приводит к еще большему повышению температуры T_C.

8. Итак, гравитационное сжатие разогревает внутренние недра звезды до температур порядка десяти миллионов кельвинов (1 кэВ) и выше. Этого достаточно, чтобы в недрах звезды начался синтез более тяжелых ядер из менее легких. Такой синтез и является источником энергии, излучаемой звездами. В основном это синтез более тяжелых элементов (преимущественно гелия) из водорода, так как по современным спектроскопическим данным Вселенная состоит на 70 % из водорода (по массе), 30 % из гелия и 1 % из остальных элементов (углерода, кислорода и пр.). В протозвезде начавшийся синтез идет недостаточно интенсивно, так что потери энергии на излучение в основном компенсируются гравитационным сжатием протозвезды. Когда же энергия синтеза достигает величины, достаточной для компенсации потерь энергии на излучение, гравитационное сжатие протозвезды прекращается. С этого момента протозвезда и становится звездой. В звезде гравитационные силы уравновешиваются возросшим газово-кинетическим и отчасти световым давлением.

Как показывают приведенные выше оценки, температура в недрах звезды при заданных размерах приблизительно пропорциональна ее массе M. Светимость же звезды L, т. е. полная излучаемая ею энергия в единицу времени, согласно теории, пропорциональна примерно M^3. Теоретические оценки показывают, что при $M \lesssim 0{,}1 M_\odot$ ($M_\odot$ — масса Солнца) гравитационное сжатие недостаточно для достижения термоядерных температур. Вот почему процесс гравитационного сжатия всех планет Солнечной системы (включая Юпитер) не привел к образованию звезд.

9. В космических масштабах гравитация снимает основные трудности, которые надо преодолеть, чтобы практически осуществить управляемый термоядерной синтез. Громадное давление, создаваемое гравитацией, удерживает термоядерную плазму в недрах звезд. Слой же вещества громадной толщины, отделяющий горячую плазму в центральных областях звезды от холодной периферии, надежно обеспечивает ее термоизоляцию. Термоядерная энергия, освободившаяся в глубоких недрах звезды, переносится к ее периферии в основном посредством лучеиспускания. На своем пути излученная энергия поглощается и снова переизлучается с изменением спектрального состава. Это переизлучение происходит практически изотропно-равномерно во все стороны. Перенос излучения к периферии звезды напоминает диффузию и происходит сравнительно медленно. Как показывают расчеты, тепло, выделившееся в центре звезды, доходит до ее периферии за времена порядка миллиона лет.

10. *Основным процессом, в котором происходит освобождение термоядерной энергии в нормальных звездах, является превращение водорода в гелий.* При этом масса вещества уменьшается примерно на 0,7 % и освобождается энергия в соответствии с соотношением Эйнштейна $\mathcal{E} = mc^2$. Если бы Солнце состояло только из водорода и весь водород затем превратился в гелий, то масса Солнца уменьшилась бы примерно на $\Delta M = 0{,}007 M_\odot = 0{,}007 \cdot 2 \cdot 10^{33} = 1{,}4 \cdot 10^{31}$ г. При этом освободилась бы энергия $\Delta M c^2 \approx 1{,}26 \cdot 10^{52}$ эрг. При настоящем темпе излучения Солнца излучаемая им энергия составляет примерно $L_\odot = 3{,}83 \cdot 10^{33}$ эрг/с. Если бы этот темп сохранился в дальнейшем, то всей энергии выгоревшего водорода хватило бы на $(1{,}26 \cdot 10^{52}) : (3{,}83 \cdot 10^{33}) = 3{,}3 \cdot 10^{18}$ с $\approx 10^{11}$ лет.

Средняя интенсивность энерговыделения ε при термоядерных реакциях в типичных звездах по земным масштабам исключительно мала. Так, для Солнца $\varepsilon = L_\odot / M_\odot = (3{,}83 \cdot 10^{33}) : (2 \cdot 10^{33}) \approx 2$ эрг/(с · г). В результате жизнедеятельности человеческого организма выделяется в сутки примерно 3000 ккал $= 3 \cdot 10^6$ кал $= 12{,}5 \cdot 10^{13}$ эрг. Приняв массу человека равной 60 кг $= 6 \cdot 10^4$ г, найдем, что скорость выделения энергии в человеческом организме составляет около $2{,}4 \cdot 10^4$ эрг/(с · г). Это примерно в десять тысяч раз больше, чем для Солнца. Малость величины ε позволила выше оценить температуру в недрах звезды, полностью отвлекаясь от энерговыделения при ядерных реакциях. Однако благодаря громадной массе Солнца излучаемая им мощность очень велика ($3{,}83 \cdot 10^{33}$ эрг/с $= 3{,}83 \cdot 10^{26}$ Вт). Из-за излучения масса Солнца уменьшается примерно на 4 млн т в секунду.

11. Превращение водорода в гелий идет не непосредственно, а через ряд промежуточных реакций. Оно может выполняться двумя путями: 1) в *протонно-протонной* (pp) цепочке реакций, или *водородном цикле*; 2) в *углеродно-азотном* или *углеродном цикле.*

Водородный цикл начинается с реакции между двумя протонами, в результате которой образуются дейтрон, позитрон и нейтрино

(табл. 20). Эта реакция вызывается слабыми взаимодействиями, а потому идет чрезвычайно медленно; в земных условиях она непосредственно не наблюдалась. В недрах звезд кинетическая энергия сталкивающихся протонов недостаточна, чтобы преодолеть кулоновский потенциальный барьер между ними. Как правило, все столкновения между протонами происходят упруго. Только примерно одна стомиллионная доля столкновений завершается реакцией туннельным способом. При этом за время столкновения (порядка 10^{-21} с) один протон должен превратиться в нейтрон с испусканием позитрона и нейтрино. Позитрон немедленно аннигилирует с электроном, а образовавшийся из n и p дейтрон очень быстро (в течение нескольких секунд) вступает в реакцию с одним из ближайших протонов с образованием ядра ^{3}He. В дальнейшем возможны три ветви ядерных реакций.

Таблица 20

Водородный цикл

Реакция	Энерговыделение, МэВ	Среднее время реакции
$\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \mathrm{d} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$	$2 \cdot 0{,}164 + (2 \cdot 0{,}257)$	$1{,}4 \cdot 10^{10}$ лет
$\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \to 2\gamma$	$2 \cdot 1{,}02$	—
$\mathrm{p} + \mathrm{d} \to {}^3\mathrm{He} + \gamma$	$2 \cdot 5{,}49$	5,7 с
${}^3\mathrm{He} + {}^3\mathrm{He} \to {}^4\mathrm{He} + 2\mathrm{p}$	12,85	10^6 лет
Итого $4\mathrm{p} \to {}^4\mathrm{He} + 2\mathrm{e}^+ + 2\nu$	$26{,}21 + (0{,}514)$	

Первая ветвь — это реакция между двумя ядрами ^{3}He. Но так как в первых трех реакциях ядро ^{3}He получается только один раз, то в рассматриваемый вариант полного водородного цикла эта реакция должна входить дважды, что и отмечено множителем 2 во втором столбце таблицы. В итоге цикла четыре протона превращаются в ядро ^{4}He, два позитрона и два нейтрино. В таблице приведено энерговыделение в соответствующих реакциях, а также примерное среднее время каждой реакции, рассчитанное для условий в центре Солнца. В скобках указана доля выделяющейся энергии, безвозвратно уносимая нейтрино.

При достаточно больших концентрациях ^{4}He и температурах $T > (10\text{–}15) \cdot 10^6$ K в полном энерговыделении начинает преобладать вторая ветвь водородного цикла. В этом варианте первые три реакции такие же, как и в предыдущем, но не повторяются дважды, а реакция $^3\mathrm{He} + {}^3\mathrm{He}$ заменяется на цепочку

$$ {}^3\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He} \to {}^7\mathrm{Be} + \gamma, $$

$$ {}^7\mathrm{Be} + \mathrm{e}^- \to {}^7\mathrm{Li} + \nu, $$

$$ \mathrm{p} + {}^7\mathrm{Li} \to 2\,{}^4\mathrm{He}. $$

При еще более высоких температурах преобладающим в энерговыделении является водородный цикл с завершающей цепочкой

$$^{3}\mathrm{He} + {}^{4}\mathrm{He} \to {}^{7}\mathrm{Be} + \gamma, \quad \mathrm{p} + {}^{7}\mathrm{Be} \to {}^{8}\mathrm{B} + \gamma,$$

$$^{8}\mathrm{B} \to {}^{8}\mathrm{Be} + \mathrm{e}^{+} + \nu, \quad {}^{8}\mathrm{Be} \to 2\,{}^{4}\mathrm{He}.$$

В обоих случаях основным итогом снова является превращение четырех протонов в ядро ^{4}He.

12. В табл. 21 приведен углеродный (C–N) цикл. В нем, как и в водородном цикле, освобождается энергия 26,7 МэВ, причем около 6,8 % этой энергии уносится нейтрино. Характерной особенностью углеродного цикла является воспроизводство углерода ^{12}C, и притом в таком же количестве, какое было использовано в начале цикла. Углерод ^{12}C не затрачивается, а выполняет роль *катализатора*, обеспечивающего превращение водорода в гелий. Для Солнца и менее ярких звезд преобладающим является водородный, а для более ярких — углеродный цикл.

Сказанное выше в основном относится к нормальным звездам, или к звездам главной последовательности, к которым относится и Солнце. В этих звездах энерговыделение происходит главным образом за счет превращения водорода в гелий.

Таблица 21

Углеродный цикл

Реакция	Энерговыделение, МэВ	Среднее время реакции
$\mathrm{p} + {}^{12}\mathrm{C} \to {}^{13}\mathrm{N} + \gamma$	1,95	$1{,}3 \cdot 10^{7}$ лет
${}^{13}\mathrm{N} \to {}^{13}\mathrm{C} + \mathrm{e}^{+} + \nu_{\mathrm{e}}$	1,50 + (0,72)	7,0 мин
$\mathrm{p} + {}^{13}\mathrm{C} \to {}^{14}\mathrm{N} + \gamma$	7,54	$2{,}7 \cdot 10^{6}$ лет
$\mathrm{p} + {}^{14}\mathrm{N} \to {}^{15}\mathrm{O} + \gamma$	7,35	$3{,}3 \cdot 10^{8}$ лет
${}^{15}\mathrm{O} \to {}^{15}\mathrm{N} + \mathrm{e}^{+} + \nu_{\mathrm{e}}$	1,73 + (0,98)	82 с
$\mathrm{p} + {}^{15}\mathrm{N} \to {}^{12}\mathrm{C} + {}^{4}\mathrm{He}$	4,96	$1{,}1 \cdot 10^{5}$ лет
Итого $4\mathrm{p} \to {}^{4}\mathrm{He} + 2\mathrm{e}^{+} + 2\nu_{\mathrm{e}}$	25,03 + (1,70)	

13. Для звезд-гигантов (см. следующий параграф) с плотными «выгоревшими» (не содержащими водорода) ядрами существенны *гелиевый* и *неоновый* циклы, протекающие при значительно более высоких температурах и плотностях, чем водородный и углеродный циклы. Основной реакцией гелиевого цикла, идущей начиная с температуры $200 \cdot 10^{6}$ K, является реакция

$$3\,{}^{4}\mathrm{He} \to {}^{12}\mathrm{C} + \gamma_1 + \gamma_2 + 7{,}3\ \text{МэВ}.$$

(Далее могут следовать реакции $^{12}\mathrm{C} + {}^{4}\mathrm{He} \to {}^{16}\mathrm{O} + \gamma$, $^{16}\mathrm{O} + {}^{4}\mathrm{He} \to$ $\to {}^{20}\mathrm{Ne} + \gamma$.)

Если продукты реакций гелиевого цикла вступят в контакт с H, то осуществится неоновый (Ne–Na) цикл. В нем ядро ^{20}Ne выполняет

роль катализатора в процессе превращения H в He. Последовательность реакций здесь вполне аналогична углеродному (C–N) циклу (табл. 21), только ядра ^{12}C, ^{13}N, ^{13}C, ^{14}N, ^{15}O, ^{15}N заменяются соответственно ядрами ^{20}Ne, ^{21}Na, ^{21}Ne, ^{22}Na, ^{23}Na, ^{23}Mg. Мощность этого цикла как источника энергии относительно невелика.

ЗАДАЧА

Оценить нижний предел гравитационного давления $\mathscr{P}$ в центре звезды. Чему было бы равно это давление, если бы звезда была однородна по плотности? Провести численный расчет для Солнца.

Решение. Из уравнения гидростатики

$$\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial r} = -\rho g$$

получаем

$$\mathscr{P}(r) = \mathscr{P}_{\rm C} - \int_0^r \rho g\, dr,$$

где $\mathscr{P}$ — давление в центре звезды. Оно найдется из условия, что на поверхности звезды $\mathscr{P}(R) = 0$. Это дает

$$\mathscr{P}_{\rm C} = \int_0^R \rho g\, dr = \frac{G}{4\pi}\int_0^M \frac{m\, dm}{r^4},$$

или

$$\mathscr{P}_{\rm C} = \frac{GM^2}{8\pi}\left\langle \frac{1}{r^4}\right\rangle, \tag{100.13}$$

где угловые скобки означают надлежащим образом выполненное усреднение. Из (100.13) следует

$$\mathscr{P}_{\rm C} > \frac{GM^2}{8\pi R^4}. \tag{100.14}$$

Для Солнца $\mathscr{P}_{\rm C} > 4{,}4 \cdot 10^{14}$ дин/см^2 $\approx 4{,}4 \cdot 10^8$ атм. Если бы Солнце было однородно, то $\mathscr{P}_{\rm C}$ было бы втрое больше, т. е. около $13{,}2 \cdot 10^8$ атм. В общем случае для звезды

$$\mathscr{P}_{\rm C} = \frac{\gamma M^2}{R^4}, \tag{100.15}$$

где γ — безразмерный коэффициент, зависящий только от закона изменения плотности ρ вдоль радиуса звезды.

Насколько существенно возрастание плотности к центру звезды, показывает следующий пример. Вообразим, что наружная оболочка Солнца с $r > R/2$ удалена, а масса оставшегося вещества не изменилась. Согласно современной модели Солнца оставшаяся масса равна $0{,}94 M_\odot$. Тогда нижний предел давления в центре не уменьшится, а увеличится в

$$\left(\frac{0{,}94 M_\odot}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{R}{R/2}\right)^4 \approx 14 \text{ раз}.$$

По давлению $\mathscr{P}_C$ можно было бы вычислить температуру T_C в центре звезды, пользуясь равенством $\mathscr{P}_C = 2n_C kT$, где $n_C = \rho_C/m_p$ — число протонов в единице объема в центре звезды. Однако это вычисление требует знания плотности вещества ρ_C в центре звезды.

§ 101. Некоторые сведения из астрономии

1. Рассмотрению вопроса об эволюции звезд следует предпослать некоторые сведения из астрономии.

В астрономии *светимостью звезды* L называют полное количество энергии, излучаемое ею за единицу времени. *Звездная величина* в астрономии определяет *блеск* звезды (а не геометрические ее размеры). Блеск звезды зависит от ее светимости, расстояния до звезды и от спектральной чувствительности прибора, применяемого для наблюдения звезды. Числовое значение звездной величины считается тем больше, чем слабее звезда. Так, звезды 1-й величины ярче звезд 2-й величины, звезды 2-й величины ярче звезд 3-й величины и т. д.

Блеск звезды принято выражать в логарифмической шкале звездных величин. Эта шкала строится так, чтобы при увеличении звездной величины m на 5 единиц соответствующая интенсивность наблюдаемого излучения I уменьшалась в 100 раз. Таким образом, если звездная величина m увеличивается в арифметической прогрессии, то соответствующая интенсивность наблюдаемого излучения уменьшается в геометрической прогрессии. Если в качестве знаменателя геометрической прогрессии взять число 10, то

$$I = I_0 \cdot 10^{-0,4m},$$

где I_0 — интенсивность наблюдаемого излучения звезды нулевой величины. Действительно, при $m = 5$ эта формула дает $I/I_0 = 10^{-2} = 1/100$, т. е. при увеличении звездной величины на 5 единиц интенсивность убывает в 100 раз, как это и требуется при построении шкалы звездных величии. Преобразуя (101.1), можем написать

$$I = I_0 \cdot (2{,}5119)^{-m}, \qquad (101.1)$$

т. е. при увеличении звездной величины на единицу интенсивность излучения уменьшается приблизительно в 2,5 раза.

Символ a^m означает, что звездная величина рассматриваемого небесного светила равна a. Звездам высокой светимости соответствуют отрицательные значения звездной величины. Например, 5^m соответствует звезде 5-й величины, символ -4^m — звезде величины -4 и т. п. Символ $-2^m{,}5$ означает, что звездная величина астрономического светила равна $-2{,}5$.

Самым крупным 6-метровым телескопом (СССР) на пределе возможностей можно сфотографировать небесные объекты звездной величины (порядка 24^m). Визуальному наблюдению с помощью того же телескопа доступны объекты примерно в 10^4 раз слабее. Впрочем, предельно доступная звездная величина сильно зависит от атмосферных условий.

Такие яркие звезды, как Альдебаран и Альтаир принадлежат к звездам 1-й величины; звездная величина Капеллы $-0^m,2$; Сириуса $-1^m,6$; Солнца $-26^m,74$. Так как различные звезды находятся на различных расстояниях от Земли, то видимые звездные величины не характеризуют их светимость. Для сравнения светимостей звезд вместо видимых вводят *абсолютные звездные величины.* Абсолютная звездная величина есть такая величина, которую получила бы звезда при наблюдении со стандартного расстояния 10 пк (1 пк = 3,2616 св. лет = $3{,}0857 \cdot 10^{18}$ см), если бы не было поглощения света в межзвездной среде. Абсолютная звездная величина Солнца составляет $+4^m,75$. На таком стандартном расстоянии Солнце казалось бы совсем слабенькой звездочкой, хотя и видимой невооруженным глазом. Сириус казался бы в 14 раз слабее, чем сейчас, и уже больше не выделялся бы на ночном небе как самая яркая звезда. Напротив, Ригель (β Ориона), светимость которого в 20 000 раз превосходит светимость Солнца, затмил бы на ночном небе все остальные объекты, за исключением Луны.

2. Приемник излучения обладает различной чувствительностью к различным участкам спектра. Например, красная звезда может казаться яркой для глаза, но слабой для фотопластинки. Так называемая *визуальная звездная величина* соответствует спектральной чувствительности человеческого глаза. Она практически совпадает с *фотовизуальной звездной величиной*, определяемой фотометрированием изображения, полученного на ортохроматической пластинке с применением желтого светофильтра. *Фотографической* или *синей* называется звездная величина, определяемая фотометрированием изображения на обычной фотопластинке или фотоэлектрическим способом с применением синего фильтра. Конечно, технология при изготовлении фотопластинок и светофильтров должна быть точно указана и строго выдержана. Разность между фотографической и визуальной звездными величинами называется *показателем цвета.*

Изложенный метод определения показателя цвета звезд и классификация звездных спектров, приводимая ниже, были разработаны в Гарвардской астрономической обсерватории (США). Позднее в эти методы в других обсерваториях мира были введены существенные усовершенствования, но для наших целей нет необходимости их рассматривать.

Температура, химический состав, степень ионизации атомов и прочие параметры наружных слоев звездных атмосфер, от которых доходит до нас световое излучение, проявляются в особенностях спектров звезд. В Гарвардской обсерватории эмпирически спектры звезд были подразделены на семь классов, которые обозначаются буквами O, B, A, F, G, K, M. Для указания более детальных подробностей, выявляемых фотопластинкой, эти спектральные классы подразделяются на подклассы, спектры которых являются промежуточными между спектрами соседних классов. Спектральные подклассы отмечаются номерами от 0 до 9, прибавляемыми к букве, обозначающей класс.

Спектры поглощения звездных атмосфер, типичные для семи указанных классов, приведены на рис. 173 (*а* — λ Цефея, O6; *б* — τ Скор-

пиона, B0; *в* — α Северной Короны, A0; *г* — δ Орла, F0; *д* — Солнце, G2; *е* — ε Лебедя, K0; *ж* — α Геркулеса A, M5). Даем для примера очень краткую характеристику некоторых спектральных классов.

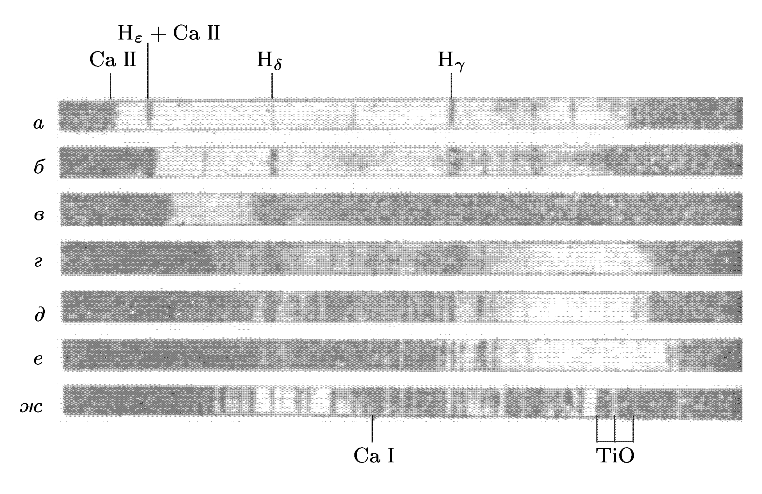


Рис. 173

Класс O. Температура $T \approx 50\,000$ K. Наблюдаются линии высокоионизованных атомов: He II, Si IV, N III и т. п. (Римские цифры I, II, III, ... относятся соответственно к нейтральному атому, к однократно ионизованному атому, к двукратно ионизованному и т. д.) Линии водорода слабы, иногда наблюдаются слабые эмиссионные линии He II и N III.

Класс B0. $T \approx 25\,000$ K. Линии He II отсутствуют; линии Mg II сильны (максимум у звезд B2); присутствуют линии Si III и O II; линии H сильнее, чем в классе O.

Класс A0. $T \approx 11\,000$ K. Линии водорода H достигают максимума; линии He I отсутствуют; линии Mg II и Si II сильны; линии Fe II, Cr II и другие слабы.

Класс F0. $T \approx 7600$ K. Линии H значительно слабее, чем в классе A0; линии Ca II сильны; линии Fe II, Cr II и другие примерно той же интенсивности, что и линии Fe I, Cr I и пр.

Класс G0. $T \approx 6000$ K. Яркость линий Ca II достигает максимума; атомный спектр очень богат благодаря многочисленным линиям Fe I и других нейтральных элементов; присутствуют молекулярные полосы CH.

Класс K0. $T \approx 5100$ K. Линии II относительно слабы; очень сильны линии нейтральных металлов; усиливаются молекулярные полосы.

Класс M0. $T \approx 3600$ K. Очень сильны линии нейтральных металлов; полосы TiO присутствуют, но довольно слабые.

Приведенная спектральная классификация используется для расположения звезд по цвету. Сначала идут горячие (голубые) звезды,

а в конце располагаются значительно более холодные красные звезды класса М. Например, яркие голубые звезды в созвездии Ориона относятся к классу В. Сириус — беловатая звезда класса А0. Солнце (желтая звезда) принадлежит к спектральному классу G2, Капелла — желтая звезда класса G0, Арктур — яркая оранжевая звезда класса К0, Бетельгейзе и Антарес — красные звезды класса М.

3. На большом статистическом материале датский астроном Герцшпрунг и американский астроном Рессел независимо друг от друга в начале нашего столетия эмпирически установили более или менее четко выраженную связь между спектральным классом (или показателем цвета) звезды и ее абсолютной величиной (или светимостью). Эта связь представляется графически на так называемой *диаграмме Герцшпрунга–Рессела* (рис. 174). Каждой точке на горизонтальной оси

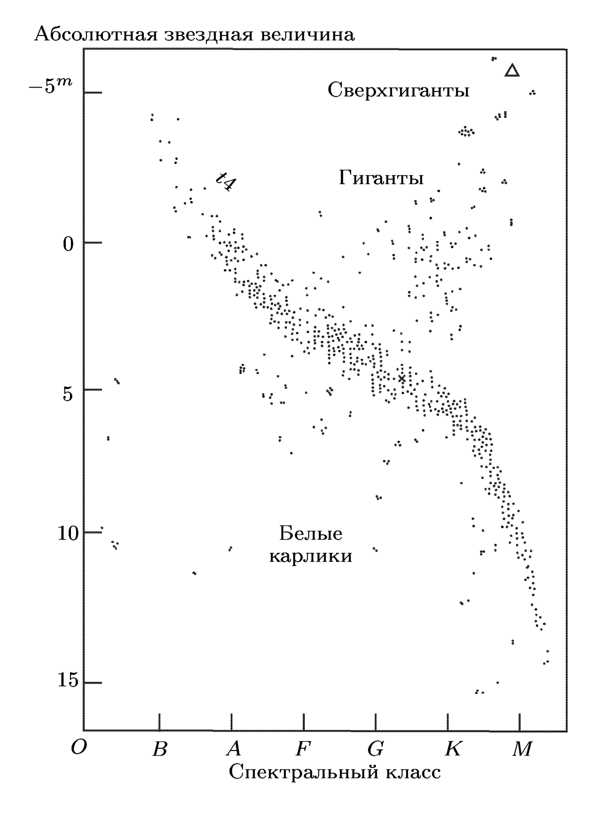


Рис. 174

этой диаграммы соответствует определенный спектральный класс (или показатель цвета). По существу, на горизонтальной оси отложена какая-то величина, характеризующая поверхностную температуру звезды. На вертикальной оси отложены соответствующие абсолютные величины

(или светимости) звезд. Звезда изображается точкой в плоскости диаграммы Герцшпрунга–Рессела.

Большинство звезд располагаются в полосе, идущей из верхнего левого угла в нижний правый угол диаграммы Герцшпрунга–Рессела. Эта полоса называется *главной последовательностью*, а соответствующие ей звезды — *звездами главной последовательности.* В верхней части главной последовательности располагаются наиболее массивные и горячие голубые звезды большой светимости, принадлежащие классам O и B, внизу — наименее массивные (*красные карлики*). Солнце (желтая звезда) — средняя звезда, расположенная где-то в центральной части главной последовательности. На диаграмме положение Солнца отмечено крестиком.

Справа вверху от главной последовательности расположены *красные гиганты* и *красные сверхгиганты.* Гиганты с поверхностной температурой порядка 4000 K примерно на 10 звездных величин ярче звезд главной последовательности с той же поверхностной температурой. Над гигантами располагаются очень редкие звезды, называемые сверхгигантами. Примером сверхгиганта может служить Бетельгейзе (α Ориона) — переменная звезда класса M2–M3. Ее видимая визуальная величина меняется от $+0^m$,4 до -1^m,3, а абсолютная звездная величина составляет около -3^m. Она примерно на 16 звездных величин ярче, а ее радиус примерно в 1000 раз больше звезды класса M3 главной последовательности. По своему радиусу сверхгигант может быть даже в 10 раз больше гиганта и иметь в 100 раз большую светимость.

Слева внизу от главной последовательности располагаются *белые карлики* — слабые голубые или желтые звезды, которые лежат на диаграмме Герцшпрунга–Рессела на 9–10 звездных величин ниже главной последовательности. По массе белые карлики сравнимы с Солнцем, а по размерам — с Землей. Следовательно, плотность белых карликов чрезвычайно велика — порядка 10^5–10^6 г/см^3. Соответственно очень велико и ускорение свободного падения на поверхности этих звезд, а толщина атмосферы составляет всего несколько десятков сантиметров.

Для полноты укажем еще, что между гигантами и главной последовательностью параллельно ей идет полоса звезд с промежуточными параметрами, называемых *субгигантами.* Аналогично, ниже главной последовательности также параллельно ей располагаются *субкарлики* — звезды с промежуточными свойствами между белыми карликами и звездами главной последовательности.

Массы звезд заключены в пределах от 0,03 до $60 M_\odot$. Светимость стационарных звезд лежит в интервале от 10^{-4} до $10^5 L_\odot$, а радиусы — от 10 км (нейтронные звезды) до $10^3 R_\odot$ (сверхгиганты).

§ 102. Краткие сведения об эволюции звезд

1. По двум причинам вопрос об эволюции звезд будет затронут весьма кратко и схематично. Во-первых, он относится к астрономии и астрофизике. Во-вторых, теория эволюции звезд весьма сложна и очень далека от завершения. Многие вопросы этой теории совсем

неясны или ясны недостаточно. Достаточно подробное и доступное изложение вопросов эволюции звезд можно найти, например, в книге И. С. Шкловского «Звезды, их рождение, жизнь и смерть» (М.: Наука, 1984).

2. В процессе гравитационного сжатия протозвезды температура ее недр непрерывно повышается. Когда она поднимется до миллиона Кельвинов, начинаются первые термоядерные реакции с участием протонов и легких ядер с низким кулоновским барьером (дейтерий, литий, бериллий, бор):

$$\mathrm{d} + \mathrm{p} \to {}^3\mathrm{He}, \quad {}^6\mathrm{Li} + \mathrm{p} \to {}^3\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He},$$

$$^7\mathrm{Li} + \mathrm{p} \to 2\,{}^4\mathrm{He}, \quad {}^{10}\mathrm{Be} + 2\mathrm{p} \to 3\,{}^4\mathrm{He}.$$

Но из-за малого содержания в протозвезде этих элементов продолжительность указанных реакций по звездным масштабам невелика — всего порядка миллиона лет.

В результате освобождения термоядерной энергии в указанных реакциях температура и давление в протозвезде повышаются. Возросшее давление замедляет гравитационное сжатие протозвезды. Когда легкие ядра с низким кулоновским барьером будут израсходованы, гравитационное сжатие протозвезды усилится, что поведет к дальнейшему повышению ее температуры. Наконец, когда температура достигнет порядка 10 млн кельвинов, вступят в игру протон-протонный, а за ним углеродно-азотный циклы, являющиеся основными источниками выделения термоядерной энергии. Возросшее давление звездной плазмы стабилизирует звезду — ее гравитационное сжатие приостанавливается. С этого момента протозвезда и становится звездой, вступающей на главную последовательность. Место вступления ее на главную последовательность определяется первоначальной массой протозвезды. Чем больше эта масса, тем выше оказывается протозвезда на главной последовательности.

Ввиду того что водорода в звезде много — она почти целиком состоит из водорода, — «выгорание» водорода охватывает несравненно более длительное время, чем «выгорание» дейтерия, лития, бериллия и бора. Звезды в верхней части главной последовательности более массивны и обладают более высокими температурами. Поэтому в них процесс «выгорания» водорода происходит более быстро и охватывает время порядка ста миллионов лет. Напротив, у менее массивных и менее горячих звезд, как Солнце, этот процесс длится 10–15 млрд лет. Еще более медленно происходит эволюция звезд, находящихся в нижней части главной последовательности, — красных карликов.

Выйдя на главную последовательность, звезда длительное время остается там, почти не меняя своих свойств. Поэтому основная часть звезд наблюдается именно на главной последовательности. Однако по мере «выгорания» водорода состояние звезды все же неуклонно, но очень медленно изменяется, так что изображающая звезду точка на диаграмме Герцшпрунга–Рессела перемещается и может уйти с главной последовательности.

3. Характер эволюции звезды существенно зависит от того, происходит ли в ее недрах перемешивание вещества или нет. Вычисления на моделях показывают, что если бы эволюция звезды сопровождалась полным перемешиванием (вследствие чего ее химический состав оставался бы однородным по всему объему звезды), то изображающая ее точка на диаграмме Герцшпрунга–Рессела перемещалась бы от главной последовательности влево. Наоборот, при полном отсутствии перемешивания изображающая точка перемещалась бы вправо от главной последовательности. Беглый взгляд на диаграмму Герцшпрунга–Рессела показывает, что на ней нет звезд, расположенных вблизи главной последовательности вверху и слева. Зато имеется очень много звезд справа от нее — это красные гиганты и субгиганты. Следовательно, перемешивание вещества в недрах звезды в процессе смещения ее из главной последовательности играет лишь второстепенную роль. В массивных звездах, масса которых превышает примерно $3M_\odot$, перенос тепла в основном осуществляется лучеиспусканием. В звездах с массами, меньшими примерно $M_\odot$, он осуществляется главным образом конвекцией, т. е. перемешиванием вещества.

Эволюция звезд, масса которых меньше приблизительно массы Солнца, происходит настолько медленно, что время пребывания таких звезд в пределах главной последовательности превышает возраст Галактики (около $1{,}2 \cdot 10^{10}$ лет). В звездах с малыми массами (меньшими $0{,}3M_\odot$) преобладающим механизмом теплопередачи является конвекция. У таких звезд температура в центре недостаточно высока, чтобы водородный цикл работал полностью. Он обрывается на образовании изотопа гелия ^{3}He, а изотоп ^{4}He уже не синтезируется. При несколько больших массах (но меньших примерно $3M_\odot$) эволюция звезды заканчивается на образовании изотопа ^{4}He. Основной интерес представляет эволюция звезд, первоначальная масса которых превышает примерно $3M_\odot$. На ней мы и сосредоточим внимание.

4. Энерговыделение в звезде после ее образования и выхода на главную последовательность длительное время происходит преимущественно в центральной ее части за счет «выгорания» водорода. После выгорания водорода в центральной части звезды образуется центральное гелиевое ядро и окружающая его оболочка, богатая водородом. Звезда по своему составу становится сильно неоднородной. Ядерные реакции в ядре звезды прекращаются, но интенсивно происходят в ее оболочке. Таким образом, основное энерговыделение из центральной части переносится в оболочку. В результате оболочка сильно раздувается. Звезда сходит с главной последовательности и превращается в красный гигант или сверхгигант. Размеры звезды сильно увеличиваются (см. § 101, п. 3). Однако массы красных гигантов могут и не намного превышать массу Солнца. Благодаря большой поверхности светимость красного гиганта очень велика, несмотря на пониженную температуру его поверхности.

По мере «выгорания» водорода в оболочке звезды масса центрального гелиевого ядра возрастает, а его гравитационное сжатие усиливается. Это приводит к возрастанию плотности и температуры гелие-

вого ядра звезды. Когда эти величины достигают значений примерно 10^6 г/см^3 и 10^8 К соответственно, начинает эффективно идти реакция «сгорания» гелия. На короткое мгновение (порядка 10^{-16} с) создается неустойчивое ядро бериллия:

$$^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightleftarrows {}^8\text{Be} - 95 \text{ кэВ}. \tag{102.1}$$

Это ядро может тут же распасться на две α-частицы, но может успеть захватить еще одну α-частицу, в результате чего образуется ядро углерода в возбужденном состоянии:

$$^8\text{Be} + {}^4\text{He} + 363 \text{ кэВ} \to {}^{12}\text{C}^*. \tag{102.2}$$

Возбуждение снимается γ-излучением:

$$^{12}\text{C}^* \to {}^{12}\text{C} + \gamma + 7{,}68 \text{ МэВ}. \tag{102.3}$$

В результате синтеза ядра ^{12}C из трех ядер ^{4}He освобождается энергия 7,22 МэВ. Скорость генерации энергии в звезде при этой реакции пропорциональна примерно $(T/10^8)^{30}$. Значит, «сгорание» гелия в этой реакции эффективно лишь при температуре, превышающей 10^8 К.

Когда накопится достаточное количество изотопа углерода ^{12}C, гелий начинает «выгорать» также в реакциях

$$\begin{gathered} ^{12}\text{C} + {}^4\text{He} \to {}^{16}\text{O} + \gamma, \\ ^{16}\text{O} + {}^4\text{He} \to {}^{20}\text{Ne} + \gamma, \\ ^{20}\text{Ne} + {}^4\text{He} \to {}^{24}\text{Mg} + \gamma, \end{gathered} \tag{102.4}$$

сопровождающихся дальнейшим и, наконец, полным исчерпанием гелия. Эти реакции требуют все более и более высокой температуры порядка 10^8–$1{,}5\cdot10^8$ К. В результате завершения этих реакций получается ядро звезды, состоящее из изотопов углерода ^{12}C, кислорода ^{16}O, неона ^{20}Ne и магния ^{24}Mg.

5. Все ядерные реакции в недрах Солнца и звезд недоступны непосредственному наблюдению. Существует лишь единственный косвенный метод наблюдения реакций, происходящих при участии слабого взаимодействия. В таких реакциях образуются нейтрино, а они практически не поглощаются, пронизывая всю толщу звездного вещества. Как указывалось в § 74, для регистрации солнечных нейтрино Б.М. Понтекорво предложил воспользоваться реакцией

$$^{37}_{17}\text{Cl} + \nu_\text{e} \to {}^{37}_{18}\text{Ar} + \text{e}^-. \tag{102.5}$$

Эта реакция имеет порог 0,81 МэВ и в принципе может быть использована для регистрации солнечных нейтрино почти всех энергий. Однако реально в реакции (102.5) ядро $^{37}_{18}$Ar с подавляющей вероятностью получается в возбужденном состоянии с энергией возбуждения примерно 5 МэВ. Это увеличивает эффективный порог реакции до 5,8 МэВ. Поэтому реакция (102.5) может быть использована практически для регистрации быстрых нейтрино. Такие нейтрино на Солнце получаются

только в одной из завершающих реакций водородного цикла, а именно

$$^8\mathrm{B} \to {}^8\mathrm{Be} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e} \quad (\mathscr{E}_\nu \leqslant 14{,}1\ \text{МэВ}) \tag{102.6}$$

(см. предыдущий параграф, п. 10). Как указывалось в § 74, такие «борные» нейтрино были зафиксированы в опытах Дэвиса. Однако их число оказалось примерно в 3–4 раза меньше наинизшего теоретического предела, найденного на основе современных моделей Солнца. Причина этого расхождения еще не ясна, хотя гипотезы для его объяснения и предлагались.

6. Перейдем к рассмотрению завершающих стадий эволюции звезды. Как уже было сказано, в начальной стадии гравитационное сжатие звезды прекращается в результате освобождения энергии при ядерных реакциях. Возникает вопрос, существуют ли силы, способные приостановить гравитационное сжатие, когда источники ядерной энергии будут исчерпаны? Единственными силами, противостоящими гравитационным, тогда окажутся силы давления звездного вещества.

При высоких плотностях звездного вещества последнее существует только в форме «голых» атомных ядер и электронов. Давление газа создается движением электронов и атомных ядер. Но это есть не только тепловое движение, исчезающее при абсолютном нуле температуры. На него накладывается еще *квантовое движение*, не прекращающееся и при абсолютном нуле. Будем рассматривать звездную плазму как идеальный газ, состоящий из электронов и положительно заряженных ядер, компенсирующих заряд электронов (газ из одних только электронов был бы вообще неустойчив). Отвлечемся от атомных ядер и сосредоточим внимание только на электронах.

Обозначим через n число электронов в единице объема. Пусть газ находится при абсолютном нуле температуры. Движение электронов квантовано. Число возможных квантовых состояний с импульсом меньше $p_\text{макс}$ найдется, если объем октанта импульсного пространства $(1/8)(4\pi/3)p^3_\text{макс}$ разделить на объем квантовой фазовой ячейки h^3, т. е. это число пропорционально $p^3_\text{макс}$. Максимальному импульсу соответствует максимальный уровень энергии, называемый *уровнем Ферми.* Согласно принципу Паули в каждом квантовом состоянии может находиться не более двух электронов с противоположно направленными спинами. При абсолютном нуле температуры электроны заполнят все энергетические уровни ниже уровня Ферми. Уровни, лежащие выше уровня Ферми, окажутся свободными. Таким образом, число электронов в единице объема будет пропорционально $p^3_\text{макс}$ или $\overline{p^3}$. Давление электронного газа $\mathscr{P}_\text{газ}$ пропорционально $\overline{nvp} \propto \overline{vp^4}$, где v — скорость электрона (см. т. II, § 59). Если газ нерелятивистский, то $v \propto p$, и, следовательно,

$$\mathscr{P}_\text{газ} \propto \overline{p^5} \propto \overline{n^{5/3}} \propto \rho^{5/3} \quad \text{(нерелятив.)}, \tag{102.7}$$

где ρ — плотность электронного газа.

Если же газ ультрарелятивистский, то скорость v можно считать постоянной и равной скорости света c. В этом случае $\mathscr{P}_{\text{газ}} \propto \rho^{4/3}$, т. е.

$$\mathscr{P}_{\text{газ}} \propto \overline{n^{4/3}} \propto \rho^{4/3} \quad \text{(ультрарелятив.)}, \tag{102.8}$$

Электронный газ (как и газ любых ферми-частиц) при абсолютном нуле температуры называется *вырожденным.* Чем больше n, тем больше высоких энергетических уровней будет заполнено электронами. Пусть теперь температура T отлична от нуля. Тогда появится кинетическая энергия теплового движения электронов. Если она будет мала по сравнению с кинетической энергией квантового движения, то тепловым движением можно пренебречь и пользоваться формулами для вырожденного газа. Чем больше плотность газа, тем ближе он к состоянию вырождения. Так, плотность газа свободных электронов в металлах настолько велика, что при комнатных температурах и даже при температурах порядка 10 000 K он может считаться вырожденным.

7. Возникает сомнение в применимости к плотному вырожденному газу формул для идеального газа. Однако *вырожденный электронный газ тем ближе к идеальному, чем больше его плотность.* Это парадоксальное заключение легко понять. Идеальный газ — это такой газ, кинетическая энергия частиц которого настолько велика, что силами взаимодействия между ними можно пренебречь. Количественно это условие означает, что кинетическая энергия частиц газа очень велика по сравнению с потенциальной энергией их взаимодействия. Но это как раз и имеет место для электронного газа при высоких плотностях. Действительно, плотность кинетической энергии частиц нерелятивистского газа пропорциональна $n\overline{p^2} \propto \rho^{5/2}$. Плотность потенциальной энергии кулоновского отталкивания электронов пропорциональна ne^2/r, где r — среднее расстояние между электронами. Иными словами, потенциальная энергия пропорциональна $\rho^{4/2}$. Таким образом, с возрастанием ρ кинетическая энергия растет быстрее, чем потенциальная. Может показаться, что это не справедливо для ультрарелятивистского газа, так как плотность кинетической энергии частиц такого газа пропорциональна $\rho^{4/3}$, т. е. меняется с ρ так же, как и плотность потенциальной энергии отталкивания между электронами. Но это неверно, так как в приведенном рассмотрении учтено кулоновское взаимодействие только между электронами, но не приняты во внимание атомные ядра, наличие которых необходимо, чтобы сделать плазму квазинейтральной. Отталкивание между электронами в среднем компенсируется притяжением их к атомным ядрам. Поэтому с большой степенью приближения электронный газ в звездной плазме может рассматриваться как газ невзаимодействующих частиц.

Выше ничего не было сказано о давлении газа, состоящего из атомных ядер. Однако из-за больших масс скорости атомных ядер, а с ними и давление, производимое ядрами, малы по сравнению с теми же величинами для электронов. В звездах главной последовательности газ атомных ядер еще не вырожден. Только при экстремально высоких температурах и плотностях, когда атомные ядра релятивистские, их

давление становится сравнимым с электронным давлением. А в случае ультрарелятивистских ядер давление вообще не зависит от массы частиц, т. е. для атомных ядер становится таким же, как и для электронов.

Количественное рассмотрение вырожденного газа ферми-частиц дается в дополнении к этому параграфу.

8. Итак, при высоких плотностях развиваются громадные силы давления вырожденного электронного газа. Способно ли такое давление приостановить гравитационное сжатие звезды? Гравитационное давление в центре звезды

$$\mathscr{P}_g \propto \frac{M^2}{R^4} \propto M^{2/3}\rho^{4/3} \tag{102.9}$$

(см. задачу к предыдущему параграфу). Давление вырожденного нерелятивистского электронного газа возрастает с плотностью ρ быстрее, чем $\mathscr{P}_g$, а именно по формуле (102.7). Если бы электронный газ оставался нерелятивистским, то соответствующим выбором плотности ρ всегда можно было бы добиться, чтобы давление газа $\mathscr{P}_{\text{газ}}$ превышало гравитационное давление $\mathscr{P}_g$. Следовательно, в нерелятивистском случае давление электронного газа всегда было бы в состоянии стабилизировать звезду любой массы.

Но при очень высоких плотностях ($\rho \gg 2 \cdot 10^6$ г/см^3) электронный газ становится ультрарелятивистским, а в этом случае, как показывает формула (102.8), давление газа меняется с плотностью так же, как и гравитационное давление. Последнее, однако, пропорционально также $M^{2/3}$. Поэтому стабилизация звезды определяется значением ее массы. При массах, меньших некоторого критического значения $M_{\text{кр}}$, давление газа превышает гравитационное давление. В этом случае звезда может быть стабилизирована давлением вырожденного электронного газа.

Если же $M > M_{\text{кр}}$, то гравитационное давление начинает превышать давление электронного газа, и последнее уже не в состоянии приостановить гравитационное сжатие звезды.

Критическое значение массы $M_{\text{кр}}$ называется *чандрасекаровским пределом* по имени Чандрасекара (р. 1910), установившего существование такого предела. Чандрасекаровский предел определяется из условия, чтобы давление вырожденного электронного газа в центре звезды было равно гравитационному давлению. Численные расчеты показывают, что

$$M_{\text{кр}} \approx \frac{5{,}75}{\mu^2} M_\odot, \tag{102.10}$$

где μ — число нуклонов в ядре, приходящихся на один электрон атома. Если вещество состоит из относительно легких ядер (гелиевое ядро звезды состоит из ядер изотопа ^{4}He), для которых $N = Z$, то $\mu = 2$ и предыдущая формула переходит в

$$M_{\text{кр}} \approx 1{,}44 M_\odot. \tag{102.11}$$

С учетом вращения (а оно действует против тяготения), которое у белых карликов может быть очень быстрым, предельная масса повышается до $2M_\odot$.

Таким образом, при $M < M_{\text{кр}}$ звезда может быть стабилизирована давлением вырожденного электронного газа независимо от того, будет ли этот газ нерелятивистским или релятивистским. Такие звезды образуются из красных гигантов, плотные ядра которых в результате термоядерных реакций (101.6) сбрасывают свои оболочки и начинают вести самостоятельное существование. Это белые карлики. Они характеризуются малыми размерами, очень большими плотностями (порядка 10^6–10^7 г/см^3) и высокими температурами. Массы белых карликов порядка солнечной, а геометрические размеры порядка размеров Земли. Поскольку «ядерное горючее» в недрах белых карликов израсходовано, их излучение происходит за счет охлаждения. А так как поверхность белых карликов очень мала, то и светимость их также очень мала — в сотни и тысячи раз меньше солнечной. Поэтому остывание белых карликов происходит очень медленно и длится несколько миллиардов лет.

Вещество недр белых карликов отличается высокой прозрачностью и теплопроводностью. Высокая прозрачность связана с тем, что в силу принципа Паули все квантовые состояния электронов в недрах белого карлика заполнены. Поглощение же квантов света связано с переходом электронов из одного квантового состояния в другое. Между заполненными квантовыми состояниями эти переходы невозможны. Невозможно и поглощение световых квантов. Исключение составляют только квантовые состояния вблизи уровня Ферми, которые заполнены электронами не целиком. Поэтому только быстрые электроны вблизи уровня Ферми могут поглощать кванты излучения. Из-за вырождения электронного газа велика и теплопроводность вещества белого карлика, аналогично тому, что имеет место в металлах при обычных температурах. Вследствие высокой прозрачности и теплопроводности в недрах белого карлика не могут возникать большие перепады температуры. Перепад температуры происходит в тонком поверхностном слое белого карлика, где электронный газ не вырожден. Толщина этого слоя порядка 1 % радиуса карлика. В нем температура возрастает от нескольких тысяч кельвинов (на границе поверхности) до десятков миллионов, а затем вплоть до центра звезды почти не меняется.

9. При достаточно высоких плотностях равновесие звезды начинает нарушаться *процессом нейтронизации* звездного вещества. Как известно, при β^--распаде ядра часть энергии уносится электроном, а остальная часть — нейтрино. Энергия каждой из этих двух частей подвержена случайным вариациям, но их сумма остается постоянной. Эта постоянная величина называется *верхней границей β^--распада.* Так вот, если энергия Ферми превышает верхнюю границу β^--распада, то становится более и более вероятным процесс, обратный β^--распаду: ядро поглощает электрон, а его зарядовое число Z уменьшается на единицу — *электронный захват* (см. § 74). Вновь образовавшееся ядро может также захватить электрон, и т. д. В результате таких процессов

концентрация электронов в звезде уменьшается, уменьшается и давление вырожденного электронного газа, поддерживающее звезду в равновесии. Это ведет к дальнейшему гравитационному сжатию звезды, а с ним и к дальнейшему повышению средней и максимальной энергии электронов вырожденного газа — вероятность захвата электронов ядрами возрастает. Такие процессы могут привести к образованию нейтроноизбыточных ядер. В конце концов нейтронов может накопиться так много, что звезда будет состоять преимущественно из нейтронов. Такие звезды называются *нейтронными.* Нейтронная звезда, конечно, не может состоять из одних только нейтронов, так как необходимо давление электронного газа, чтобы предотвратить превращение нейтронов в протоны. В нейтронной звезде имеется небольшая примесь (около 1–2 %) электронов и протонов. Благодаря тому что нейтроны не испытывают кулоновского отталкивания, средняя плотность вещества внутри нейтронной звезды очень высока — примерно такая же, как в атомных ядрах. При такой плотности радиус нейтронной звезды с массой порядка $M_\odot$ примерно в 10^5 раз меньше солнечного, т. е. составляет не более 10 км. Нейтронная звезда сильно неоднородна и имеет сложную внутреннюю структуру. Но этого вопроса мы касаться не будем. Ограничимся замечанием, что упругость вырожденного нейтронного газа в звезде достаточна для противодействия гидростатическому давлению, если только масса звезды не превосходит определенного значения. Вопрос о верхнем пределе массы не вполне выяснен. Теоретические расчеты на моделях показывают, что верхний предел массы нейтронной звезды определяется оценочной формулой

$$M_{\text{пр}} \approx (2\text{–}3)M_\odot. \tag{102.12}$$

При массе $M \gtrsim 1{,}2M_\odot$ нейтронные звезды образуются в результате *гравитационного коллапса* (быстрого сжатия) звезд. Начальная температура в центре образовавшейся нейтронной звезды очень высока (порядка 10^{11} K). Но уже через время порядка 10–100 с температура в центре понижается до 10^9 K за счет излучения нейтрино.

10. Существование нейтронных звезд было предсказано теоретически еще в 1938 г. Р. Оппенгеймером (1904–1967) и Г. Волковым. Однако из-за их ничтожной визуальной яркости их обнаружение выходило далеко за пределы возможностей оптических телескопов, даже самых мощных (ожидаемая видимая звездная величина нейтронной звезды, находящейся даже на минимальном расстоянии — порядка 10 световых лет, составляла всего 27^m). Положение изменилось после второй мировой войны, когда для исследования неба стали применять радиотелескопы. Начиная с 1964 г. на радиотелескопе Кембриджской лаборатории Кембриджского университета, возглавляемой Хьюишем, исследовались вариации радиоизлучения от дискретных космических источников. Летом 1967 г. аспирантка Хьюиша Жаклин Белл обратила внимание на один довольно необычный источник, посылающий, как выяснилось позднее, строго периодические радиоимпульсы. После этого в той же лаборатории, а позднее и в других лабораториях были открыты и исследованы аналогичные источники радиоизлучения,

которые были названы *пульсарами.* Периоды правильных пульсаций таких источников лежат в пределах 0,00154 до 3,75 с. До 1982 г. самым быстрым пульсаром с периодом 0,033 с считался пульсар, находящийся в Крабовидной туманности (см. п. 12). В 1982 г. был открыт пульсар с периодом 0,00154 с. Всего к концу 1987 г. было открыто 4 миллисекундных пульсара с периодами 0,00154; 0,003054; 0,0054; 0,006 с.

У пульсаров, расстояние до которых известно, можно подсчитать мощность радиоизлучения. У пульсара Крабовидной туманности она достигает 10^{35} эрг/с, что примерно в 25 раз больше мощности излучения Солнца ($3{,}83 \cdot 10^{33}$ эрг/с). Но есть и пульсары с мощностью излучения до 10^{38} эрг/с.

Спустя короткое время пульсары были отождествлены с предсказанными теоретически быстро вращающимися *нейтронными звездами.* Быстрое вращение нейтронной звезды связано с тем, что в силу закона сохранения момента импульса величина R^2/T должна сохраняться во времени. А так как из-за высокой проводимости плазменного вещества сохраняется и магнитный поток (см. т. III, § 71), то не должна меняться во времени и величина HR^2. Поэтому нейтронная звезда должна быть сильно намагничена. Например, при образовании нейтронной звезды радиусом $R = 10$ км из обычной звезды ($R \approx 10^6$ км) скорость вращения звезды и ее магнитное поле должны возрасти в 10^{10} раз. Но напряженность магнитного поля в некоторых пульсарах может достигать и 10^{12} Гс. Существенно, что направления магнитного поля и оси вращения, вообще говоря, не совпадают. С этими особенностями и связано радиоизлучение нейтронной звезды. Действительно, при несовпадении направлений оси вращения нейтронной звезды и ее магнитного момента последний должен вращаться, т. е. меняться во времени. А изменяющийся магнитный диполь излучает электромагнитные волны (см. т. III, § 141, задача 1). При этом излучение происходит преимущественно в направлении, перпендикулярном к магнитному моменту, и сосредоточено в пределах узкого конуса с углом раствора порядка 10°. Когда Земля попадает в пределы этого вращающегося конуса, обнаруживается максимум излучения. С этим и связан периодический импульсный характер излучения.

Благодаря потери энергии на излучение вращение нейтронной звезды непрерывно замедляется. Так, период пульсара, расположенного в Крабовидной туманности, регулярно увеличивается на $3{,}6 \cdot 10^{-8}$ секунд в сутки, или на $4{,}2 \cdot 10^{-13}$ секунд в секунду. У других пульсаров регулярное увеличение периода вращения заметно меньше. Но и у них относительное изменение периода вращения меньше чем 10^{-14}. Только самые лучшие кварцевые часы отличаются таким удивительным постоянством хода.

Нейтронная звезда может быть источником и рентгеновского излучения. Для этого вблизи нее должна находиться другая звезда, образующая вместе с ней двойную систему. Сплошное рентгеновское излучение возникает в результате *аккреции,* т. е. захвата вещества из другой звезды и его падения на нейтронную. Если масса нейтронной звезды

порядка солнечной, то при таком падении получается кинетическая энергия порядка 10^{20} эрг на грамм захваченного вещества (100 МэВ на нуклон). Для объяснения наблюдаемой интенсивности рентгеновского излучения (она того же порядка, что и интенсивность радиоизлучения) необходимо предположить, что масса вещества, захватываемая нейтронной звездой в год, составляет около 10^{-9} солнечных масс. По нескольким двойным системам оценена масса нейтронных звезд ($M \approx (1{,}4–3) M_{\odot}$).

Пульсар Крабовидной туманности является пока единственным пульсаром, от которого наблюдаются импульсы оптического излучения с периодом 0,033 с, т. е. с тем же периодом, что и импульсы рентгеновского излучения. Высокая интенсивность ультрафиолетовой части излучения указывает на то, что поверхность этой нейтронной звезды очень горяча. В спектре этой звезды отсутствуют какие бы то ни было спектральные линии как излучения, так и поглощения.

11. Если на конечной стадии эволюции звезды ее масса окажется больше предельной (102.12), то нерелятивистскими формулами пользоваться уже нельзя. В частности, нельзя пользоваться формулой (102.9), полученной на основании ньютоновской теории тяготения. В этом случае рассмотрение всех вопросов возможно только в рамках *общей теории относительности.* Поэтому мы должны довольствоваться лишь сообщением некоторых результатов.

Общая теория относительности приводит к выводу, что в рассматриваемом случае квантовомеханическое внутреннее давление вещества уже не в состоянии противостоять гравитационному давлению. Произойдет беспредельное катастрофическое сжатие звезды (гравитационный коллапс). Этот вывод не требует никаких предположений относительно конкретных свойств вещества (например, предположения, что вещество ведет себя как идеальный газ).

Для удаленного наблюдателя (т. е. наблюдателя, находящегося вне гравитационного поля звезды) радиус звезды асимптотически стремится к так называемому *гравитационному радиусу*

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}. \qquad (102.13)$$

Гравитационный радиус Солнца равен 2,95 км, Земли — 0,886 см. Сфера радиусом r_g называется *сферой Шварцшильда* (1873–1916), впервые получившего точное решение уравнений гравитации общей теории относительности для сферически-симметричного гравитационного поля. При приближении радиуса звезды к гравитационному радиусу скорость сжатия для удаленного наблюдателя бесконечно замедляется, так что звезда «застывает» в своем развитии. Излучение звезды по мере приближения ее радиуса к гравитационному становится все более слабым. В пределе звезда полностью изолируется от внешнего наблюдателя («самозамыкается»). Такая звезда называется *черной дырой.*

Никакие сигналы (свет, нейтрино и любые частицы), посланные в пределах сферы Шварцшильда, не могут выйти наружу и достигнуть внешнего наблюдателя. По этой причине сфера Шварцшильда

называется *горизонтом событий черной дыры*. Впрочем, удаленный наблюдатель никогда не заметит, что тело, падающее на черную дыру, пересечет горизонт событий, так как по его часам для этого требуется бесконечное время. По часам свободно падающего наблюдателя из-за замедления хода часов в гравитационном поле (см. т. IV, § 109) это время, конечно, определяется временем свободного падения. Дело в том, что при приближении к сфере Шварцшильда гравитационное поле стремится к бесконечности, как это показывает общая теория относительности.

Во внешнем пространстве наличие черной дыры проявляется в ее гравитационном поле, вращающем моменте и электрическом заряде, если сколлапсировавшая звезда была заряжена. На расстояниях, очень больших по сравнению с радиусом сферы Шварцшильда, гравитационное поле определяется законом всемирного тяготения Ньютона, а движение других тел, взаимодействующих с черной дырой, подчиняется законам ньютоновской механики.

Отметим одну особенность *вращающихся черных дыр*, которая может быть понята также на основе общей теории относительности. У вращающейся черной дыры вне горизонта существует область, называемая *экзосферой*, попав в которую вещество вовлекается во вращение вокруг черной дыры, что замедляет вращение и приводит к потере вращательной энергии черной дыры. Это может произойти, например, тогда, когда тело, попавшее в экзосферу, распадается на две части, одна из которых продолжает падать на черную дыру, а другая вылетает из экзосферы в направлении вращения. При этом, конечно, сохраняется полный вращающий момент системы, состоящей из черной дыры и влетевшего тела, но может произойти перераспределение энергии между ними. В результате часть энергии вращения черной дыры может быть унесена вылетевшей частью распавшегося тела.

Но из-за *квантовых эффектов* потеря энергии происходит и у невращающихся черных дыр, на что обратил внимание Хоукинг в 1974 г. Не имея возможности остановиться на этом вопросе, заметим, что Хоукинг показал, что невращающаяся черная дыра массой M излучает частицы (фотоны, нейтрино, гравитоны) с такой скоростью, как если бы она была черным телом, нагретым до температуры

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k G M} = \frac{6{,}2}{M/M_\odot}\, 10^{-8}\ \text{K}. \tag{102.14}$$

Так, при $M = 3M_\odot$ эта формула дает $T \approx 2 \cdot 10^{-8}$ K. Таким образом, существует возможность уменьшения массы черной дыры путем «квантового испарения». Однако температуры (102.14) для черных дыр, возникающих в процессе коллапса звезд, слишком низки, и для таких черных дыр «квантовое испарение» не имеет значения. Время жизни этих черных дыр более чем на 50 порядков превышает возраст Вселенной. Для черных дыр с массой около 10^{15} г время жизни около 10^{10} лет. Но черные дыры столь малых масс при коллапсе звезд не образуются. Возможно, малые черные дыры возникают на *ранней стадии* эволюции Вселенной из первоначальных неоднородностей крайне

плотного расширяющегося вещества. Масса таких черных дыр по теории $M \approx c^3/\sqrt{\rho G^3}$, где ρ — плотность вещества. Квантовое испарение черных дыр существенно только для малых черных дыр, масса которых меньше или порядка 10^{15} г. Заключительный этап эволюции черной дыры такой массы заканчивается взрывом, при котором из дыры массой m порядка $3 \cdot 10^9$ г за последние 0,1 с выделяется громадная энергия — порядка $mc^2 \approx 10^{30}$ эрг!

12. Черные дыры с достоверностью еще не обнаружены. Если они существуют, то их наблюдение осложняется тем обстоятельством, что они могут проявлять себя *только своим гравитационным полем.* Изложим одну из идей, предложенных для обнаружения черных дыр. Если черная дыра образует двойную систему с обычной (видимой) звездой, то она — источник рентгеновского излучения, которое возникает при аккреции вещества обычной звезды на черную дыру. Но источниками рентгеновского излучения являются также белые карлики и нейтронные звезды, образующие двойные системы с обычными звездами. Поиски источников рентгеновского излучения нельзя проводить наземными приборами из-за поглощения рентгеновских лучей земной атмосферой. Для серьезных поисков должны применяться только рентгеновские телескопы, установленные на борту искусственных спутников Земли. Масса обычной (видимой) звезды может быть оценена по ее спектру, а доплеровское смещение спектральных линий при обращении видимой звезды вокруг центра масс ее и невидимого компонента позволяет определить период обращения. По этим данным, как показывается в астрономии, можно оценить и массу невидимой компоненты двойной звезды. Если эта масса окажется меньше $1{,}44M_\odot$, то невидимой компонентой будет белый карлик; если она больше этой величины, но меньше $3M_\odot$, то это — нейтронная звезда; если же она превосходит $3M_\odot$, то только черная дыра.

Рентгеновский телескоп был впервые установлен на борту итало-американского спутника «Ухуру», запущенного 12 декабря 1970 г. К весне 1972 г. спутник накопил информацию, достаточную для составления детального каталога 125 рентгеновских источников. Внимание астрономов привлек рентгеновский источник, расположенный в созвездии Лебедя и получивший название «Лебедь Х-1». В результате исследований на спутнике «Ухуру» и с помощью рентгеновских телескопов на высотных баллонах удалось в 1971 г. с большой точностью установить положение источника. В том же году были зарегистрированы изменения рентгеновской светимости источника и наблюдалось резкое возрастание излучения радиоисточника, расположенного в том же месте неба. Естественно, что оба источника были отождествлены. Тем самым положение Лебедя Х-1 было определено с точностью до угловой секунды. В том же месте была обнаружена горячая голубая спектрально-двойная звезда с периодом 5,6 сут, расположенная на расстоянии 2000 пк от Солнца. Оказалось, что и рентгеновское излучение Лебедя Х-1 содержит компоненту с тем же периодом. На этом

основании было сделано заключение, что указанная звезда и рентгеновский источник образуют двойную систему. Масса звезды больше $20M_\odot$, а невидимой компоненты больше $8M_\odot$. Поэтому естественно предположить, что рентгеновским источником является черная дыра, хотя к этому предположению следует относиться с осторожностью.

13. Как показывают наблюдения, нейтронные звезды (пульсары), вероятно, чаще всего возникают при вспышках *сверхновых.* Вспышка сверхновой — это гигантский по своим масштабам взрыв звезды. В таком взрыве выбрасывается вещество с массой порядка солнечной и много больше. Средняя скорость выброшенного вещества порядка 10^9 см/с. В момент вспышки сверхновой светимость звезды возрастает в миллиарды раз, так что на короткое время (порядка месяца) звезда по своей яркости становится сравнимой с целой галактикой, состоящей из миллиардов звезд.

В течение нескольких месяцев взорвавшаяся звезда излучает столько света, сколько излучает Солнце за миллиард лет (около 10^{50} эрг). Но электромагнитное излучение уносит лишь малую часть полной энергии, освобожденной сверхновой. Кинетическая энергия разлетающегося вещества примерно в 10 раз больше. Еще большую энергию (примерно в 100 раз — по сравнению с электромагнитным излучением) уносят нейтрино, которые в основном испускаются во вспышке, длящейся около секунды. После взрыва большая часть массы звезды оказывается рассеянной и наблюдается в виде туманности. В центре звезды остается слабая звездочка — пульсар, которая в некоторых случаях может превратиться в черную дыру.

В каждой галактике сверхновые вспыхивают редко. За прошедшие 1000 лет в нашей Галактике наблюдались по крайней мере шесть сверхновых: в 1006, 1054, 1181, 1572, 1604 и 1667 гг. Особую роль в астрономии сыграла сверхновая 1054 г., появление которой было зафиксировано в китайских летописях. На месте взорвавшейся звезды в настоящее время наблюдается Крабовидная туманность, имеющая форму довольно правильного эллипса, угловые размеры которого приблизительно равны $4'' \times 6''$. В центре туманности наблюдается маленькая звездочка 16-й видимой звездной величины — пульсар, о котором уже говорилось в п. 8. Видимая звездная величина самой туманности 8^m,5, т. е. она примерно в 1000 раз ярче, чем эта звездочка. В ближайшей к нам галактике — Большом Магеллановом облаке — последняя сверхновая вспыхнула в феврале 1987 г.

Если бы вспышки сверхновых наблюдались только «близко», т. е. в пределах нашей Галактики, то мы знали *бы* о сверхновых очень мало. Однако светимость сверхновых настолько велика, что они видны даже в удаленных галактиках. Так, в 1885 г. астроном Гартвиг на астрономической обсерватории в Тарту (Эстония) наблюдал вспышку сверхновой в крупнейшей из галактик — туманности Андромеды. Звезда имела видимый блеск 6^m,5, т. е. люди с хорошим зрением могли видеть ее даже невооруженным глазом (а туманность Андромеды удалена от Земли на расстояние 670 тыс. парсек, т. е. свыше 2 млн световых лет!). Видимый блеск туманности Андромеды равен 4^m,5, т. е. яркость сверхновой была

только в 6,25 раз меньше всей туманности Андромеды. В настоящее время астрономы открывают более 10 сверхновых в год.

Откуда берется энергия, необходимая для взрыва звезды при вспышке сверхновой? Считается, что одним из источников этой энергии является «выгорание» углерода в первой реакции (102.4). В этой реакции выделяется энергия около 1 МэВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ эрг на нуклон, или 10^{18} эрг на грамм. Чтобы за счет углеродной реакции выделилась энергия 10^{50} эрг, необходимо «сжечь» взрывным образом массу углерода $^{12}_{6}$C, равную $10^{50}/10^{18} = 10^{32}$ г, а если учесть еще кинетическую энергию разлетающегося вещества и энергию, уносимую нейтрино, то потребуется величина, примерно в 100 раз большая. А эта величина в несколько раз превышает массу Солнца.

Другим и притом более мощным источником энергии является гравитационное сжатие звезды. Гравитационная энергия, освобождающаяся при гравитационном сжатии звезды до размеров сферы Шварцшильда, составляет mc^2, т. е. 938 МэВ на нуклон. При сжатии же до размеров нейтронной звезды эта энергия равна 100 МэВ на нуклон. (Напомним, что энергия связи нуклона в ядре равна 8 МэВ.) Таким образом, при сжатии нейтронной звезды до размеров сферы Шварцшильда освобождается гравитационная энергия 800 МэВ на нуклон. Понятно, что этой энергии недостаточно, чтобы отбросить все вещество, упавшее на сферу Шварцшильда. Может быть сброшена только часть этого вещества.

Механизм взрывного освобождения ядерной и гравитационной энергии, а также механизм самого взрыва еще недостаточно ясны. Эти вопросы усиленно изучаются численными методами на моделях звезд с широким использованием ЭВМ. Интересующихся мы отсылаем к статье Бете и Брауна (В мире науки. — 1985, № 7).

14. В заключение не можем удержаться от искушения сделать следующее замечание. Еще в 1795 г. Лаплас (1749–1827) допускал существование излучающих, но невидимых звезд. Он исходил из ньютоновской корпускулярной гипотезы о природе света. Ньютоновская световая корпускула подчиняется законам ньютоновской механики и подвержена действию гравитационных сил. Обозначим через v скорость корпускулы, меняющуюся во время ее движения. В гравитационном поле звезды движение корпускулы будет финитным, если полная энергия ее отрицательна:

$$\frac{Pmv^2}{2} - \frac{GMm}{r} < 0.$$

Такая корпускула не дойдет до бесконечно удаленного наблюдателя, и звезда будет невидимой. Допустим, далее, что в момент испускания скорость корпускулы всегда равна одной и той же величине c. Испускание света происходит с поверхности звезды. Обозначим через r_0 ее радиус. Заменяя в предыдущем неравенстве r на r_0, а v — на c, получим

$$r_0 < \frac{2GM}{c^2}.$$

В предельном случае равенства эта формула совпадает с (102.13). Таким образом, если радиус звезды меньше гравитационного, то по Лапласу звезда для удаленного наблюдателя не будет видна.

Этому рассуждению, конечно, нельзя придавать серьезного значения, так как его исходные положения неверны. А сфера радиуса r_0 по своим свойствам в ньютоновской механике не имеет ничего общего со сферой того же радиуса (сферой Шварцшильда) в общей теории относительности. В общей теории относительности сфера Шварцшильда есть *горизонт событий*, и луч света не может выйти из нее наружу. В ньютоновской механике сфера радиуса r_0 этим свойством не обладает: луч света может выйти из этой сферы и дойти до наблюдателя, находящегося на конечном расстоянии, только он не может дойти до бесконечности. Далее, при падении частицы массы m из бесконечности на сферу Шварцшильда гравитационные силы в общей теории относительности совершают работу mc^2. В ньютоновской механике, как легко подсчитать, эта работа равна $mc^2/2$, т. е. вдвое меньше. Тем не менее, помимо исторического интереса, приведенное рассуждение заслуживает внимания еще и потому, что оно дает наглядный способ запоминания формулы для гравитационного радиуса.

Добавление

Идеальный газ Ферми при абсолютном нуле температуры

Согласно классическим представлениям при абсолютном нуле температуры движение частиц тела прекращается. Однако вблизи абсолютного нуля классическая физика неприменима. Там существенно проявляются *квантовые свойства вещества.* Поведение электронного и всякого газа из фермионов подчиняется квантовой статистике Ферми–Дирака. Рассмотрим поведение идеального ферми-газа в простейшем случае, когда абсолютная температура равна нулю. Нас будет интересовать в первую очередь электронный газ.

Пусть n — общее число частиц в единице объема газа. Найдем число частиц dn в единице объема с импульсами между p и $p+dp$. Число квантовых состояний в указанном интервале равно объему $4\pi p^2 dp$, приходящемуся на этот интервал импульсного пространства, деленному на объем одной квантовой ячейки h^3. При абсолютном нуле заполняются все низшие квантовые состояния, а все высшие остаются свободными. При этом, согласно принципу Паули, в каждом заполненном состоянии могут находиться два фермиона с противоположно направленными спинами. Таким образом, распределение числа частиц по заполненному пространству импульсов определяется формулой

$$dn = 2\,\frac{4\pi p^2 dp}{h^3}. \qquad (102.15)$$

Согласно условию нормировки

$$\int dn = \frac{8\pi p_F^3}{3h^3} = n, \qquad (102.16)$$

где p_F — максимальное значение импульса, которое может принимать частица при заданном n. Это значение называется *границей Ферми.* Таким

образом,

$$p_F = \sqrt[3]{\frac{3}{8\pi}}\, hn^{1/3} = 3{,}28 \cdot 10^{-27} n^{1/3}. \tag{102.17}$$

Уравнение (102.15) и дает распределение ферми-частиц в импульсном пространстве. В него не входит температура. Это и понятно, так как оно описывает распределение частиц в импульсном пространстве при абсолютном нуле температуры и в его ближайшей окрестности. Соответствующее состояние ферми-газа называется *вырожденным.* Таким образом, в вырожденном состоянии ферми-газа существует только один независимый макроскопический параметр, например плотность, которым определяются и все остальные параметры.

Граничная энергия $\mathscr{E}_F$, т. е. энергия, соответствующая импульсу $p = p_F$, связана с концентрацией газа соотношением

$$\begin{aligned} &\mathscr{E}_F = \frac{p_F^2}{2m} = \left(\sqrt[3]{\frac{3}{8\pi}}\right)^2 \frac{h^2}{2m}\, n^{2/3} \quad \text{при } \mathscr{E}_F \ll mc^2, \\ &\mathscr{E}_F = cp_F = \sqrt[3]{\frac{3}{8\pi}}\, hcn^{1/3} \qquad\qquad \text{при } \mathscr{E}_F \gg mc^2. \end{aligned} \tag{102.18}$$

Для электронного газа

$$\begin{aligned} &\mathscr{E}_F = 0{,}584 \cdot 10^{-26} n^{2/3} \text{ эрг} = 3{,}65 \cdot 10^{-21} n^{2/3} \text{ МэВ при } \mathscr{E}_F \ll mc^2, \\ &\mathscr{E}_F = 9{,}78 \cdot 10^{-17} n^{1/3} \text{ эрг} = 0{,}610 \cdot 10^{-10} n^{1/3} \text{ МэВ при } \mathscr{E}_F \gg mc^2. \end{aligned} \tag{102.19}$$

В ультрарелятивистском случае, когда $mc^2 \ll \mathscr{E}_F$, а потому $\mathscr{E} = pc$, энергия Ферми $\mathscr{E}_F$ выражается формулами (102.18) и (102.19) одинаково для всех частиц, независимо от их массы. То же относится и ко всем другим соотношениям в ультрарелятивистском случае. В нерелятивистском приближении это не так. Так, в этом случае $\mathscr{E}_F$ обратно пропорциональна массе частицы m.

Газ может считаться вырожденным, когда его температура ниже так называемой температуры вырождения $T_{\text{выр}}$. Последняя определяется соотношением

$$kT_{\text{выр}} = \mathscr{E}_F. \tag{102.20}$$

Для электронов в нерелятивистском случае из формулы (102.19) получаем

$$T_{\text{выр}} = 0{,}423 n^{2/3} \cdot 10^{-10} \text{ К (электроны, } \mathscr{E}_F \ll mc^2). \tag{102.21}$$

В ультрарелятивистском случае для всех ферми-частиц (102.19) дает

$$T_{\text{выр}} = 0{,}708 n^{1/3} \text{ К } (\mathscr{E}_F \gg mc^2). \tag{102.22}$$

Для свободных электронов в металлах при обычных плотностях $n \sim 10^{22}$ температура вырождения $T_{\text{выр}} \approx 20\,000$ К. При плотностях $\rho \sim 10^6$ г/см^3 $T_{\text{выр}} \approx 2 \cdot 10^8$ К. В случае ультрарелятивистских частиц той же плотности $T_{\text{выр}} \approx 10^9$ К. Приведенные оценки показывают, что при температуре белых карликов электронный газ действительно может считаться вырожденным.

Рассчитаем теперь давление $\mathscr{P}_{\text{газ}}$ ферми-газа. В нерелятивистском случае

$$\mathscr{P}_{\text{газ}} = \frac{1}{3}\, nm\overline{v^2} = \frac{n\overline{p^2}}{3m} = \frac{1}{3m}\int\limits_0^{p_F} p^2\, dm = \frac{h^2}{15m}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{5/3} n^{5/3} \quad (\mathscr{E}_F \ll mc^2). \tag{102.23}$$

Здесь давление газа при заданной концентрации частиц n обратно пропорционально массе частицы m. Поэтому давлением газа нуклонов можно пренебречь по сравнению с давлением электронного газа. В релятивистском случае точное вычисление давления газа потребовало бы знания функции распределения не только при $p \ll p_F$, но и во всем интервале изменения импульсов. Такое вычисление довольно громоздко, и мы его приводить не будем Ограничимся ультрарелятивистским случаем, где все значительно упрощается. В пренебрежении энергией покоя связь между энергией и импульсом частицы принимает вид $\mathscr{E} = pc$, т. е. такой же, как и для фотона. Поэтому можно воспользоваться результатом вычисления давления для фотонного газа (см. т. II, § 61). Когда $\mathscr{E} \gg mc^2$, можно принять приближенно, что все частицы ультрарелятивистские. Тогда

$$\mathscr{P}_{\text{газ}} \approx \frac{1}{3}\, n\mathscr{E}_F = \frac{1}{3}\, ncp_F = \sqrt[3]{\frac{1}{72\pi}}\, hcn^{4/3} \quad (\mathscr{E}_F \geqslant mc^2). \tag{102.24}$$

Плотность газа $\rho = n_{\text{N}} m_{\text{N}}$, где n_{N} и m_{N} — концентрация и масса нуклонов, так как массой электронов можно пренебречь. Если μ — число нуклонов, приходящееся на один электрон, то $n_{\text{N}} = \mu n_{\text{e}}$, где n_{e} — концентрация электронов. Таким образом,

$$n_{\text{e}} \approx \frac{\rho}{\mu m_{\text{N}}}. \tag{102.25}$$

Для водородной плазмы $\mu = 1$. Если же вещество состоит из относительно легких ядер, то $N = Z$, а потому $\mu = 2$. Для вырожденного электронного газа легко получить

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_{\text{газ}} &= 10^7 (\rho/\mu)^{5/3}\ \text{дин/см}^2 \qquad (\mathscr{E}_F \ll mc^2), \\ \mathscr{P}_{\text{газ}} &= 1{,}2 \cdot 10^9 (\rho/\mu)^{4/3}\ \text{дин/см}^2 \quad (\mathscr{E}_F \gg mc^2). \end{aligned} \tag{102.26}$$

При $\mathscr{E}_F = mc^2$ плотность вырожденного электронного газа $\rho \approx 2 \times$ $\times\, 10^6$ г/см^3. Для ориентировки укажем, что при $\rho \approx 10^7$ г/см^3 давление вырожденного электронного газа $\mathscr{P}_{\text{газ}} \approx 10^{12}$ атм ($\mu \approx 2$).

§ 103. Космические лучи

1. Начало изучения космических лучей относится к августу 1912 г., когда австрийский физик Гесс (1883–1964) поднялся с электроскопами на воздушном шаре для исследования ионизации воздуха. О степени ионизации он судил по скорости разряда электроскопов. Чтобы чувствительность электроскопов не менялась с высотой, они были герметизированы, так что плотность воздуха в них оставалась постоянной. Еще до Гесса аналогичные опыты производились Гоккелем, поднимавшимся на высоту 4000 м над уровнем моря. Но результаты его опытов были

сомнительны и подверглись критике, так как он применял прибор, давление воздуха внутри которого изменялось при изменении наружного давления, а поправок на это он не вводил. Для того чтобы выяснить, насколько обоснованной была эта критика, Гесс, наряду с герметизированными электроскопами, захватил и негерметизированный электроскоп.

Еще к 1902 г. было установлено, что сухой воздух в герметически закрытом сосуде всегда слабо ионизован, даже после того, как совершенно распались газообразные радиоактивные вещества, содержащиеся в нем в ничтожных количествах. Если окружить сосуд свинцовой оболочкой с толщиной стенок около 2–3 см для защиты его от внешнего ионизующего излучения, то ионизация значительно уменьшается, но не исчезает полностью. Это заставляет предположить, что источники излучения, вызывающего ионизацию, находятся вне сосуда, в котором заключен воздух.

Наряду с другими предположениями было высказано и предположение, что ионизация вызывается излучением радиоактивных веществ, всегда имеющихся в небольших количествах в почве, горных породах, воде и пр. Если бы это было так, то ионизация воздуха убывала бы с высотой.

Для проверки этого заключения Гесс и совершил свой полет на воздушном шаре. Он обнаружил, что при подъеме на первоначальные 600 м над уровнем моря ионизация воздуха действительно убывала, хотя и медленнее, чем это ожидалось. Но начиная с высоты 600 м она стала возрастать — сначала медленно, а затем все быстрее и быстрее. На высоте 4800 м ионизация стала примерно в четыре раза больше, чем на уровне моря. Гесс пришел к заключению, что результаты его наблюдений лучше всего объясняются предположением, что на границу земной атмосферы из мирового пространства падает излучение очень большой проникающей способности.

Кольхерстер (1887–1946), многократно поднимавшийся на воздушных шарах, и другие ученые в опытах с электроскопами и ионизационными камерами подтвердили результаты наблюдений Гесса и обнаружили дальнейшее увеличение ионизации воздуха с высотой. На высоте 8400 м ионизация оказалась приблизительно в 10 раз больше, чем над уровнем моря. Тем самым было подтверждено и предположение Гесса о внеземном происхождении ионизующего излучения. Окончательно справедливость этого предположения была к концу 1926 г. доказана Милликеном (1868–1953), осуществившим в 1923–1926 г. серию опытов по поглощению такого ионизующего излучения. Падающее на Землю проникающее излучение, приходящее из космоса, было названо *космическими лучами.*

Дальнейшие опыты с запускаемыми на высоту шарами-зондами показали, что интенсивность потока космических лучей возрастает лишь до высоты около 20 км над уровнем моря. На этой высоте она достигает максимума, а при дальнейшем подъеме снижается. Это связано с тем,

что падающее на Землю космическое излучение взаимодействует с атмосферой, образуя множество вторичных частиц, о чем будет сказано в дальнейшем.

В дальнейшем, за немногими исключениями, мы опустим исторические и экспериментальные подробности, а ограничимся весьма кратким сообщением важнейших результатов из обширнейшей области физики космических лучей.

2. При исследовании природы космических лучей громадную роль сыграли методы регистрации заряженных ионизующих частиц с помощью камеры Вильсона, счетчиков Гейгера–Мюллера и толстослойных фотографических эмульсий. Последний метод, разработанный в середине 40-х годов, аналогичен методу камеры Вильсона. Заряженные ионизующие частицы, проходя через слой фотоэмульсии, сталкиваются с зернами бромистого серебра и взаимодействуют с ними, в результате чего в эмульсии возникает «скрытое изображение». После проявления в тех местах, через которые пролетели ионизующие частицы, в зернах восстанавливается металлическое серебро. При рассматривании в микроскоп в поле зрения видны траектории отдельных частиц, отмеченные темными зернами серебра.

Отметим, что начиная с 1924 г. Д.В. Скобельцын (р. 1892) провел длинный ряд важных исследований с камерой Вильсона, помещенной в сильное магнитное поле H. Траектория заряженной частицы в магнитном поле искривляется, но если поле постоянно, то ее кинетическая энергия, а с ней и релятивистская масса остаются постоянными. Если частица движется перпендикулярно к магнитному полю, то, приравнивая центробежную силу pv/R лоренцевой силе $(Ze/c)vH$, получаем

$$cp = ZeHR, \tag{103.1}$$

где Ze — заряд частицы, p — ее импульс, а R — радиус кривизны ее траектории. Произведение HR называется *магнитной жесткостью* частицы. Для ультрарелятивистской частицы кинетическая энергия $\mathcal{E} = pc$. Поэтому с помощью формулы (103.1) можно определить энергию и знак заряда ультрарелятивисткой частицы. Этим методом в 1929 г. Скобельцын нашел в космических лучах отрицательные частицы, энергия которых оказалась значительно больше энергии обычных β-частиц.

Отметим еще идею *схемы совпадений* на электронных лампах, предложенную Росси (р. 1905) и широко использованную им и другими исследователями космических лучей. Эта схема позволяет судить, в каком направлении прошла ионизующая частица, если только она заряжена. Схема совпадений содержит два или больше расположенных вдоль одной прямой счетчиков Гейгера–Мюллера G_1, G_2, $G_3, \ldots$, которые соединены с электронными лампами L_1, L_2, $L_3, \ldots$, как показано на рис. 175. Пока в счетчиках не произошел разряд, ток от положительного полюса батареи B, питающей лампы, через сопротивление R и электронные лампы проходит в землю. Если сопротивление R очень велико, то на нем происходит большое падение напряжения, так что потенциал в точке A будет близок к потенциалу земли. Когда в один из счетчиков

попадает ионизующая частица, она вызывает в нем электрический заряд, на сетку лампы, соединенной с этим счетчиком, поступает отрицательный импульс напряжения, так что эта лампа перестает пропускать ток. Однако лампы, соединенные с остальными счетчиками, в которых разряд не произошел, продолжают пропускать ток. При достаточно большом сопротивлении R ток на землю изменится очень мало. То же самое будет происходить, если частица пройдет через несколько, но не через все счетчики. Но положение изменится, если она пройдет одновременно через все счетчики. Тогда все лампы окажутся запертыми, и ток на землю прекратится. В результате потенциал в точке A резко возрастет до потенциала на положительном полюсе батареи. Это скачкообразное изменение потенциала в точке A можно измерить вольтметром или зафиксировать каким-либо другим прибором. Срабатывание этого прибора свидетельствует о том, что ионизующая частица прошла через все счетчики установки. После срабатывания схемы заряды в счетчиках Гейгера–Мюллера затухают, положительные заряды с сеток электронных ламп стекают в землю, и схема вновь готова для регистрации частиц. В схеме Росси лампы можно заменить транзисторами.

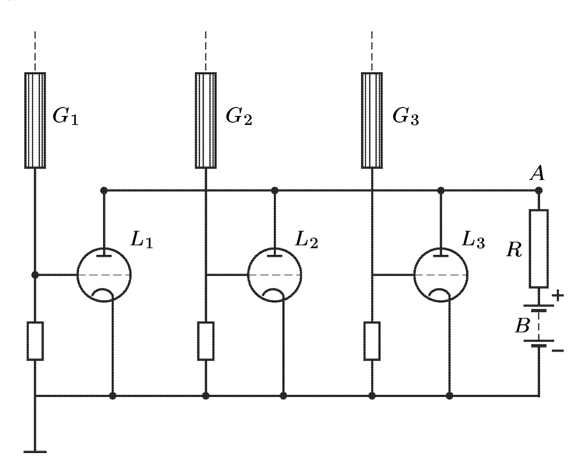


Рис. 175

Конечно, схема Росси и аналогичные ей схемы могут регистрировать не только события, вызываемые одной частицей, проходящей через все счетчики, но и такие события, которые вызываются частицами, проходящими друг за другом через слишком короткие промежутки времени. Чтобы этого не произошло, эти промежутки должны быть больше *разрешающего времени схемы*, определяющегося главным образом временем зажигания разряда в счетчиках Гейгера–Мюллера. Разрешающее время схемы Росси порядка микросекунды. Разработаны схемы совпадений, аналогичные схеме Росси, характеризующиеся меньшими разрешающими временами.

3. Космические лучи разделяются на *первичные* и *вторичные*. Первичные космические лучи падают на Землю из космоса. Проходя через толстый слой земной атмосферы (около 1000 г/см^2), они претерпевают сложную цепь превращений, в результате чего возникает новое излучение, которое и называется вторичными космическими лучами. По своему составу вторичные космические лучи не имеют ничего общего с первичными.

В околоземном космическом пространстве первичное космическое излучение состоит из *галактического космического излучения* и *солнечного космического излучения*. Первое приходит из удаленных объектов нашей звездной системы — Галактики — и других галактик, второе — от Солнца. Рассмотрим сначала первичное галактическое излучение.

Природа первичного космического излучения длительное время оставалась неясной. Только начиная с 40-х годов окончательно было установлено, что первичные космические лучи состоят из ядер тех же химических элементов, которые входят и в состав Земли, главным образом из ядер водорода. Частицы космических лучей обладают громадными кинетическими энергиями по сравнению с частицами обычного вещества, даже нагретого до миллиардов кельвинов. Энергии самых быстрых частиц космических лучей столь велики, что они в этом отношении долго будут оставаться вне конкуренции с самыми быстрыми частицами, ускоряемыми на современных ускорителях. Основная масса первичных космических лучей имеет энергии от 10^9 эВ (1 ГэВ) и выше, что в десятки тысяч раз превышает тепловую энергию частиц в самых горячих частях Вселенной. Отсюда следует, что энергия частиц космического излучения имеет нетепловое происхождение.

4. То, что первичное космическое излучение, по крайней мере частично, состоит из заряженных частиц, подтверждается *геомагнитными явлениями*. К ним относится, во-первых, *широтный эффект* — зависимость интенсивности I космических лучей от геомагнитной широты места. Отвлечемся ради простоты от действия магнитного поля Солнца (оно будет учтено в п. 9) и примем во внимание только магнитное поле Земли $\mathbf{H}$. Сила Лоренца $(e/c)[\mathbf{vH}]$ перпендикулярна к магнитному полю и к скорости частицы. Если космическая частица приближается к геомагнитному полюсу, двигаясь вдоль $\mathbf{H}$, то сила Лоренца обращается в нуль. В этом случае Земли могут достигнуть частицы любой энергии. Если же частица приближается к Земле в плоскости геомагнитного экватора, то сила Лоренца максимальна. Она изгибает траекторию частицы. Земли могут достигнуть только частицы, энергии которых больше некоторой определенной величины. Если же энергия меньше, то частица не достигнет Земли, а отразится ее магнитным полем. Достаточно медленные частицы будут отражаться и на других геомагнитных широтах. Количественно широтный эффект характеризуется величиной $(I_{90^\circ} - I_{0^\circ})/I_{90^\circ}$. Измерения показали, что эта величина на уровне моря составляет около 10 %, а на высоте 10 км — около 36 %.

Во-вторых, к геомагнитным явлениям относится *долготный эффект*. Так называют изменение интенсивности космических лучей при

смещении вдоль одной и той же параллели. Магнитное поле Земли в первом приближении можно моделировать с помощью магнитного диполя с магнитным моментом $8{,}1 \cdot 10^{25}$ Гс · см^3, наклоненным под углом 11,5° к земной оси. Однако такой диполь надо поместить не в центре Земли, а сместить от него перпендикулярно к земной оси приблизительно на 342 км. Вследствие этого, а также небольшого отличия магнитного поля Земли от поля диполя это поле немного меняется вдоль параллели. С этим и связан долготный эффект. На уровне моря интенсивность космических лучей на одной и той же параллели отклоняется от среднего значения на несколько процентов.

Наконец, в-третьих, наблюдается *асимметрия в направлении космических лучей*, приходящих на Землю. Она проявляется в зависимости интенсивности космических лучей от ориентации регистрирующего прибора относительно стран света. С запада приходит больше космических частиц, чем с востока. Количественно восточно-западная асимметрия характеризуется величиной $2(I_з - I_в)/(I_з + I_в)$, т. е. отношением разности интенсивностей космических лучей, приходящих соответственно с запада и востока, к их полусумме. На больших высотах эта величина составляет около 0,5.

Опуская строгое и сложное рассмотрение вопроса, для уяснения причины восточно-западной асимметрии ограничимся частным случаем, когда заряженная космическая частица движется к Земле в плоскости ее геомагнитного экватора. На рис. 176 представлен этот случай для положительно (a) и отрицательно ($б$) заряженных частиц. Предполагается, что магнитное поле перпендикулярно к плоскости рисунка и направлено к читателю. Траектория положительной частицы загибается магнитным полем к востоку, т. е. к скорости такой частицы добавляется слагающая, направленная на восток. Если, как это установлено, вдали от Солнечной системы интенсивность космических лучей изотропна в пространстве, то большая часть первичных положительных частиц, достигающих Земли, будет двигаться в направлении с запада на восток, а не в противоположном направлении. Для отрицательных частиц положение будет обратным. Из фактически наблюдаемой восточно-западной асимметрии был сделан вывод, что в *первичных космических лучах большая часть частиц заряжена положительно.*

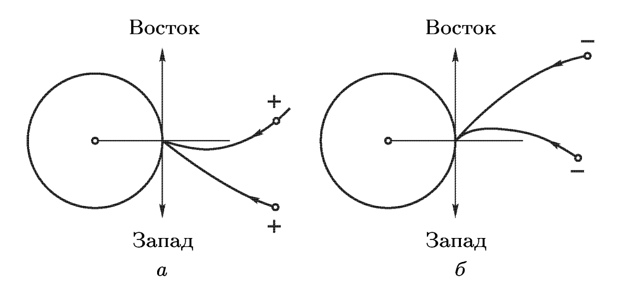


Рис. 176

Существуют и другие геомагнитные явления, о которых будет сказано ниже.

5. Исследования космических лучей производились с разнообразными детекторами в сочетании с фильтрами (из свинца, железа, углерода, парафина и пр.). Они производились на поверхности и в грунте Земли (от поверхности моря до глубин около 3 км), в верхних слоях атмосферы, в космическом пространстве около Земли и далеко за ее пределами.

Наиболее подробные данные о составе первичных космических лучей получены для частиц с энергией, большей 2,5 ГэВ на нуклон. Они получены главным образом из измерений в ядерных эмульсиях, поднимавшихся на шарах-зондах в верхние слои атмосферы. Эти данные приведены в табл. 22. В ней указаны интенсивности первичных космических лучей для различных частиц с энергией, большей 2,5 ГэВ на нуклон, т. е. число частиц заданных энергий, проходящих через единичную площадку нормально к ней, отнесенное к единице телесного угла. Если космические лучи распределены изотропно в пространстве, то для получения полного потока первичных космических частиц указанных энергий через единичную площадку приведенные данные надо умножить на π. Таким путем находим, что поток частиц около Земли у границы атмосферы равен 0,45 $с^{-1} \cdot см^{-2}$. Если учесть также все частицы с меньшими энергиями, то для полного потока первичных частиц в том же месте получится 1 $с^{-1} \cdot см^{-2}$.

Из табл. 22 видно, что в первичных космических лучах представлено больше всего протонов (92 %), затем идут α-частицы (6,6 %). Более тяжелых ядер (главным образом C, N, O) около 0,8 %. Одним из аргументов в пользу того, что тяжелые ядра принадлежат к первичным, а не к вторичным космическим лучам, может служить то обстоятельство, что заряды тяжелых ядер больше зарядов ядер атмосферных газов. Поэтому тяжелые ядра не могут возникать под действием первичных космических лучей. Средняя энергия, приходящаяся на один нуклон, приблизительно одинакова для всех ядер. Поэтому многозарядные ядра (т. е. ядра с $Z > 1$) несут заметную долю (около 1/2) полной энергии первичных космических лучей.

Наряду с протонами и ядрами в космических лучах содержится незначительное количество электронов и позитронов (около 1 %) и γ-квантов (около 0,01 % при энергиях, больших 100 МэВ). Несомненно, имеются и нейтрино, но при настоящем уровне науки нет способов их детектировать в космических лучах. Присутствие мезонов и нейтронов в первичных космических лучах исключено, поскольку эти частицы нестабильны и должны распадаться на пути к Земле.

6. В последних двух столбцах табл. 22 сравнивается среднее относительное содержание различных частиц в космических лучах с естественным содержанием их во Вселенной, полученным из данных о составе земной коры, метеоритов, атмосферы Солнца и звезд. В космических лучах значительно больше «очень тяжелых» и «самых тяжелых» ядер, чем в среднем во Вселенной. В особенности такое преобладание наблюдается для ядер группы L, в которую входят литий, бериллий

Таблица 22

Состав космических лучей с энергиями, большими 2,5 Гэв на нуклон

Группа	Частицы, входящие в группу	Заряд ядра	Средняя атомная масса	$\frac{\text{Число частиц}}{\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср}}$	Число ядер на 10 тыс. протонов	
					в космических лучах	в среднем во Вселенной
p	Протоны	1	1	1300	10 000	10 000
α	Ядра гелия	2	4	94	720	1600
L	«Легкие» ядра	3–5	10	2,0	15	10^{-4}
M	«Средние» ядра	6–9	14	6,7	52	14
H	«Тяжелые» ядра	$\geqslant 10$	31	2,0	15	6
VH	«Очень тяжелые» ядра	$\geqslant 20$	51	0,5	4	0,06
SH	«Самые тяжелые» ядра	> 30	100	$\sim 10^{-4}$	10^{-3}	$7 \cdot 10^{-5}$
e	Электроны и позитроны	1	$\frac{1}{1836}$	13	100	10 000
				1418	10 900	21 620

и бор. В космических лучах среднее относительное содержание ядер этой группы примерно в 100 тысяч раз больше, чем в среднем во Вселенной.

Аномально высокое содержание в космических лучах ядер группы L по сравнению с их средним содержанием во Вселенной делает невероятным предположение, что эти ядра имеются в достаточных количествах уже в самих источниках космических лучей. Более вероятна гипотеза, что они образуются при столкновениях тяжелых космических частиц с ядрами межзвездного газа. При таких столкновениях тяжелые ядра могут расщепляться на части (процесс *фрагментации*), в результате чего и образуются ядра группы L. Можно предположить, что это основной и даже практически единственный способ образования в космических лучах указанных ядер. Если эта гипотеза верна, то можно оценить, какой средний путь проходит космическая частица,

порожденная источником, от места ее образования до Земли — вопрос, очень важный для решения проблемы происхождения первичных космических лучей.

Для решения этого вопроса рассмотрим в космическом газе однородный параллельный пучок тяжелых космических частиц, т. е. частиц, масса которых больше массы ядер группы L. Направление распространения этого пучка примем за ось X. При выходе из источника первоначально пучок состоит только из тяжелых частиц. Из-за столкновения их с ядрами галактического газа образуются легкие ядра группы L, благодаря чему интенсивность I рассматриваемого пучка тяжелых частиц будет убывать. Допустим, что это единственный механизм убывания интенсивности пучка. Обозначим через σ среднее эффективное сечение столкновения тяжелой частицы с атомным ядром галактического газа и притом такое, при котором образуются легкие ядра группы L. Тогда процесс ослабления интенсивности $I_{\text{т}}$ потока тяжелых ядер будет описываться уравнением

$$\frac{dI_{\text{т}}}{dx} = -\sigma N I_{\text{т}},$$

где N — число атомных ядер галактического газа в единице объема. Считая для простоты это число постоянным, получим

$$I_{\text{т}} = I_{\text{т}0} e^{-\sigma N x}. \qquad (103.2)$$

Введем упрощающее предположение, что при каждом исчезновении тяжелой частицы рождается только одна легкая частица группы L. Если бы легкие частицы двигались также в направлении пучка, то образовался бы поток легких частиц с интенсивностью

$$I_{\text{л}} = I_{\text{т}0} - I_{\text{т}} = I_{\text{т}}(e^{\sigma N x} - 1).$$

Тогда отношение концентраций легких и тяжелых частиц в космических лучах было бы равно

$$\frac{n_{\text{л}}}{n_{\text{т}}} = \frac{I_{\text{л}}}{I_{\text{т}}} = e^{\sigma N x} - 1. \qquad (103.3)$$

В действительности полученное выражение справедливо независимо от введенного ранее предположения относительно направления. Только под x следует понимать длину пути, действительно проходимого космической частицей от места ее образования до места наблюдения. А этот путь может значительно отличаться от прямолинейного.

Как видно из табл. 22, $n_{\text{л}}/n_{\text{т}} = 15/(52 + 15 + 4) = 0{,}21 \approx 1/5$. Благодаря малости этого отношения можно ограничиться линейным приближением

$$\frac{n_{\text{л}}}{n_{\text{т}}} = \sigma N x, \qquad (103.4)$$

$$x = \frac{1}{\sigma N}\frac{n_{\text{л}}}{n_{\text{т}}} = \frac{1}{5}\frac{1}{\sigma N}. \qquad (103.5)$$

Допустим, что источник космических лучей находится в Галактике. Для средней концентрации газа в Галактике можно принять $N \approx 1$ см$^{-3}$, а для среднего эффективного сечения $\sigma \approx 10^{-26}$ см^2. При таких значениях получается

$$x \approx 2 \cdot 10^{25} \text{ см}.$$

Скорость космической частицы незначительно отличается от скорости света c. Поэтому время движения частицы от источника до Земли $\tau \approx (2 \cdot 10^{25}) : (3 \cdot 10^{10}) \approx 0{,}7 \cdot 10^{15}$ с $\approx 2 \cdot 10^7$ лет.

7. По-видимому, найденные значения x и τ несколько занижены. Одна из причин этого состоит в том, что Галактика имеет форму диска диаметром $D_{\text{Гал}} \approx 25$ кпс $= 7{,}7 \cdot 10^{22}$ см и толщиной 2 кпс, который окружен гало, т. е. заполненной космическим веществом сферой диаметром 30 кпс. Плотность галактического газа в гало примерно в 10 раз меньше, чем в галактическом диске. Наличие гало несколько снижает величину N и завышает значения x и τ. Наиболее вероятными считаются значения $x \approx 10^{26}$ см, $\tau \approx 10^8$ лет. Значение x примерно в 1000 раз превышает диаметр галактического диска. Это не противоречит использованному нами (но не доказанному) предположению, что источник космических лучей находится в пределах нашей Галактики. Дело в том, что космическая частица при своем движении подвергается действию хаотически меняющихся в пространстве галактических магнитных полей, искривляющих ее траекторию. Последняя не прямолинейна, а имеет довольно запутанный вид: блуждание космической частицы в Галактике напоминает броуновское движение в гигантских масштабах.

В процессе длительного блуждания космических частиц в хаотически меняющихся галактических магнитных полях стирается всякая пространственная и временная выделенность источников галактических космических лучей по отношению к Земле. С этим, по-видимому, и связана наблюдаемая высокая изотропия галактических космических лучей, т. е. однородность распределения направлений их движения в пространстве, установленная с точностью до 0,1 %. С этим же связано и высокое постоянство их интенсивности во времени. Конечно, все это справедливо, если исключить искажающее влияние магнитных полей Земли и межпланетного пространства.

Наиболее простой и надежный метод измерения магнитного поля **H** в Галактике основан на исследовании зеемановского расщепления спектральной линии водорода $\lambda = 21$ см (см. § 66, п. 4). Таким и другими способами найдено, что средняя напряженность магнитного поля в межзвездном пространстве Галактики равна около $7 \cdot 10^{-6}$ Гс. Этому соответствует средняя плотность магнитной энергии в том же пространстве $H^2/8\pi \approx 1{,}5 \cdot 10^{-12}$ эрг/см^3 $\approx 1{,}2$ эВ/см^3.

8. Распределение космических лучей по энергиям характеризуется *энергетическим спектром*, который может быть *интегральным* и *дифференциальным*. Интегральным энергетическим спектром $I(\mathscr{E})$ называется поток космических частиц, кинетическая энергия которых

превышает $\mathscr{E}$. Его производная по энергии $dI/d\mathscr{E}$, взятая по абсолютной величине, определяет дифференциальный энергетический спектр. Очевидно, это есть поток космических частиц, отнесенный к единичному интервалу энергии.

В интервале энергий 10–10^6 ГэВ интегральный энергетический спектр хорошо аппроксимируется выражением

$$I(\mathscr{E}) \propto \mathscr{E}^{-\gamma}, \tag{103.6}$$

где γ в среднем равно приблизительно 1,6 — точнее, слабо меняется от 1,4 до 1,8, как показано ниже:

Интервал изменения $\mathscr{E}$, ГэВ	10–10^4	10^4–10^6	10^6–10^9
γ	1,4–1,6	1,6–1,8	1,8–2,2

При энергиях порядка $3 \cdot 10^6$ ГэВ спектр $I(\mathscr{E})$ опускается вниз более круто, претерпевая сравнительно небольшой и плавный излом. Это, возможно, связано с тем, что частицы столь высоких энергий перестают эффективно удерживаться магнитным полем Галактики и начинают заметно уходить в метагалактическое пространство. При $\mathscr{E} \approx 3 \cdot 10^{10}$ ГэВ спектр $I(\mathscr{E})$, по-видимому, становится опять более пологим.

Частиц с энергией $\mathscr{E} \gtrsim 10^6$ ГэВ очень мало, а потому они уже не могут регистрироваться с помощью счетчиков или фотоэмульсий. Например, на площадь 1 м^2 частица с энергией $\mathscr{E} > 10^7$ ГэВ попадает в среднем только один раз в год. Такие частицы обнаруживаются только по широким атмосферным ливням (см. п. 12). Зарегистрированы частицы с энергией порядка 10^{20} эВ $= 10^{11}$ ГэВ $= 12$ Дж. Энергии такой частицы достаточно, чтобы поднять груз массой 1 кг на высоту 1 м. Однако такие частицы встречаются очень редко — на поверхность в 10 км^2 за год в среднем падает не более одной частицы с энергией 10^{20} эВ.

При уменьшении энергии $\mathscr{E}$, начиная примерно с 10 ГэВ, рост интенсивности $I(\mathscr{E})$ замедляется и практически совсем прекращается при $\mathscr{E} \lesssim 2$ ГэВ. Магнитное поле Земли приводит к тому, что при таких относительно малых энергиях протоны могут достигать поверхности Земли лишь в высоких широтах (в окрестности полюсов). Но даже и в высоких широтах столь малоэнергичные частицы часто не достигают земной поверхности из-за потерь их энергии в атмосфере. Интенсивность космических лучей при $\mathscr{E} \lesssim 2$ ГэВ нерегулярно меняется во времени, так как они подвержены сильному влиянию магнитного поля, переносимого сгустками солнечной плазмы (так называемым *солнечным ветром*). Эти космические лучи заметно повышают нормальный уровень ионизации воздуха в верхних слоях атмосферы, что делает их непроницаемыми для радиошумов, приходящих из Галактики. Они приводят также к прерыванию радиосвязи на коротких волнах в полярной зоне (см. т. IV, § 87).

9. По энергетическому спектру можно вычислить среднюю плотность энергии космических лучей в межзвездном пространстве нашей Галактики и сравнить ее с тем, что дают другие источники энергии. В плотность энергии вносят свой вклад:

Космические лучи	$1{,}6 \cdot 10^{-12}$ эрг/см^3 = 1,3 эВ/см^3,
Турбулентное движение газа	$0{,}5 \cdot 10^{-12}$ эрг/см^3 = 0,4 эВ/см^3,
Магнитное поле	$1{,}5 \cdot 10^{-12}$ эрг/см^3 = 1,25 эВ/см^3,
Полное излучение звезд	$0{,}7 \cdot 10^{-12}$ эрг/см^3 = 0,6 эВ/см^3.

Таким образом, в пределах нашей звездной системы — Галактики — полная энергия всех космических лучей сравнима с энергией звездного излучения, энергией теплового и турбулентного движения межзвездного газа, а также с энергией магнитного поля Галактики. По теореме вириала (см. § 100) средняя кинетическая энергия движения межзвездного газа равна половине его потенциальной энергии, взятой со знаком минус. Поэтому в динамике Вселенной, помимо сил тяготения, газового и светового давления, должны приниматься во внимание и сравнимые с ними силы, обусловленные движением частиц космических лучей и создаваемых ими магнитных полей.

10. Подавляющая часть первичных космических лучей приходит к Земле из окружающего галактического пространства. Но небольшая часть космических лучей, преимущественно низких энергий ($\mathcal{E} < 1$ ГэВ), приходит к Земле и от Солнца. Энергетический спектр солнечных космических лучей круто падает в области высоких энергий, так что они вносят заметный вклад только в первичные космические лучи низких энергий. Средний по времени поток энергии солнечных космических лучей у поверхности Земли составляет около $3{,}5 \cdot 10^{-4}$ эрг/(с · см^2), что в 20 раз меньше потока энергии всех космических лучей $7 \cdot 10^{-3}$ эрг/(с · см^2). Однако во время кратковременных вспышек на Солнце поток солнечных космических лучей может превысить его среднее значение в тысячи раз.

Например, 23 февраля 1956 г. на поверхности Солнца произошла сильная хромосферная вспышка, зарегистрированная на Земле. Спустя несколько минут скорость счета детекторов космических лучей на специальных станциях, расположенных в различных местах Земли, стала быстро возрастать. В течение 15–20 мин скорость счета достигла максимума, затем начала спадать, а через несколько часов снизилась до нормального уровня. Возрастание скорости счета было зарегистрировано не только в высоких широтах, но и вблизи экватора. На этом основании можно заключить, что в пришедших солнечных космических лучах должны содержаться хотя бы в относительно небольшом количестве частицы с энергиями больше 10–20 ГэВ, чтобы преодолеть вблизи экватора отталкивающее действие земного магнитного поля. В последующие годы — примерно раз в год — наблюдалось еще несколько подобных явлений, хотя и менее крупного масштаба.

Солнечные космические лучи сравнительно легко отделить от галактических, так как они появляются эпизодически — во время сильных хромосферных вспышек на Солнце. От галактических они отличаются еще составом — в них практически нет ядер легких атомов Li, Be, B, а также ядер тяжелых элементов. В целом химический состав солнечных космических лучей близок к составу атмосферы Солнца.

Солнечная активность проявляется также *в вариации интенсивности* и галактических космических лучей, приходящих на Землю. В результате «магнитных бурь» на Земле, связанных с солнечной активностью, меняется земное магнитное поле, а с ним и интенсивность космических лучей, наблюдаемых на Земле. Это явление наблюдается не только в полярных, но и в экваториальных областях Земли. Например, в период максимальной солнечной активности в 1957–1958 гг. интенсивность космических лучей с энергиями, превышающими 1 ГэВ, была почти втрое меньше, чем в последующий период минимума активности в 1964–1965 гг.

11. Затронем вопрос о происхождении космических лучей, хотя он и очень далек от окончательного решения. Солнце испускает частицы с энергиями в сотни мегаэлектронвольт. Во время солнечных вспышек в межпланетное пространство выбрасываются большие массы ионизованных газов и порождаются, хотя и в малых количествах, частицы с энергиями 10–20 ГэВ. Нельзя ли предположить, что в результате каких-то еще не известных процессов возникают в нужном количестве и частицы более высоких энергий, наблюдаемые в космических лучах? От такой гипотезы следует отказаться. Основным возражением против нее является постоянство интенсивности и изотропия направлений космических лучей в любое время дня и ночи. Главную долю наблюдаемых космических лучей составляют частицы с энергией порядка 10 ГэВ. Если бы такие частицы возникали на Солнце, то они должны были бы приходить на Землю по направлению от него и, следовательно, наблюдались бы только днем, а не ночью. Тем более это заключение относится к частицам больших энергий. Возьмем для примера протон с энергией 10^{15} эВ. Магнитная жесткость HR, вычисленная по формуле (103.1), для такого протона составит $3 \cdot 10^{12}$ Гс · см. Магнитное поле в межпланетном пространстве — порядка нескольких единиц на 10^{-5} Гс. Возьмем ориентировочно $3 \cdot 10^{-5}$ Гс. Тогда радиус кривизны траектории протона будет порядка 10^{17} см, что примерно в 6500 раз больше радиуса земной орбиты. Напряженность земного магнитного поля равна 0,5 Гс. В нем радиус кривизны меньше $6 \cdot 10^{12}$ см, но и эта величина все же в 10 000 раз больше радиуса Земли.

Можно предположить, что источниками космических лучей являются звезды. Однако такие источники не могли бы создать необходимую энергию космических лучей в Галактике, если бы они были обыкновенными нормальными звездами. Действительно, объем Галактики 10^{67} см^3, средняя плотность энергии космических лучей в Галактике $1{,}6 \cdot 10^{-12}$ эрг/см^3, а полная энергия космических лучей в ней 10^{55} эрг.

Мощность излучения солнечных космических лучей 10^{24} эрг/с. Если предположить, что со времени образования Солнца ($5 \cdot 10^9$ лет) оно излучало космические лучи равномерно, а это излучение целиком удерживалось магнитными полями в Галактике, то энергия солнечных космических лучей в объеме Галактики составляла бы 10^{40} эрг. Если бы все звезды Галактики в среднем излучали энергию космических лучей так же, как Солнце, то полная энергия космических лучей в Галактике была бы равна 10^{51} эрг, что в 10 000 раз меньше требуемой.

Поэтому естественно предположить, что основная масса космических лучей возникает при взрывах сверхновых. При взрыве сверхновой освобождается энергия, сравнимая с собственной энергией Солнца:

$$M_{\odot}c^2 = 2 \cdot 10^{33} \cdot (3 \cdot 10^{10})^2 = 1{,}8 \cdot 10^{53}\ \text{эрг}.$$

Известная часть этой энергии уносится космическими лучами. Взрывы сверхновых, по-видимому, в состоянии обеспечить необходимую плотность энергии космических лучей в Галактике.

Считается маловероятным, что основная часть космических лучей имеет метагалактическое происхождение, т. е. приходит в Солнечную систему от удаленных галактик, лежащих за пределами нашей Галактики. Космические лучи «блуждают» в Галактике, отклоняясь галактическими магнитными полями. Их движение в Галактике имеет характер диффузии. За время существования Вселенной (10^{10} лет) за пределы Галактики продиффундирует или может вступить в нее извне лишь сравнительно небольшая часть космических частиц. Это могут сделать только частицы очень высоких энергий, которые почти не отклоняются галактическими магнитными полями. Но таких частиц в Галактике и за ее пределами относительно мало. Для космических частиц, энергии которых заполняют практически весь энергетический спектр, указанные эффекты не играют существенной роли. Подавляющая часть света (за исключением света от Солнца, планет и их спутников) приходит к Земле от звезд нашей Галактики. На долю Метагалактики приходится лишь незначительная часть. По-видимому, это справедливо и для космических лучей. Если это так, то космические лучи, приходящие на Землю, в основном должны возникать в пределах нашей Галактики.

Если даже справедлива гипотеза, что источниками космических лучей являются сверхновые нашей Галактики, то еще остается открытым вопрос о механизме ускорения заряженных частиц до тех громадных энергий, которые характерны для космических лучей. Вопрос этот не может считаться решенным. Одна из гипотез была предложена Ферми, который предположил, что при взрывах сверхновых образуются протяженные намагниченные облака плазмы. Не только плазма в облаках совершает сложное турбулентное движение, но и сами облака движутся с громадными скоростями. Заряженные частицы могут сталкиваться с такими облаками и отражаться от них. Если частица движется навстречу облаку, то при отражении ее энергия увеличивается; если она движется в ту же сторону, что и облако, то энергия уменьшается. При

хаотическом движении облаков преобладают встречные столкновения, так что в среднем происходит увеличение кинетической энергии частиц.

12. До сих пор речь шла о первичных космических лучах, главным образом галактических. Теперь коротко рассмотрим *вторичные космические лучи.* Они возникают в земной атмосфере в длинной и разветвленной цепи превращений, вызываемых первичными космическими лучами. Исходным звеном такой цепи является взаимодействие космической частицы с ядрами атомов воздуха. Ядро-мишень при этом, как правило, распадается на протоны и нейтроны. Распадается и первичная частица, если она была сложной. Образующиеся при этом протоны в дальнейшем ведут себя так же, как и первичные протоны.

Количественно прохождение частицы в веществе удобно характеризовать средним пробегом ее λ до взаимодействия с ядром среды. Средний пробег λ принято выражать количеством вещества в граммах в столбе вещества площадью в 1 см^2 и высотой, равной длине пути, проходимой частицей до взаимодействия. В тех же массовых единицах удобно выражать вообще путь частицы в веществе. Ослабление интенсивности I пучка частиц в веществе при прохождении пути x выражается формулой

$$I = I_0 e^{-x/\lambda}. \tag{103.7}$$

Так, толщина земной атмосферы в этих единицах составляет около 1000 г/см^2. Для протонов $\lambda = 70$ г/см^2, для α-частиц $\lambda = 25$ г/см^2, для более тяжелых ядер λ еще меньше. Отсюда видно, что вероятность достижения частицей земной поверхности исключительно мала. Так, для протона она равна $e^{-1000/70} \sim 10^{-7}$. Из 10 миллионов первичных протонов в среднем только один достигнет земли. Небольшое количество первичных протонов можно наблюдать лишь на высоких горах. Для наблюдения более тяжелых первичных ядер уже необходимо поднимать приборы в верхние слои атмосферы или в космос.

При столкновении с ядром протон теряет в среднем 30–50 % первоначальной энергии. Основная часть первичных космических лучей со средней энергией 10 ГэВ сначала теряет энергию на рождение новых частиц при столкновении с ядрами, а затем энергия идет на ионизацию атомов воздуха. Лишь протоны с первоначальной энергией в несколько сот гигаэлектронвольт и выше могут достигнуть поверхности земли. Когда энергия первичной частицы уменьшится примерно до 100 МэВ, дальнейшее рождение новых частиц становится маловероятным.

Процесс столкновения протона с атомным ядром схематически изображен на рис. 177. В ядерном столкновении образуются заряженные пионы $\pi^{\pm}$ и нейтральный пион π^0. Образуются также пары протон-антипротон и нестабильные частицы: K-мезоны и гипероны, но основную роль в дальнейших процессах играют пионы.

Заряженные пионы, распадающиеся сравнительно медленно (за время в среднем $2{,}6 \cdot 10^{-8}$ с), успевают частично провзаимодействовать с другими ядрами воздуха и вызвать такие же ядерные процессы, как и первичные частицы. Другая часть заряженных пионов, не успев провзаимодействовать, распадается на мюоны ($\mu^{\pm}$) и нейтрино. Нейтрино,

как очень слабо взаимодействующие частицы, уходят, пронизывая не только атмосферу, но и весь земной шар. Положительный мюон μ^+ распадается по схеме $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu$, отрицательный — по схеме $\mu^- \to e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$. Время жизни мюонов порядка $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ с. За это время успевает распасться лишь небольшая часть мюонов. Поэтому они сравнительно легко проходят через атмосферу и поглощаются глубоко под землей. Здесь существенную роль играет релятивистский эффект замедления хода движущихся часов (см. т. IV, § 106, п. 4). На уровне моря мюоны составляют большую часть «проникающей компоненты» космических лучей.

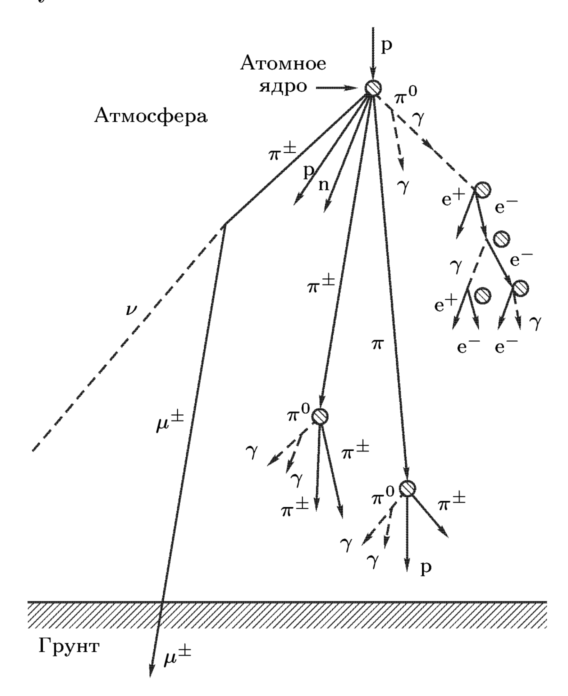


Рис. 177

Теперь проследим судьбу нейтрального пиона π^0. Среднее время жизни его очень короткое ($1{,}8 \cdot 10^{-16}$ с). Поэтому он успевает уйти лишь на ничтожное расстояние от места своего рождения и, как правило, не провзаимодействовав с ядрами атомов воздуха, распадается на два фотона высокой энергии: $\pi^0 \to \gamma + \gamma$. В поле ядра эти фотоны порождают электрон–позитронные пары. Средний пробег γ-фотона в воздухе до рождения электрон–позитронной пары $\lambda \approx 35$ г/см^2. Образовавшиеся электрон и позитрон в процессе тормозного излучения в веществе излучают новые фотоны. Энергия последних еще достаточно высока, чтобы породить новые электрон–позитронные пары. В итоге распад нейтрального пиона высокой энергии приводит к образованию

в атмосфере *электронно-фотонного каскадного ливня.* Когда энергия становится меньше 72 МэВ на частицу, главную роль начинают играть не тормозное излучение и рождение пар фотонами, а потери энергии электронов и позитронов на ионизацию, а фотонов — на комптоновское рассеяние. На этом развитие электронно-фотонного каскадного ливня прекращается.

В развитие электронно-фотонного каскадного ливня вносят некоторый вклад нейтральные пионы, образующиеся при распаде других нестабильных частиц — K-мезонов и гиперонов, а также электроны, образующиеся при распаде мюонов.

При энергиях первичной частицы 10^{14}–10^{15} ГэВ и выше каскад, сопровождающийся развитием электронно-фотонных лавин, получил название *широкого атмосферного ливня.* Развитие такого ливня начинается на высоте 20–25 км над уровнем моря. Общее число частиц в широком атмосферном ливне достигает многих миллионов. На уровне моря частицы ливня покрывают площадь до нескольких квадратных километров. Огромное число частиц в ливне позволяет его обнаруживать и изучать с помощью сравнительно небольшого количества счетчиков, размещенных на большой площади. Одновременное срабатывание счетчиков свидетельствует о прохождении широкого атмосферного ливня вторичных частиц, но лишь малая доля их фиксируется счетчиками. В первом приближении можно считать, что на каждую заряженную частицу (в основном электрон и позитрон) приходится 2–3 ГэВ энергии первичной частицы. Подсчет общего числа заряженных частиц в ливне позволяет достаточно точно оценить энергию первичной частицы, вызвавшей ливень. Никакими другими способами это сделать невозможно.

Глава XVI
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

§ 104. Что такое элементарные частицы

1. В общем курсе о физике элементарных частиц можно дать только предварительные представления. Это касается как экспериментальных методов, так в особенности и теоретических представлений. Этому разделу науки посвящены специальные курсы, в которых излагается как предмет в целом, так и его отдельные части. Наше весьма неполное изложение носит описательный информационный характер и, как правило, не затрагивает теоретические основы изучаемых закономерностей.

Отметим с самого начала, что в физике элементарных частиц вводится ряд понятий с весьма экзотическими названиями: *странность*, *очарование*, *красота* (или *прелесть*), *цвет* и пр. Все эти термины не имеют никакого отношения к тому, в каком смысле они употребляются в обыденной жизни. Это просто какие-то *квантовые числа*, вводимые для описания характеристик элементарных частиц.

2. При введении понятия *элементарных частиц* первоначально предполагалось, что это есть *первичные*, далее *неделимые частицы*, из которых состоит вся материя. Таковыми вплоть до начала XX века считались атомы (слово «атом» в переводе с греческого означает «неделимый»). После того как была установлена сложная структура атомов, они перестали считаться элементарными частицами в указанном смысле слова. Такая же судьба постигла ядро, а затем протон и нейтрон, у которых была установлена внутренняя структура. Открывались новые и новые объекты (*мюоны*, *пионы*, *нейтрино* и пр.), которые могли претендовать на роль элементарных частиц. Для большинства из них эти претензии были отклонены очень быстро. Но и в настоящее время мы с достоверностью не знаем, какие частицы являются действительно элементарными и есть ли вообще элементарные частицы в первоначальном смысле этого слова. *Элементарными частицами сейчас условно называют большую группу мельчайших микрочастиц, не являющихся атомами или атомными ядрами* (за исключением протонов — ядер атома водорода). Общее, что роднит все элементарные частицы, состоит в том, что все они являются специфическими формами материи, не ассоциированной в атомы и атомные ядра.

В настоящее время к «истинно» элементарным принято относить следующие частицы (и их античастицы): 1) *лептоны* (e, μ, τ и соответствующие им *нейтрино*); 2) *кварки*; 3) *фотоны* и *промежуточные бозоны* $W^{\pm}$, Z^0. Необходимо, однако, заметить, что существуют гипотезы (основанные на наблюдаемой на опыте симметрии между кварками

и лептонами в электромагнитных взаимодействиях, а также на идеях Великого объединения сил) о том, что кварки и лептоны сами состоят из более фундаментальных частиц — «преонов». То же относится к $\mathrm{W}^{\pm}$-, Z^0-бозонам (у которых предполагается существование дискретных возбужденных состояний). Если разности энергетических уровней велики по сравнению с энергиями, воздействующими на систему, то последняя ведет себя как целая — как элементарная частица.

3. Естественным источником различных частиц высоких энергий являются космические лучи. Не случайно поэтому, что до начала 50-х годов физика элементарных частиц была тесно связана с изучением космических лучей. В настоящее время источниками заряженных частиц высоких энергий являются в основном ускорители. Они в комбинации с детекторами позволяют исследовать процессы, в которых образуются и взаимодействуют различные элементарные частицы в лучших контролируемых условиях. Понятно, почему физику элементарных частиц называют также *физикой высоких энергий.*

Для осуществления взаимодействия на очень малых расстояниях частицы должны обладать очень высокими энергиями. Но в ультрарелятивистской области полная энергия частицы связана с ее импульсом соотношением $\mathscr{E} = pc$, так что соотношение неопределенностей $\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar$ принимает вид

$$\Delta\mathscr{E} \cdot \Delta x \gtrsim \hbar c/2, \tag{104.1}$$

или

$$\Delta\mathscr{E} \gtrsim 10^{-14}/\Delta x, \tag{104.2}$$

если энергию выражать в гигаэлектронвольтах, а расстояние Δx — в сантиметрах. Из формулы видно, что для проникновения на расстояние 10^{-16} см требуется энергия, превышающая примерно 100 ГэВ. Именно энергия такого порядка потребовалась, например, для получения промежуточных векторных бозонов $\mathrm{W}^{\pm}$ и Z^0.

4. Наиболее характерным свойством элементарных частиц, связанным по современным представлениям с корпускулярно-волновым дуализмом, является их *способность рождаться и взаимопревращаться друг в друга* при столкновениях. При этом полная (релятивистская) энергия сохраняется, т. е. полная энергия всех частиц до столкновения равна полной энергии всех частиц после столкновения. Например, при столкновении движущегося протона с неподвижным протоном может происходить реакция

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \mathrm{p} + \mathrm{p} + \pi^0,$$

в которой возникает нейтральный пион. Каково необходимое (но недостаточное) условие возможности такой реакции? Масса пиона равна 135 МэВ. Поэтому для осуществления этой реакции кинетическая энергия налетающего протона во всяком случае должна быть не меньше 135 МэВ. На самом деле она должна быть не меньше 290 МэВ, так как в соответствии с законом сохранения импульса часть энергии уносится

системой в ее поступательном движении и не участвует в реакции (см. задачу 3 к § 108).

Вторая характерная черта элементарных частиц состоит в том, что подавляющая часть их *нестабильна.* Частицы самопроизвольно распадаются. Среднее время жизни τ частицы в свободном состоянии меняется в широких пределах — от 10^{-24} с до бесконечности (для протона, например, экспериментально установлено, что $\tau > 10^{32}$ лет).

Распад элементарных частиц и их взаимопревращаемость друг в друга ставят под сомнение сам смысл вопроса: «Из чего состоит частица?» Например, при распаде нейтрона ($\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$) возникают новые частицы: протон, электрон и антинейтрино. Но это не означает, что нейтрон состоит из таких частиц. На опыте констатируется только, что эти частицы *рождаются* в результате распада нейтрона. Нейтрон в той же мере элементарен, что и протон. Новые частицы могут рождаться и при распадах и взаимодействиях других частиц. Частицу можно считать сложной, построенной из нескольких других частиц в том случае, когда энергия связи каждой из составляющих частиц много меньше ее энергии покоя. Именно в таком смысле надо понимать утверждение, что атомное ядро состоит из протонов и нейтронов.

5. В § 63 (п. 9) уже говорилось, что все процессы и явления в природе осуществляются в результате четырех взаимодействий: *сильных*, *электромагнитных*, *слабых* и *гравитационных.* Сравнение интенсивностей этих взаимодействий приобретает определенный смысл только тогда, когда точно указаны условия, при которых происходит сравнение. В § 63 проводилось сравнение при условии, что средние кинетические энергии сталкивающихся частиц порядка 1 ГэВ.

Сильное взаимодействие вызывают процессы, протекающие наиболее быстро по сравнению с другими процессами. Оно обеспечивает и самую сильную связь элементарных частиц. В частности, связь между нуклонами в атомных ядрах обусловлена сильным взаимодействием. Им объясняется исключительная прочность атомных ядер, лежащая в основе стабильности вещества в земных условиях.

Электромагнитное взаимодействие сводится к взаимодействию электрических зарядов (и магнитных моментов) частиц с электромагнитным полем. Процессы, связанные с электромагнитным взаимодействием, протекают значительно менее быстро, чем процессы, вызываемые сильным взаимодействием. Электромагнитное взаимодействие обеспечивает связь электронов в атомах, ионов в кристаллах, атомов в молекулах. Электромагнитное взаимодействие (наряду с тяготением) играет основную роль в окружающем нас макроскопическом мире. Это связано с тем, что радиус действия сильных взаимодействий порядка 10^{-13} см и на больших расстояниях сильное взаимодействие фактически исчезает. Электромагнитное же взаимодействие (и тяготение) характеризуется бесконечным радиусом действия.

Слабое взаимодействие, как показывает само название его, вызывает очень медленно протекающие процессы с элементарными частицами. Хорошей иллюстрацией этого может служить исключительная слабость взаимодействия нейтрино низких энергий с веществом (см. § 74).

Ведь нейтрино свойственно одно только слабое взаимодействие. Со слабым взаимодействием связана также относительная медленность распада квазистабильных частиц. Время жизни большинства этих частиц лежит в диапазоне 10^{-8}–10^{-13} с, тогда как время жизни сильно взаимодействующих частиц составляет 10^{-23}–10^{-24} с. Интенсивность слабого взаимодействия растет с энергией (в системе центра масс). При $\mathscr{E} \sim M_{\mathrm{W}}$ слабое взаимодействие сравнивается с электромагнитным.

Гравитационное взаимодействие доминирует в случае больших макроскопических масс (планет, звезд). Но в мире элементарных частиц, ввиду малости их масс, даже на самых малых характерных для них расстояниях порядка 10^{-13} см это взаимодействие ничтожно. В физике элементарных частиц при современном ее состоянии гравитационное взаимодействие не учитывается. Оно, возможно, существенно лишь на расстояниях порядка 10^{-33} см.

§ 105. Классификация элементарных частиц

1. Все частицы (в том числе и неэлементарные частицы и квазичастицы) разделяются на *бозоны* и *фермионы*. Бозонами (или *бозе-частицами*) называются частицы или квазичастицы, обладающие нулевым или целочисленным спином. Бозоны подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна (отсюда и происходит их название). К бозонам относятся: гипотетический *гравитон* (спин 2), *фотон* (спин 1), *промежуточные векторные бозоны* (спин 1), *глюоны* (спин 1), *мезоны* и *мезонные резонансы*, а также *античастицы* всех перечисленных частиц. Частицы или квазичастицы с полуцелым спином называются *фермионами* (или *ферми-частицами*). Для них справедлив принцип Паули, и они подчиняются статистике Ферми–Дирака (отсюда и происходит их название). К фермионам относятся: *лептоны*, все *барионы* и *барионные резонансы*, *кварки* (спин 1/2), а также соответствующие *античастицы*.

2. По времени жизни τ различают *стабильные*, *квазистабильные* и *резонансные частицы*. Последние для краткости называют просто *резонансами*. Резонансными называют частицы, распадающиеся за счет сильного взаимодействия с временем жизни 10^{-23} с. Нестабильные частицы, время жизни которых превышает 10^{-20} с, распадаются за счет электромагнитного или слабого, но не за счет сильного взаимодействия. Эти частицы относят к квазистационарным. Время 10^{-20} с, ничтожное в обыденных масштабах, должно считаться большим, если его сравнивать с ядерным временем. Последнее есть время, требующееся свету на прохождение диаметра ядра (10^{-13} см). Даже за время 10^{-20} с свет успевает пробежать расстояние в 10^3–10^4 нуклонных диаметров. За это время может совершиться еще много внутринуклонных процессов. Вот почему частицы, названные нами квазистабильными, в справочниках называют просто стабильными. Впрочем, абсолютно стабильными частицами являются, по-видимому, только фотон γ, электрон e^-, протон p(?), электронное ν_{e}, мюонное ν_μ и таонное ν_τ нейтрино и их античастицы — распад всех этих частиц на опыте не зарегистрирован.

Распады могут происходить по сильному, электромагнитному и слабому взаимодействиям. Наиболее быстро происходят распады по сильному взаимодействию — таковы распады резонансов. Квазистабильные частицы распадаются за счет слабого или электромагнитного взаимодействия. Они стали бы абсолютно устойчивыми, если бы можно было мысленно «выключить» эти взаимодействия, оставив только сильное. Наиболее стабильными резонансами являются частицы J/ψ и Υ, для которых $\tau \approx 10^{-20}$ с. Они относятся к резонансам потому, что у них имеются каналы распада, обусловленные сильным взаимодействием, но эти распады подавлены законами сохранения *очарования* и *красоты* при сильных взаимодействиях (см. § 110, пп. 4, 5).

В силу малости времени жизни τ, резонансы не обладают определенной массой. Это видно из соотношения неопределенностей $\Delta\mathscr{E} \cdot \tau \approx \hbar$. Резонансы описываются непрерывным спектром масс. Положение максимума этого спектра и называется массой резонанса. Ширина спектра Γ определяется обычным соотношением $\Gamma \approx \hbar/\tau$. При очень малых временах жизни она бывает сравнима со значением самой массы резонанса. Именно ширина Γ (а не τ) обычно и приводится в таблицах в качестве меры нестабильности резонанса. Так, при $\tau \approx 10^{-23}$ с получаем $\Gamma \approx 100$ МэВ. Поэтому резонансами можно назвать частицы с большой шириной спектра масс $\Gamma \approx 100$ МэВ.

3. Особую группу элементарных частиц составляют фотоны, являющиеся *переносчиками электромагнитного взаимодействия*, и родственные им $W^{\pm}$-, Z^0-*бозоны*, являющиеся *переносчиками слабого взаимодействия.* Эти четыре частицы образуют группу так называемых *переносчиков взаимодействия.* К переносчикам взаимодействия относятся и *глюоны*, а также гипотетические *гравитоны.* Все остальные частицы разделяются на *лептоны* и *адроны.*

Лептонами называются частицы, не участвующие в сильных взаимодействиях и имеющие спин 1/2. В настоящее время установлено существование шести заряженных лептонов: *электрон* e^-, *позитрон* e^+, *мюоны* $\mu^{\pm}$, *тяжелые лептоны* $\tau^{\pm}$ (*таоны*), и соответствующих им шести нейтральных частиц: *электронное нейтрино* ν_e и *антинейтрино* $\overline{\nu}_e$, *мюонное нейтрино* ν_μ и *антинейтрино* $\overline{\nu}_\mu$, таонное нейтрино ν_τ и *антинейтрино* $\overline{\nu}_\tau$. Нейтральные лептоны (нейтрино) не участвуют и в электромагнитных взаимодействиях.

Все лептоны, на современном уровне знания, можно назвать *истинно элементарными частицами*, так как у них в отличие от адронов не обнаружена внутренняя структура. В этом смысле лептоны называются *точечными частицами.*

Мюоны были открыты в космических лучах Андерсоном вместе с Неддермайером в 1937 г. Наличие у мюонов собственного (мюонного) нейтрино было установлено позже — только в начале 60-х годов. τ-лептоны были открыты в 1975 г. в Стэнфорде (США) группой экспериментаторов во главе с Перлом (р. 1927) в опытах со встречными электрон–позитронными пучками. Тау-лептон получается в результате аннигиляции электрона и позитрона ($e^+ + e^- \to \tau^+ + \tau^-$). Масса мюона

$m_\mu = 105{,}7$ МэВ, время жизни $\tau = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ с, масса таона $m_\tau \sim$ $\sim 1{,}8$ ГэВ, время жизни $\tau_\tau \sim 5 \cdot 10^{-13}$ с.

Наши сведения о нейтрино очень неполные (см. § 74, п. 11). Особенно это касается μ- и τ-нейтрино. Даже в отношении электронного нейтрино нельзя категорически утверждать, равна ли масса этой частицы нулю или только очень мала.

4. Адронами называются элементарные частицы, участвующие в сильных взаимодействиях. Они, как правило, участвуют также и во всех других взаимодействиях — электромагнитном и слабом.

Эти частицы, в основном резонансы, составляют наиболее многочисленную группу элементарных частиц — их насчитывается около 400. Адроны подразделяются на *стабильные* и *квазистабильные адроны* и *резонансы.* В свою очередь стабильные адроны подразделяются на *мезоны* и *барионы.* Теоретические мотивы такого подразделения выяснятся в § 110 (в кварковой модели). В группу резонансов входят мезонные и барионные резонансы.

Мезонами называются нестабильные заряженные или нейтральные адроны, обладающие нулевым или целочисленным спином, а потому принадлежащие к классу бозонов. Сюда относятся π^0- и $\pi^\pm$-мезоны, $K^\pm$-мезоны. Эти мезоны были открыты раньше других. Масса их — промежуточная между массами электрона и протона (отсюда и происходит их название — от греческого слова mesos, что означает «средний, промежуточный»). Позднее были открыты более тяжелые $\mathrm{D}^\pm$-, D^0-, $\mathrm{F}^\pm$-мезоны, масса которых больше массы протона. Было открыто также много мезонных резонансов, т. е. мезонов с временами жизни порядка 10^{-23} с. Масса некоторых из них также превосходит массу протона. Мюоны μ первоначально назывались μ-мезонами, но они не относятся к классу мезонов, так как имеют спин $1/2$ и не участвуют в сильных взаимодействиях.

Барионами и барионными резонансами называются адроны с полуцелым спином и массами, не меньшими массы протона. К ним относятся *нуклоны* (*протоны* и *нейтроны*), *гипероны* и др. Протон и нейтрон — самые легкие барионы. Протон — единственный стабильный барион (см., впрочем, § 108, п. 4), все остальные барионные резонансы нестабильны и путем последовательных распадов превращаются в нуклоны и легкие частицы: π-*мезоны*, *электроны*, *нейтрино*, γ-*кванты.* (Нейтрон в свободном состоянии — нестабильная частица со временем жизни ~ 16 мин, но в связанном состоянии внутри ядра он стабилен, если ${}^A_Z M < {}_{Z+1}^{\;\;A} M + m_\mathrm{e}$, т. е. когда не происходит β^--распада. Если же ${}^A_Z M > {}_{Z-1}^{\;\;A} M + m_\mathrm{e}$, то нестабилен протон и происходит позитронный β^+-распад: $\mathrm{p} \to \mathrm{n} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$.)

Нестабильные барионы с массами, бо́льшими массы нуклона (протона и нейтрона), и бо́льшим временем жизни по сравнению с ядерным временем (порядка 10^{-23} с) называются *гиперонами.* Первые гипероны (Λ) были открыты в космических лучах. Детальное изучение их стало возможным после того, как их стали получать на ускорителях заряженных частиц высоких энергий при столкновениях быстрых нуклонов, π-

и K-мезонов с нуклонами атомных ядер. Известно несколько типов гиперонов: *лямбда* (Λ^0), *сигма* ($\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+$), *кси* ($\Xi^-, \Xi^0$), *омега* ($Q^-$), Λ_c. Все гипероны имеют спин $1/2$, за исключением гиперона Ω^-, спин которого равен $3/2$. Таким образом, гипероны, как и все барионы, являются фермионами. Время жизни гиперонов $\tau \sim 10^{-10}$ с (за исключением Σ^0 и Λ^0 и Λ_c, для которых τ равно 10^{-19} и 10^{-13} с соответственно). За это время они распадаются на нуклоны и легкие частицы (π-мезоны, электроны, нейтрино, γ-кванты).

В 70-х годах на больших ускорителях были созданы пучки заряженных и нейтральных гиперонов высоких энергий (20–100 ГэВ). Это позволило проверить формулу для релятивистского замедления времени в лучших условиях по сравнению с тем, как это делалось раньше (см. т. IV, § 106, пп. 4, 5). Если бы не было релятивистского замедления времени, то гипероны от своего рождения до распада пробегали бы путь порядка $c\tau$, т. е. порядка сантиметра или десятков сантиметров. На самом деле этот путь достигает нескольких метров.

Детализация классификации элементарных частиц будет произведена в следующих параграфах по мере надобности. Отличительные признаки лептонов, мезонов и барионов станут более ясными, если при классификации частиц исходить из кварковой модели (см. § 110).

§ 106. Античастицы

1. В микромире каждой *частице* соответствует *античастица.* В некоторых случаях частица совпадает со своей античастицей, т. е. все свойства частицы и античастицы тождественны. В таком случае элементарные частицы называют *истинно нейтральными частицами.* К ним относятся *фотон* γ, π^0-мезон, η^0-мезон, J/ψ-мезон, *ипсилон-частица* Υ. Если же частица и античастица не совпадают, то массы, спины, изотопические спины, времена жизни у частицы и античастицы одинаковы, а прочие характеристики (электрический заряд, магнитный момент, лептонные и барионные заряды, странность, очарование, красота) одинаковы по абсолютной величине, но противоположны по знаку. (Встречающиеся здесь термины будут определены в следующих параграфах.) Так, электрон и протон отличаются от позитрона (антиэлектрона) и антипротона прежде всего знаком электрического заряда. Нейтрон отличается от антинейтрона знаком магнитного момента. Лептонные заряды у лептонов и антилептонов, барионные заряды у барионов и антибарионов противоположны по знаку.

Понятия частицы и античастицы относительны. Что назвать частицей и что античастицей — это вопрос соглашения. Электрон считают частицей, а позитрон — античастицей только потому, что в нашей Вселенной преобладают именно электроны, а позитроны являются более экзотическими объектами. Но, в принципе, с равным успехом частицей можно было бы назвать позитрон, а электрон — античастицей.

2. Первая античастица — *позитрон* (антиэлектрон) была предсказана теоретически Дираком в 1931 г. и обнаружена в 1932 г. Андерсоном (р. 1905). Дирак исходил из предложенного им релятивистского волнового уравнения и принципа Паули. Рассмотрение его теории, по существу, далеко выходит за рамки нашего курса, и мы не будем ее касаться. Отметим только, что теория Дирака в вопросе о частицах и античастицах, во всяком случае, недостаточна. Это видно уже из того, что она построена для электрона, а он имеет спин $1/2$ и относится к фермионам. Античастицами же обладают не только фермионы, но и бозоны. Существование античастиц является более фундаментальным фактом, чем думали сначала. Современная квантовая теория поля решает этот вопрос, но на этом мы останавливаться не можем.

Андерсон открыл позитрон в составе космических лучей, фотографируя следы космических частиц в камере Вильсона. След позитрона был похож на след электрона, но в магнитном поле он загибался в противоположную сторону. Это свидетельствовало о положительном знаке заряда наблюдаемой частицы. О направлении полета частицы можно было судить по увеличению кривизны следа при ее движении. Для того чтобы усилить этот эффект, Андерсон ставил на пути позитрона свинцовую пластинку, проходя через которую позитрон тормозился, и уменьшение радиуса кривизны его следа становилось более значительным. По кривизне следа Андерсон вычислил энергию частицы. Если бы это был протон, то его пробег при установленном Андерсоном значении энергии был бы примерно в 10 раз меньше наблюдаемого в действительности. Это означало, что масса открытой положительно заряженной частицы была меньше массы протона.

В 1933 г. вскоре после открытия Андерсона Блэккет (1897–1974) и Оккиалини (р. 1907) открыли *электронно-позитронные ливни* в космических лучах. Они пользовались камерой Вильсона, управляемой посредством счетчиков. Камера помещалась между двумя счетчиками и срабатывала только тогда, когда через оба счетчика одновременно пролетала ионизующая заряженная частица. В этот момент и производилось фотографирование. Измеряя кривизну треков, исследователи также пришли к заключению о существовании позитрона.

3. В вакууме при отсутствии вещества *позитрон столь же стабилен, что и электрон.* Однако при встрече электрона с позитроном эти частицы «аннигилируют», т. е. превращаются в два, три или несколько квантов излучения. Один γ-квант излучиться не может, так как в этом случае нарушился бы закон сохранения импульса. Это очевидно, если рассмотреть процесс в системе центра масс и принять во внимание, что число излученных γ-квантов от выбора системы отсчета не зависит. Значит, и в любой системе отсчета один γ-квант излучиться не может.

Существует обратный процесс: γ-квант может породить *пару* e^+e^-. Для этого необходимо, чтобы энергия γ-кванта была не меньше собственной энергии пары $2m_e c^2$. Этот процесс может происходить только в присутствии *третьего тела*, например атомного ядра, иначе нарушился бы закон сохранения импульса. Действительно, в системе центра масс образовавшейся пары импульс пары был бы равен нулю,

тогда как импульс породившего ее γ-кванта отличен от нуля. При наличии атомного ядра импульс γ-кванта будет восприниматься ядром. В произвольной же системе отсчета импульс исчезнувшего кванта распределится между тремя частицами: атомным ядром, электроном и позитроном. Нарушения закона сохранения импульса не произойдет.

Позитроны могут появляться также в позитронной радиоактивности и в других процессах превращения ядерных и элементарных частиц. Образование пар e^+e^- γ-квантами высоких энергий и позитронная радиоактивность служат основными процессами для получения позитронов.

При столкновениях медленных позитронов с атомами вещества позитроны могут захватывать электроны из атомной оболочки. В результате образуется связанная система из электрона и позитрона, называемая *позитронием.* Различают *ортопозитроний* (когда спины e^+ и e^- направлены параллельно) и *парапозитроний* (когда спины направлены противоположно). Позитроний — нестабильная частица, так как позитрон и электрон быстро аннигилируют с образованием γ-квантов. Парапозитроний аннигилирует в два γ-кванта за время $1{,}25 \cdot 10^{-10}$ с, а ортопозитроний — в три γ-кванта за время $1{,}4 \cdot 10^{-7}$ с. Позитроний — простейшая система, связанная чисто электромагнитными силами (без участия сильных взаимодействий). Поэтому изучение позитрония представляет особый интерес для проверки квантовой электродинамики.

4. В 1955 г. на ускорителе протонов в Беркли (максимальная энергия 6,3 ГэВ) группой американских физиков были открыты *антипротоны.* Согласно закону сохранения барионного заряда (см. § 108) антипротон может образоваться только в паре с протоном (или нейтроном, если позволяет закон сохранения электрического заряда). Антипротоны получались при столкновениях ускоренных протонов с протонами же, входящими в состав ядер медной мишени. Пороговая энергия протонов (в лабораторной системе отсчета, где мишень покоится) равна 5,6 ГэВ (см. § 107, п. 4). Система отклоняющих магнитов отбирала отрицательно заряженные частицы, подавляющее большинство которых составляли π^--мезоны. Выделение антипротонов на подавляющем фоне π^--мезонов и представляло главную трудность эксперимента (например, при энергии 6,2 ГэВ на 62 000 π^--мезонов приходился один антипротон). Массы частиц определялись измерением их импульса (по отклонению в магнитном поле) и скорости. Последняя определялась двумя независимыми способами: по времени пролета между двумя люминесцентными счетчиками и счетчиками Черенкова. Черенковский счетчик был отъюстирован так, что он регистрировал только частицы со скоростями, равными скорости антипротонов, а более быстрые π-мезоны не регистрировал. На современных ускорителях получаются пучки антипротонов, содержащие до 10^6 частиц в пучке.

Через год после открытия антипротона был получен и *антинейтрон.* Антинейтроны получались перезарядкой антипротонов, т. е. в результате реакции

$$\overline{\mathrm{p}} + \mathrm{p} \to \mathrm{n} + \overline{\mathrm{n}}. \qquad (106.1)$$

Появление антинейтрона обнаруживалось наблюдением его аннигиляции с нуклонами. Будучи нейтральным, антинейтрон не ионизует атомы вещества, через которое он пролетает. По этой причине антинейтрон не оставляет следа в детекторе. Однако при аннигиляции антинейтрона возникает несколько заряженных частиц, следы которых выходят из одной точки (звезда).

5. Поскольку позитрон и антипротон так же стабильны, как и соответствующие им частицы, наряду с обычным веществом физика допускает существование и *антивещества.* Ядра атомов антивещества построены из антипротонов и антинейтронов. Их оболочки состоят из позитронов. Первое *антиядро — антидейтрон* $\overline{d}$ — было получено в 1965 г. в ускорителе группой американских физиков под руководством Ледермана (р. 1922). В 1969 г. на ускорителе в Серпухове (76 ГэВ) под руководством Ю. Д. Прокошкина (р. 1929) было зарегистрировано ядро антигелия $^3\overline{\mathrm{He}}$, состоявшее из двух антипротонов и одного антинейтрона. В 1974 г. там же было получено ядро *антитрития* $^3\overline{\mathrm{H}}$. Оно состоит из одного антипротона и двух антинейтронов. Во Вселенной антивещество астрономами не обнаружено. Не исключено, что во Вселенной антивещества и нет. (В первичных космических лучах число регистрируемых антипротонов примерно в 10^3–10^4 раз меньше числа протонов.) Причину такой асимметрии, если она существует, надо искать в происхождении и эволюции Вселенной.

Аннигилируют не только электрон с позитроном, но и всякая частица со своей античастицей. Однако при аннигиляции тяжелых частиц и античастиц возникают не столько γ-кванты, сколько другие легкие частицы. Причина этого в том, что аннигиляция позитрона с электроном происходит в результате *электромагнитного взаимодействия*, тогда как аннигиляция более тяжелых частиц и античастиц, являющихся адронами, вызывается *сильным взаимодействием.* Так, при аннигиляции протона с антипротоном доля появляющихся γ-квантов ничтожна по сравнению с долей π-мезонов. Аннигиляция же с испусканием нескольких (больше двух) π-мезонов более вероятна, чем двухмезонная. Среднее число всех π-мезонов (заряженных и нейтральных), появляющихся при аннигиляции одного медленного протона с одним антипротоном, равно приблизительно 4,8, а одних заряженных — 3,1.

§ 107. Законы сохранения энергии и импульса и их приложения

1. Законы сохранения в физике элементарных частиц играют значительно бо́льшую роль, чем в макроскопической физике. Нам известны точные динамические законы, управляющие макроскопическими явлениями более детально, чем законы сохранения. Правда, и в макроскопической физике часто можно более быстро получить ответ с помощью одних только законов сохранения, не вникая в механизм явления. Но сами законы сохранения в макроскопической физике являются следствиями

динамических законов, так что здесь в принципе можно обойтись и без законов сохранения.

Иное положение в физике элементарных частиц. Здесь не существует сколько-нибудь законченной теории, тогда как законы сохранения хорошо соблюдаются. Некоторые из них встречаются и в макроскопической физике, но большинство являются новыми. Кроме того, в микромире законы сохранения приобретают новую особенность, не свойственную аналогичным законам в макромире. В макроскопической области явление может и не происходить, если оно даже удовлетворяет всем законам сохранения. Например, если на пути шара, катящегося по горизонтальной плоскости, поставить достаточно высокий барьер, для преодоления которого энергии шара недостаточно, то по классическим законам шар не может оказаться по другую сторону барьера, хотя это и не противоречит закону сохранения энергии и другим законам сохранения. Подобных барьерных запретов не существует в области микромира, поскольку там действуют квантовые законы (см. § 28, с. 163). *В микромире все явления должны происходить обязательно, если только они удовлетворяют всем законам сохранения.* Вероятность явления может быть очень мала, но оно рано или поздно произойдет, если только при этом будут соблюдены все законы сохранения.

2. Как можно считать сейчас установленным, каждый закон сохранения связан с какой-либо *симметрией законов природы*, хотя и не для всех законов эта симметрия выяснена. Так, в основе законов сохранения энергии $\mathscr{E}$, импульса $\mathbf{p}$ и момента импульса $\mathbf{M}$ лежат соответственно *однородность времени*, *однородность* и *изотропия пространства.* Разумеется, сами по себе пространство и время еще не включают понятий о различных физических величинах. Об этом уже говорилось в томе I. Сейчас же, предполагая, что изучающий ядерную физику уже успел ознакомиться с аналитической механикой, добавим, что перечисленные свойства пространства и времени в классической механике надо понимать в смысле *инвариантности функции Лагранжа* (или *Гамильтона*) относительно изменения начала отсчета времени, переноса начала координат и поворота координатных осей.

Аналогично обстоит дело и в квантовой механике, но на этом вопросе мы не будем останавливаться.

К точным законам сохранения, выполняющимся при любых взаимодействиях, относятся законы *сохранения энергии*, *импульса*, *момента импульса*, *электрического заряда*, *барионного заряда* и трех *лептонных зарядов.* Остальные законы сохранения: *странности*, *очарования*, *красоты*, *изотопического спина* и некоторые другие являются приближенными и выполняются не при всех взаимодействиях. Впрочем, следует заметить, что сохранение барионного и лептонного зарядов является эмпирическим законом и не имеет столь глубоких оснований, как сохранение $\mathscr{E}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{M}$. Поиски явлений с нарушением барионного и лептонного зарядов — одно из важнейших направлений современных экспериментальных исследований (см. § 108, пп. 3, 4).

3. Рассмотрим в этом параграфе важнейшие законы сохранения энергии и импульса и некоторые их применения.

В физике элементарных частиц помимо энергии покоя энергия встречается только в двух формах: *кинетической* и *потенциальной.* Полная энергия $\mathscr{E}$ равна их сумме и связана с релятивистской массой системы соотношением $\mathscr{E} = m_{\text{рел}}c^2$. В этом разделе физики принято пользоваться системой единиц, в которой скорость света c принимается за единицу (постоянная $\hbar$ также принимается равной единице). Тогда полная энергия частицы $\mathscr{E} = m_{\text{рел}}c^2 = m_{\text{рел}}$, а квадрат четырехмерного вектора энергии — импульса принимает вид

$$\mathscr{E}^2 - P^2 = m^2, \tag{107.1}$$

где под m понимается *масса покоя* частицы, часто называемая также *инвариантной массой* (обозначение m_0 не применяется; полная масса обозначена через $m_{\text{рел}}$). Таким образом, энергия, масса и импульс в указанной системе единиц имеют *одинаковую размерность.* Их единицей обычно служит гигаэлектронвольт.

4. С помощью законов сохранения энергии и импульса можно определять *энергетический порог* той или иной реакции между частицами. Рассчитаем, например, порог рождения антипротона в реакции столкновения двух протонов:

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{p} + \overline{\mathrm{p}}. \tag{107.2}$$

Один из протонов (мишень) покоится, другой налетает на него. Требуется определить минимальную энергию налетающего протона, чтобы эта реакция стала возможной. Таким образом, реакция рассматривается в лабораторной системе отсчета.

Перейдем на мгновение в систему центра масс. Тогда протоны перед столкновением будут двигаться навстречу друг другу, так что их суммарный импульс будет равен нулю. Очевидно, необходимая минимальная энергия получится тогда, когда все четыре частицы после реакции будут находиться в состоянии покоя.

Теперь можно вернуться в лабораторную систему отсчета. В ней все четыре частицы будут двигаться с одной и той же скоростью, а следовательно, и с одним и тем же импульсом (так как массы частицы и античастицы одинаковы). Пусть кинетическая энергия налетающего протона равна $\mathscr{E}$, а, следовательно, полная энергия системы до столкновения равна $\mathscr{E} + 2m_{\mathrm{p}}$. Импульс налетающего протона $\mathbf{P}$ равен импульсу всей системы до, а следовательно, и после столкновения. Но после столкновения получается система четырех частиц, полная инвариантная масса которой равна $4m_{\mathrm{p}}$. Следовательно, на основании формулы (107.1)

$$(\mathscr{E} + 2m_{\mathrm{p}})^2 - P^2 = \text{Инв} = (4m_{\mathrm{p}})^2.$$

На основании той же формулы для налетающего протона

$$(\mathscr{E} + m_{\mathrm{p}})^2 - P^2 = \text{Инв} = m_{\mathrm{p}}^2,$$

откуда $P^2 = \mathscr{E}^2 + 2\mathscr{E}m_{\mathrm{p}}$. Исключив P и сократив на m_{p}, получим

$$\mathscr{E} = 6m_{\mathrm{p}} = 5{,}63\ \text{ГэВ}. \tag{107.3}$$

5. Допустим, что в реакцию вступают частицы с одинаковыми скоростями (по модулю и направлению). Тогда из законов сохранения энергии и импульса следует, что сумма масс получающихся частиц — продуктов реакции — не может превосходить сумму масс исходных частиц. Подчеркнем, что здесь речь идет об *инвариантных массах* (массах покоя). Допустим, например, что частицы a_1 и a_2 вступили в реакцию $a_1 + a_2 \to b_1 + b_2 + \ldots$ Так как частицы a_1 и a_2 движутся с одинаковыми скоростями, то можно рассмотреть реакцию в системе центра масс, в которой полный импульс системы равен нулю, а полная энергия равна сумме масс $m_{a_1} + m_{a_2}$. В конечном состоянии полный импульс системы, конечно, по-прежнему будет равен нулю. Но отдельные частицы, вообще говоря, могут приобрести скорости в разных направлениях. Полная энергия системы, разумеется, не изменится. Но она может быть представлена также суммой масс образовавшихся частиц. Однако это будут уже не массы покоя (инвариантные массы), а *релятивистские массы*, а они больше масс покоя. Для масс покоя (инвариантных масс) всех частиц можно поэтому написать

$$m_{a_1} + m_{a_2} \geqslant m_{b_1} + m_{b_2} + \ldots \qquad (107.4)$$

Доказанное утверждение справедливо и для одной частицы, распадающейся на несколько других.

6. Законы сохранения энергии и импульса используются и для определения массы m и времени жизни τ нейтральных частиц. Примером может служить определение m и τ для нейтральных частиц Λ^0 и K^0.

Нейтральная частица, пролетая через атомы среды, не «обдирает» их электронные оболочки и поэтому не оставляет после себя следов в регистрирующих приборах (фотоэмульсия, пузырьковая камера, камера Вильсона и др.). Только в редких случаях нейтральная частица сталкивается с атомным ядром и вызывает взрыв последнего. Если при таком взрыве возникают заряженные частицы, то от места взрыва они разлетаются в разные стороны и оставляют следы (треки), образующие так называемую «звезду».

По треку заряженной частицы можно судить о ее энергии и импульсе. Чем длиннее трек частицы (например, в пузырьковой камере), тем больше ее энергия. Чем толще трек, тем меньше ее скорость в соответствующей точке трека. (Это справедливо для нерелятивистских частиц. В релятивистской области ионизация приблизительно постоянна.) Импульс частицы можно измерить по кривизне трека в магнитном поле: $P = eRH$. Направление же импульса $\mathbf{P}$ совпадает с направлением трека.

После этих отступлений вернемся к определению параметров K^0-мезона и Λ^0-гиперона. Уже в конце 40-х — начале 50-х годов при фотографировании треков космических лучей в камере Вильсона на фотопластинках были замечены следы пар заряженных частиц, исходящие из одной точки. Такие пары следов стали называть *вилками.* Очень часто вершины вилок находились вблизи звезд. Было высказано предположение, что при образовании звезды наряду с заряженными

частицами возникали и нейтральные, не оставляющие следов в камере. Исследования показали, что зубцы вилок в одних случаях — это следы π^+- и π^--мезонов, в других случаях — следы протонов p и π^--мезонов. Гипотетическую нейтральную частицу, при распаде которой возникают эти частицы, обозначили через V^0. Таким образом, предполагали, что эта частица распадается по одному из каналов:

$$\mathrm{V}^0 \to \pi^+ + \pi^-, \quad \mathrm{V}^0 \to \mathrm{p} + \pi^-. \tag{107.5}$$

Чтобы проверить это предположение, исследовали разные вилки и в каждом случае находили энергии и импульсы заряженных частиц, образующих вилку. Складывая энергии обеих частиц вилки, а по правилу параллелограмма — их импульсы, находили суммарную полную энергию $\mathscr{E}$ и импульс $\mathbf{P}$ частиц вилки. Эти величины должны быть равны энергии и импульсу незаряженной гипотетической частицы. По ним находили инвариантную массу этой частицы

$$m = \sqrt{\mathscr{E}^2 - P^2}. \tag{107.6}$$

Оказалось, что вилки, состоящие из $\pi^\pm$-мезонов, дают для массы гипотетической частицы около $0,500$ ГэВ, а вилки из протонов и π^--мезонов — около 1,11 ГэВ. Тем самым было доказано, что при образовании звезды возникали нейтральные частицы двух сортов. Более легкую назвали K^0-мезоном, а более тяжелую — Λ^0-гипероном. Они распадаются по схемам

$$\mathrm{K}^0 \to \pi^+ + \pi^-, \quad \Lambda^0 \to \mathrm{p} + \pi^-. \tag{107.7}$$

Зная импульсы и массы частиц K^0 и Λ^0, можно было вычислить их скорости. Измерив же расстояние от звезды до вершины вилки и разделив его на скорость частицы, можно было вычислить время ее жизни в лабораторной системе отсчета. А поскольку скорость частицы известна, можно было пересчитать это время и к системе отсчета, в которой частица покоится. При таком пересчете скорость частицы на пути от звезды к вершине вилки можно считать постоянной ввиду малости этого пути, а главное потому, что частица нейтральная и по этой причине слабо взаимодействует с окружающей средой.

7. Время жизни Λ^0-гиперона $12{,}6 \cdot 10^{-10}$ с. Такого же порядка время жизни K^0-мезона. Если считать, что скорость частицы порядка скорости света, то за это время она проходит расстояние около 3 см, которое легко измерить. Но не так обстоит дело с нейтральными частицами, время жизни которых порядка 10^{-16} с и меньше. К ним относится прежде всего π^0-мезон. Масса и время жизни π^0-мезона также были измерены с использованием законов сохранения энергии и импульса. Наиболее точно эти величины были найдены в результате изучения реакции распада K^+-мезона

$$\mathrm{K}^+ \to \pi^+ + \pi^0, \tag{107.8}$$

за которым следует распад π^0-мезона по схеме [1])

$$\pi^0 \to \gamma + \mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^-. \qquad (107.9)$$

Так как частицы K^+ и π^+ заряженные, то энергии и импульсы этих частиц можно найти, изучая оставляемые ими треки. После этого из реакции (107.8) можно вычислить энергию (полную), а значит и скорость π^0-мезона. Затем надо измерить расстояние от конца трека K^+-мезона до точки, из которой исходят частицы пары e^+, e^-. Это расстояние и есть пробег π^0-мезона за время его жизни. Правда, измерение этого расстояния, составляющего доли микрометра, лежит на границе возможного. Так как скорость π^0-мезона известна, то по пробегу находится и время его жизни в лабораторной системе отсчета. Затем оно может быть пересчитано и к системе, в которой π^0-мезон покоится. По современным данным

$$m_{\pi^0} = (264{,}113 \pm 0{,}008) m_{\mathrm{e}}, \quad \tau_{\pi^0} = (0{,}828 \pm 0{,}057) \cdot 10^{-16}\ \mathrm{с}.$$

8. При меньших временах жизни пробег нейтральной (а следовательно, невидимой) частицы не поддается прямому измерению. Рождение и распад нейтральной частицы происходят в столь малой области, что прямыми методами ее невозможно отличить от точки. Такое положение имеет место при рождении и распаде резонансных частиц (резонансов), времена жизни которых 10^{-23} с (пробег 10^{-13} см, т. е. порядка диаметра ядра). Обнаружение таких частиц и определение их масс и времен жизни возможны только косвенными методами. Они используют те же законы сохранения энергии и импульса в сочетании со статистической обработкой данных с помощью ЭВМ. Поясним это на примере.

В 1961 г. в Беркли (США) группа физиков открыла нейтральную частицу — так называемый резонанс ω^0. На пути пучка антипротонов $\bar{\mathrm{p}}$, вышедших из ускорителя с кинетической энергией $\mathscr{E}_{\text{кин}} \sim 1{,}61$ ГэВ, была поставлена большая водородная пузырьковая камера. При столкновении антипротонов с протонами (ядрами водорода) образовывались $\pi^\pm$- и π^0-мезоны. Понятно, что суммарный электрический заряд всех образовавшихся частиц должен быть равен нулю. Легко оценить верхний предел для числа N образующихся π-мезонов.

Так как в пучке движутся только антипротоны, а сталкивающихся частиц $\bar{\mathrm{p}}$ и p две, то полная энергия их будет $\mathscr{E}_{\text{кин}} + 2m_{\mathrm{p}}$. Импульс системы до и после столкновения, очевидно, равен импульсу антипротона $\mathbf{P}$. Величина $(\mathscr{E}_{\text{кин}} + 2m_{\mathrm{p}})^2 - P^2$ есть инвариант и равна квадрату инвариантной массы системы. При столкновении эта величина не меняется. Но после столкновения инвариантную массу можно представить в виде Nm_π, если пренебречь разницей масс заряженного и нейтрального мезонов. В самом деле, в системе центра масс максимальное число π-мезонов N получится тогда, когда все π-мезоны получатся в состоянии

[1]) Этот распад в 80 раз менее вероятен распада $\pi^0 \to 2\gamma$, но для нашей цели важен именно этот распад.

покоя. В этом случае полная инвариантная масса всех мезонов будет Nm_π, а она во всех системах отсчета одинакова. Итак,

$$(\mathscr{E}_{\text{кин}} + 2m_{\text{p}})^2 - P^2 = (Nm_\pi)^2. \qquad (107.10)$$

Но для налетающего антипротона величина $(\mathscr{E}_{\text{кин}} + m_{\text{p}})^2 - P^2$ также инвариантна и равна m_{p}^2. Отсюда находим $P^2 = \mathscr{E}_{\text{кин}}^2 + 2m_{\text{p}}\mathscr{E}_{\text{кин}}$. Исключение P из этого и предыдущего уравнений дает

$$N^2 = 2m_{\text{p}}(\mathscr{E}_{\text{кин}} + 2m_{\text{p}})/m_\pi^2. \qquad (107.11)$$

Подставляя сюда $m_{\text{p}} = 0{,}938$ ГэВ, $m_\pi = 0{,}140$ ГэВ, $\mathscr{E}_{\text{кин}} = 1{,}61$ ГэВ, получаем $N \sim 18$. Это дает верхний предел для N. На самом деле при рассматриваемых энергиях он никогда не достигается. В таких случаях среднее $N \sim 5$–6. Были изучены фотоснимки с зарегистрированными на них звездами, образованными заряженными π-мезонами. Исследователи прежде всего отобрали 2500 «четырехлучевых звезд», т. е. таких, из которых исходили четыре трека. Исследуя треки каждой звезды, можно было вычислить полную инвариантную массу системы всех четырех π-мезонов. Если бы только они образовывались из исходной системы $\bar{\text{p}}\text{p}$, то инвариантная масса каждой звезды была бы равна исходной массе $2m_{\text{p}}$. На самом деле это случалось редко. Та же картина получалась бы, если бы звезда образовывалась от распада на четыре π-мезона одной нейтральной частицы, образующейся при столкновении антипротона с протоном. Это тоже встречалось редко.

Поэтому было высказано предположение, что в каждой звезде, помимо четырех заряженных π-мезонов, должны присутствовать какие-то нейтральные частицы. Можно предположить, что звезды содержали только одну нейтральную гипотетическую частицу. Эту гипотетическую частицу мы обозначим через ω^0. Полные энергия $\mathscr{E}$ и импульс P системы при столкновении не меняются. Эти величины известны, поскольку антипротоны получаются от ускорителя с заранее известной энергией. Поэтому энергию и импульс частицы ω^0 можно вычислить по формулам

$$\mathscr{E}_{\omega^0} = \mathscr{E} - \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_4, \quad P_{\omega^0} = P - P_1 - P_2 - P_3 - P_4,$$

а ее инвариантную массу — по формуле $m_{\omega^0}^2 = \mathscr{E}_{\omega^0}^2 - P_{\omega^0}^2$. Здесь цифрами обозначены энергии и импульсы отдельных заряженных π-мезонов. Оказалось, что $m_{\omega^0} \approx 0{,}135$ ГэВ — величина, характерная для π^0-мезонов. Из всех 2500 четырехлучевых звезд было отобрано 800 звезд, в каждой из которых содержался один π^0-мезон.

По трекам можно было определить энергию и импульс каждого заряженного π-мезона. Эти же величины для нейтрального π^0-мезона можно было вычислить по формулам, приведенным выше.

При исследовании четверок и троек заряженных π-мезонов получались различные соответствующие им инвариантные массы. Если по оси абсцисс откладывать инвариантные массы троек заряженных π-мезонов, а по оси ординат — число случаев, в которых они появляются на различных небольших интервалах энергии определенной величины,

то получится плавная кривая без сколько-нибудь заметных максимумов и минимумов. Это указывает на статистический, некоррелированный характер появления соответствующих масс в каждой четверке или тройке заряженных π-мезонов.

Если же брать тройки π-мезонов, в каждой из которых содержится один нейтральный π-мезон, то картина резко меняется. На определенном месте на кривой появляется высокий узкий максимум, свидетельствующий о том, что частицы каждой тройки рассматриваемого вида не независимы, а коррелируют между собой. Это связано с тем, что все мезоны таких троек получаются в результате распада *одной и той же* нейтральной частицы, возникшей при столкновении антипротона с протоном. Такую частицу мы обозначили через ω^0. Изученная реакция идет через появление промежуточной нейтральной частицы ω^0:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{p}} + \mathrm{p} \to \pi^+ + \pi^- + {}&\omega^0 \\ &\hookrightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0. \end{aligned} \tag{107.12}$$

Вершине соответствующей кривой соответствует определенное значение массы, которая и принимается за массу частицы ω^0. Становится понятным, почему частица ω^0 названа *резонансной частицей*, или *резонансом*. Сам резонанс характеризуется определенной шириной (полушириной) Г. По этой ширине и определяется время жизни частицы $\tau \sim \hbar/\Gamma$. Для ω^0-резонанса $m_{\omega^0} = (782{,}6 \pm 0{,}3)$ ГэВ, $\Gamma = 10{,}1$ МэВ ($\tau = 6{,}52 \cdot 10^{-23}$ с).

9. Теперь скажем несколько слов о законе сохранения момента импульса. Момент импульса определяется одинаково в нерелятивистской и релятивистской классической механике, т. е. формулой $\mathbf{M} = [\mathbf{rP}]$. Той же формулой, но в операторной форме орбитальный момент $\mathbf{M}$ определяется в квантовой механике. Собственный (или спиновый) момент частицы определяется иначе. Об этом вскользь было сказано в § 36 (п. 5). Подробное рассмотрение этого вопроса выходит за рамки общего курса физики. В квантовой механике момент импульса квантуется и, кроме того, частица может обладать внутренним моментом — спином. Сохраняется полный момент: орбитальный плюс спиновый. Например, в системе центра масс в распаде $\rho^0 \to \pi^+ + \pi^-$ спиновый момент равен 1, а пионы возникают в p-состоянии; в распаде $\Lambda^0 \to \mathrm{p} + \pi^-$ спин равен $1/2$, а p и π^- могут быть в s- и p-состояниях.

§ 108. Законы сохранения электрического, лептонных и барионного зарядов

1. Названные законы выполняются для всех взаимодействий (сильного, электромагнитного, слабого; для гравитационного взаимодействия элементарных частиц они, разумеется, не проверены). Их происхождение неясно, в частности не выяснено, с какой симметрией они связаны. Существуют веские основания считать, что закон сохранения электрического заряда — точный (масса фотона нулевая, на опыте

установлено, что $m_ф < 10^{-21} m_e$). Законы сохранения лептонных и барионного зарядов — чисто эмпирические, и не исключено, что они могут нарушаться (см. пп. 3, 4).

Электрический заряд Q частицы играет двоякую роль. Во-первых, он является *источником силового поля*. Во-вторых, это есть *квантовое число*, характеризующее частицу. Лептонные и барионные заряды, насколько известно в настоящее время, не являются источниками каких бы то ни было дальнодействующих силовых полей. Это просто квантовые числа, характеризующие внутренние свойства элементарных частиц.

2. Различают три вида лептонных зарядов: *электронный* L_e (для e и ν_e), *мюонный* L_μ, (для μ и ν_μ), *таонный* L_τ (для τ и ν_τ). Барионный заряд один и обозначается через B.

С помощью лептонных зарядов простейшим образом интерпретируется установленный на опыте закон, согласно которому в замкнутой системе при любых процессах остается постоянной разность между числом лептонов и антилептонов каждого вида. То же относится и к барионам. Условились считать, что лептонный заряд L_e равен +1 (для e^- и ν_e), $L_\mu = +1$ (для μ^- и ν_μ), $L_\tau = +1$ (для τ_+ и $\overline{\nu}_\tau$) и -1 для всех антилептонов (e^+, $\overline{\nu}_e$, μ^+, $\overline{\nu}_\mu$, τ^+, $\overline{\nu}_\tau$). Для всех остальных элементарных частиц лептонные заряды принимаются равными нулю. Барионный заряд принимается равным +1 для всех барионов и барионных резонансов и -1 для их античастиц. Все заряды аддитивны. Это значит, что для сложной системы заряд каждого вида равен сумме зарядов того же вида всех входящих в нее элементарных частиц. Например, барионный заряд атомного ядра равен сумме всех барионных зарядов нуклонов, из которых построено ядро. Иными словами, барионный заряд ядра равен массовому числу A.

3. Ни одного случая нарушения закона сохранения лептонного заряда не обнаружено. Однако точность, с которой проверен этот закон, невелика. Не исключено, что закон сохранения лептонного заряда приближенный и в определенных условиях может нарушаться. Если бы это было так, то в вакууме могли бы осуществляться превращения нейтрино в антинейтрино и наоборот, а также превращения одного типа нейтрино в другие. Поиски этих явлений представляют большой интерес.

Закон сохранения лептонного заряда требует, например, чтобы при электронном β-распаде ($n \to p + e^- + \overline{\nu}_e$) вместе с электроном обязательно рождалось электронное антинейтрино, так как суммарный лептонный заряд этих двух частиц равен нулю. При позитронном β-распаде ($p \to n + e^+ + \nu_e$), наоборот, вместе с позитроном должно появляться электронное нейтрино.

Законом сохранения лептонного заряда объясняется отсутствие таких процессов, как

$$\nu_e + p \nrightarrow e^+ + n, \quad \nu_\mu + p \nrightarrow \mu^+ + n, \tag{108.1}$$

хотя другими законами сохранения они разрешены. Напротив, процессы

$$\overline{\nu}_e + p \to e^+ + n, \quad \overline{\nu}_\mu + p \to \mu^+ + n, \tag{108.2}$$

удовлетворяющие закону сохранения лептонного заряда, наблюдаются экспериментально. Первый процесс наблюдается в ядерных реакторах при взаимодействии электронных антинейтрино с протонами вещества. Второй процесс наблюдался на ускорителях высоких энергий, где получались мюонные нейтрино в реакциях распада π^-- и K^--мезонов; $\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu$ и $K^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu$. Эти антинейтрино и взаимодействовали с протонами вещества.

Примеры (108.1) и (108.2) показывают, что нейтрино (как электронное, так и мюонное) не тождественны своим античастицам. В 1962 г. было установлено (в частности, по отсутствию реакции $\nu_\mu + n \to e^- + p$), что ν_e и ν_μ — разные частицы. После этого и были введены разные лептонные заряды L_e и L_μ. Аналогично обстояло дело с введением $\tau^\pm$-лептонов и таонных нейтрино $\nu_\tau \overline{\nu}_\tau$ и соответствующего им лептонного заряда L_τ.

4. Из закона сохранения барионного заряда следует, что протон не может превратиться, например, в позитрон и фотон, хотя при таком превращении не нарушались бы ни закон сохранения энергии, ни другие уже рассмотренные выше законы сохранения. Если бы такое превращение было возможно, то оно неизбежно привело бы к аннигиляции атомов вещества, так как образовавшиеся позитроны аннигилировали бы с электронами атомных оболочек. Из того же закона следует, что антибарион может рождаться только в паре со своим барионом. Так, антипротон рождается в реакции $p + p \to p + p + p + \overline{p}$. При столкновении двух протонов могут возникнуть и два антипротона. Но тогда появятся и два новых протона — всего получится шесть частиц, а это значительно повысит порог реакции (см. § 107, п. 4). Аналогично, среди продуктов распада бариона должен обязательно присутствовать также барион. Могут появиться и несколько барионов, но совместно с антибарионами, число которых будет на единицу меньше. Все сказанное относится и к лептонам.

Не исключено, что барионный заряд не всегда строго соблюдается. В так называемой теории великого объединения допускается возможность распада протона на более легкие частицы, например $p \to \pi^0 + e^+$. Такой распад был бы связан с изменением барионного заряда. Экспериментально распад протона пока не обнаружен. На опыте установлено, что время жизни протона $\tau > 10^{32}$ лет.

ЗАДАЧИ

1. Определить порог рождения антипротона:
а) при соударении электрона с покоящимся протоном;
б) при соударении электрона с покоящимся электроном;
в) при соударении фотона с покоящимся протоном;
г) при соударении фотона с покоящимся электроном.

Указание. Задачи решаются аналогично задаче из § 107, п. 4. При выборе соответствующей реакции необходимо руководствоваться законом сохранения барионного заряда. В частности, надо учесть, что антипротон всегда рождается в паре с протоном. В соответствии с этим надо выбрать реакции:

а) $$\mathrm{e^- + p \to e^- + p + p + \overline{p}}, \tag{108.3}$$

б) $$\mathrm{e^- + e^- \to e^- + e^- + p + \overline{p}}, \tag{108.4}$$

в) $$\gamma + \mathrm{p} \to \gamma + \mathrm{p + p + \overline{p}}, \tag{108.5}$$

г) $$\gamma + \mathrm{e^-} \to \gamma + \mathrm{e^- + p + \overline{p}}. \tag{108.6}$$

При рассмотрении реакций с участием γ-квантов надо использовать соотношение $P_\gamma = \mathscr{E}_\gamma$. Порог реакции соответствует случаю, когда энергия γ-кванта после реакции стремится к нулю. Пороги приведенных реакций соответственно равны:

а) $$4m_\mathrm{p} + 2m_\mathrm{e} = 3{,}754\ \text{ГэВ}, \tag{108.3а}$$

б) $$2m_\mathrm{p}\,(m_\mathrm{p}/m_\mathrm{e} + 2) = 3446\ \text{ГэВ}, \tag{108.4а}$$

в) $$4m_\mathrm{p} = 3{,}753\ \text{ГэВ}, \tag{108.5а}$$

г) $$2\,(m_\mathrm{p}/m_\mathrm{e} + 1)\,m_\mathrm{p} = 1724\ \text{ГэВ}. \tag{108.6а}$$

2. Определить порог реакции

$$\mathrm{p + p \to p + p} + \pi^0. \tag{108.7}$$

Ответ.

$$2m_{\pi^0} + \frac{m_{\pi^0}^2}{2m_\mathrm{p}} = 284\ \text{МэВ}. \tag{108.7а}$$

3. K^+-мезоны распадаются по схеме $\mathrm{K}^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$. По мере уменьшения скорости мезона в среде след его становится все более извилистым и запутанным — частица начинает беспорядочно блуждать между атомами. Наконец, след обрывается из-за остановки частицы. Из точки остановки исходят две частицы — μ^+ и ν_μ. Заряженный мюон μ^+ оставляет след, нейтрино следа не оставляет. По следу заряженной частицы и можно судить о характере процесса. Рассчитать энергию мюона и нейтральной частицы в точке, из которой они исходят.

То же самое сделать, заменив K^+-мезон π^+-мезоном, т. е. для распада $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$.

Решение. Полная энергия остановившегося мезона равна его массе m_{K^+}. Если $\mathscr{E}_\mu$ и $\mathscr{E}_\nu$ — полные энергии мюона и нейтрино в момент их образования, то

$$\mathscr{E}_\mu + \mathscr{E}_\nu \to m_\mathrm{K}.$$

Для мюона

$$\mathscr{E}_\mu^2 - P_\mu^2 \to m_\mu^2.$$

Наконец, для нейтрино $P_\nu = \mathscr{E}_\nu$. Из этих трех уравнений однозначно получаем (так как $\mathscr{E}_\mu \neq \mathscr{E}_\nu$)

$$\mathscr{E}_\mu = \frac{m_\mathrm{K}}{2} + \frac{m_\mu^2}{2m_\mathrm{K}}, \quad \mathscr{E}_\nu = \frac{m_\mathrm{K}}{2} - \frac{m_\mu^2}{2m_\mathrm{K}}.$$

Итак, более легкая частица (нейтрино) получает меньшую энергию. Не противоречит ли это известному утверждению, что при распаде неподвижной

частицы большая энергия уносится меньшей частицей? Нет, не противоречит. Это утверждение относится не к полной, а к кинетической энергии. Кинетические энергии частиц будут

$$\mathscr{E}_{\mu}^{\text{кин}} = \frac{m_{\mathrm{K}^+}}{2} + m_{\mu}\left(1 - \frac{m_{\mu}}{2m_{\mathrm{K}^+}}\right) = 152 \text{ МэВ},$$

$$\mathscr{E}_{\nu}^{\text{кин}} \equiv \mathscr{E}_{\nu} = \frac{m_{\mathrm{K}^+}}{2} - \frac{m_{\mu}^2}{2m_{\mathrm{K}^+}} = 236 \text{ МэВ}.$$

В случае реакции с π^+-мезоном справедливы те же формулы, если сделать замену $m_{\mathrm{K}^+} \to m_{\pi}$. Для этого случая получается $\mathscr{E}_{\mu}^{\text{кин}} = 4{,}36$ МэВ, $\mathscr{E}_{\nu}^{\text{кин}} = 29{,}8$ МэВ. Так как согласно общему правилу (107.4): $m_{\mathrm{K}^+} > m_{\mu}$, $m_{\pi^+} > m_{\mu}$, то всегда получается $\mathscr{E}_{\nu}^{\text{кин}} > \mathscr{E}_{\mu}^{\text{кин}}$.

Найденные числа поучительны еще в одном отношении. Кинетическая энергия мюона в случае распада K^+-мезона равна 152 МэВ, тогда как в случае распада π^+-мезона она составляет всего 4,36 МэВ. Отсюда следует, что трек мюона при распаде останавливающегося K^+-мезона должен быть во много раз длиннее трека мюона при распаде π^+-мезона. Это позволяет отличить один распад от другого.

§ 109. Другие законы сохранения и квантовые числа

1. Было замечено, что гипероны интенсивно рождаются при столкновениях адронов высоких энергий. Это указывает на то, что их рождение связано с *сильными* взаимодействиями. Поэтому казалось бы, что время жизни гиперонов должно быть порядка 10^{-23} с, что характерно для процессов, связанных с сильными взаимодействиями. Это время жизни примерно в 10^{13} раз меньше найденного экспериментально для гиперонов. Это казалось странным.

Проблема указанного странного поведения частиц была решена на основе гипотезы парного рождения частиц, подтвержденной на ускорителях. Было установлено, что при столкновениях π-мезонов и нуклонов с нуклонами гипероны всегда рождаются *парами*, или *большими группами* совместно с K-мезонами или другими гиперонами. Ранее наблюдалось совместное рождение только частиц с античастицами. Здесь же парами рождались совсем другие частицы. Например, при столкновении протонов наблюдалась реакция

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \mathrm{p} + \Lambda^0 + \mathrm{K}^+, \tag{109.1}$$

причем Λ^0-гиперон появлялся только совместно с K^+-мезоном или Σ^+-гипероном, но никогда не появлялся вместе с K^--мезоном или Σ^--гипероном.

Гипероны и K-мезоны были названы *странными частицами.* Для K-мезонов также характерны относительно большие времена жизни (и даже на 1–2 порядка бóльшие, чем у гиперонов). Это время, как и для гиперонов, того же порядка, что и у заряженных пионов. Но последние распадаются в результате слабого взаимодействия главным

образом по схеме

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu, \quad \pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu. \tag{109.2}$$

Это наводит на мысль, что гипероны и K-мезоны распадаются также за счет *слабого взаимодействия.* Все факты свидетельствуют, что это действительно так. В частности, относительная вероятность слабых взаимодействий в исследуемой области энергий на 12–14 порядков меньше вероятности сильных взаимодействий. Это и ведет к увеличению времени жизни примерно в то же число раз.

2. Для количественного описания парного рождения и истолкования относительно большого времени жизни странных частиц Гелл-Манн (р. 1929) и независимо от него Нишиджима (р. 1926) ввели новое квантовое число S, которое было названо *странностью.* Поведение странных частиц можно объяснить, если предположить, что частицы $\Lambda^0, \Sigma^+, \Sigma^-, \Sigma^0, \mathrm{K}^-, \overline{\mathrm{K}}^0$ имеют странность -1, частицы $\overline{\Lambda}^0, \overline{\Sigma}^+, \overline{\Sigma}^-, \overline{\Sigma}^0, \overline{\mathrm{K}}^+, \mathrm{K}^0$ — странность $+1$, частицы Ξ^-, Ξ^0 — странность -2, частицы $\overline{\Xi}^-, \overline{\Xi}^0$ — странность $+2$, частица Ω^- — странность -3, а нуклоны, пионы и η^0-мезоны лишены странности. Далее, надо предположить, что странность аддитивна, в сильных и электромагнитных взаимодействиях она сохраняется, а в слабых может меняться на ± 1.

Странные частицы рождаются в сильных взаимодействиях. Так как при этом странность не меняется, то странные частицы могут рождаться только парами частиц с противоположными странностями. Вот почему в реакции (109.1) появляются две частицы Λ^0 и K^+ с противоположными странностями, но не частицы Λ^0 и K^-, имеющие странности, знаки которых совпадают. В реакции

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \Xi^0 + \mathrm{p} + \mathrm{K}^0 + \mathrm{K}^+ \tag{109.3}$$

одновременно вместе с частицей Ξ^0, странность которой равна -2, появляются два странных мезона K^0 и K^+, суммарная странность которых равна $+1 + 1 = 2$.

В процессах распада странных частиц меняется странность продуктов распада. Это указывает на то, что эти процессы не вызываются сильными и электромагнитными взаимодействиями. В противном случае странность не менялась бы. Значит, за распад странных частиц ответственны *слабые силы.* Вот почему скорость распада уменьшается в 10^{12}–10^{14} раз по сравнению со скоростями распадов, вызываемых сильными взаимодействиями.

Сильные взаимодействия не способны вызывать распад странных частиц. Масса странных частиц (каонов, Λ^0, $\Sigma^\pm$, Ξ^0, Ξ^-, Ω^--гиперонов) такова, что распады их с сохранением странности на более мелкие частицы невозможны; таким образом, эти распады не могут происходить благодаря сильному взаимодействию, в котором странность сохраняется. Например, если бы было $M_{\Sigma^+} > M_\mathrm{n} + M_{\pi^+}$, то мог бы происходить распад $\Sigma^+ \to \mathrm{n} + \pi^+$. Но на самом деле $M_{\Sigma^+} < M_\mathrm{n} + M_{\pi^+}$, так что рассматриваемый распад невозможен.

Есть случаи, когда распад странных частиц происходит за счет сильного взаимодействия. Например,

$$\mathrm{K}^*_{892} \to \mathrm{K}_{494} + \pi, \quad \Sigma^*_{1382} \to \Lambda_{1232} + \pi.$$

Странность здесь сохраняется, поскольку распад идет за счет сильного взаимодействия. (Странность резонансов K^*, Σ^*, Λ, а также K равна $+1$, π-мезонов — 0. Нижний цифровой индекс означает массу соответствующей частицы в мегаэлектронвольтах. Ширины резонансов K^* и Σ^* равны соответственно 51 и 35 МэВ, так что их времена жизни порядка 10^{-23} с.)

Электромагнитные взаимодействия происходят без изменения странности, но в исключительных случаях могут вызвать распад странных частиц. Примером может служить распад $\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma$, происходящий под действием электромагнитных сил. Здесь энергии Σ^0 достаточно для рождения Λ^0-гиперона и γ-кванта, а странность не меняется. (Эта реакция не может происходить за счет сильного взаимодействия, так как $M_{\Sigma^0} < M_{\Lambda^0} + M_{\pi^0}$.) За исключением подобных редких случаев распад странных частиц вызывается слабыми силами.

Вместо странности S часто используют гиперзаряд Y, определяемый соотношением

$$\mathrm{Y} = B + S. \tag{109.4}$$

Так как барионный заряд целочисленный, аддитивен и сохраняется, то гиперзаряд обладает теми же свойствами, что и странность, и совпадает с ней для частиц, у которых $B = 0$.

3. Аналогами квантового числа S являются также аддитивные целочисленные квантовые числа: *очарование* (*шарм*) C и *красота* (*прелесть*) b. Эти величины сохраняются не во всех, а только в сильных и электромагнитных взаимодействиях. Значения C приводятся в таблицах в конце книги. Об очаровании C и красоте b более подробно говорится в следующем параграфе.

Упомянем еще о *законе сохранения четности*, о котором подробно говорилось в § 69. Четность сохраняется во всех взаимодействиях за исключением слабого, в котором она нарушается. Заметим еще, что состояние со спином J и четностью P изображается символом J^P (например, 1^+ или $1/2^-$).

4. Существуют адроны, весьма близкие по своим физическим свойствам, объединяемые в группы, называемые *изотопическими мультиплетами* (*дуплетами*, *триплетами* и т. д.). Они одинаковым образом участвуют в сильных взаимодействиях, имеют приблизительно равные массы, одни и те же барионный заряд, спин, одинаковые внутреннюю четность, странность и отличаются друг от друга электромагнитными характеристиками (электрический заряд, магнитный момент). Если бы не было электромагнитных и слабых взаимодействий, то все свойства таких частиц были бы одинаковыми. Так, объединяются в изотопический дуплет протон и нейтрон. Эти две частицы рассматриваются как различные квантовые состояния *одной и той же частицы — нуклона.* Существуют изотопические триплеты

частиц, например (π^-, π^0, π^+), $(\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+)$, а также мультиплеты (особенно среди резонансов), состоящие из большего числа частиц. Существуют и одиночные частицы, не входящие в изотопические мультиплеты; они называются *синглетами.*

Число частиц в мультиплете по одной из оправдавших себя гипотез можно представить формулой

$$N = 2T + 1, \tag{109.5}$$

где T принимает одно из значений $T = 0, 1/2, 1, 3/2$. Эта формула аналогична формуле, определяющей число возможных проекций углового момента (спина) на избранное направление. Чтобы провести эту формальную аналогию дальше, вводят некоторое абстрактное изотропное пространство (не имеющее ничего общего с обычным пространством), которое называется *изотопическим пространством* (правильнее его надо было бы назвать *изобарическим пространством*, но по случайным причинам этот термин не привился). В этом пространстве каждому адрону соответствует некоторое направление и на нем откладывается вектор длины T. Длина этого вектора называется *изотопическим спином* или, короче, *изоспином* соответствующего адрона. В изотопическом пространстве можно произвольно выбрать некоторую ось и назвать ее *изотопической осью.* Проецированием вектора $\mathbf{T}$ на эту ось получают систему точек, отстоящих одна от другой на расстояние 1. Каждой такой проекции соответствует частица мультиплета. Проекцию вектора $\mathbf{T}$ на изотопическую ось мы будем обозначать через T_3. При заданном изоспине T проекция T_3 может принимать следующие значения:

$$T_3 = -T, -(T-1), \ldots, +(T-1), +T.$$

Так, нуклон (протон и нейтрон) имеет изоспин $T = 1/2$; протону условились приписывать проекцию $T_3 = +1/2$, а нейтрону — $T_3 = -1/2$. Трем π-мезонам соответствует изоспин $T = 1$ $(3 = 2 \cdot 1 + 1)$, и т. д.

Все изложенное носит чисто формальный характер. Реальной физической величиной пока что является только число частиц N в изотопическом мультиплете, и совсем не обязательно представлять это число формулой (109.5). Однако можно указать и утверждения *физического характера*, которые нагляднее всего формулируются с использованием понятия *изотопического спина.* Для этого надо путем определения ввести правило, по которому находится изоспин системы адронов по изоспинам частиц, из которых состоит эта система. Условились складывать векторы изоспинов частиц по тому же правилу *векторного сложения*, по которому складываются угловые моменты (спины) частиц. Существенно заметить, что изоспин системы зависит не только от изоспинов всех составляющих частиц, но и от *углов* между векторами изоспинов этих частиц. Поэтому при одном и том же составе систем они могут обладать различными изоспинами. Например, изоспин системы, состоящей из нуклона и пиона, может быть либо 1/2 (когда изоспины этих частиц направлены противоположно), либо 3/2 (когда они направлены одинаково).

Физическое утверждение, о котором упоминалось выше, — это закон *сохранения изотопического спина.* Этот закон заключается в том, что изотопический спин сохраняется при *сильных взаимодействиях*, но нарушается в электромагнитных и в других взаимодействиях.

Сильное взаимодействие для всех частиц, входящих в один и тот же изотопический мультиплет, одинаково, т. е. не зависит от электрических зарядов частиц. В этом проявляется так называемая *изотопическая инвариантность* элементарных частиц, присущая сильному взаимодействию. Частным случаем ее является зарядовая независимость ядерных сил. Формально математически изотопическая инвариантность может быть интерпретирована как независимость сильного взаимодействия от вращения в изотопическом пространстве.

На основании изотопической инвариантности удается предсказать существование, массу и заряд новых частиц, если известны их изотопические «партнеры». Именно так было предсказано существование и свойства π^0, Σ^0, Ξ^0 по известным $\pi^{\pm}$, $\Sigma^{\pm}$ и Ξ^-.

Приведем другой пример. Из изотопической инвариантности следует, что вероятность реакции $\mathrm{p}+\mathrm{p}\to\mathrm{d}+\pi^+$ вдвое больше вероятности реакции $\mathrm{n}+\mathrm{p}\to\mathrm{d}+\pi^0$ (обе реакции идут за счет сильного взаимодействия). Это следует из того, что в конечном состоянии обеих реакций суммарный изоспин $T=1$ ($T=1$ для π и $T=0$ для d). В начальном состоянии первой реакции всегда $T=1$ (так как $T_3=1/2+1/2=1$), а для второй реакции суммарный изоспин может быть 1 или 0 (так как $T_3=1/2-1/2=0$). Поэтому по закону сохранения изотопического спина первая реакция может идти при любых начальных состояниях, тогда как вторая — только для половины начальных состояний.

Поскольку изотопическая инвариантность имеет место только для сильных и нарушается для электромагнитных взаимодействий, точность предсказаний на ее основе по порядку величины равна отношению сил электромагнитного и сильного взаимодействий, т. е. составляет примерно 1 %.

5. Заслуживает внимания следующее правило. Допустим, например, что наблюдается реакция

$$a+b\to c+d. \tag{109.6}$$

Здесь a, b, c и d изображают какие-то частицы. Если такая реакция идет, то должны выполняться все законы сохранения, соответствующие вызывающему ее взаимодействию. Обратно, если все законы сохранения выполняются, то реакция (109.6) должна обязательно идти (см. § 107, п. 1). (Для слабых взаимодействий суммарные странность, очарование, красота не сохраняются.)

Рассмотрим в качестве примера барионный заряд B, которым обладает, скажем, частица b. Если эту частицу перенести из левой части в правую, то барионный заряд слева уменьшится, а справа увеличится на B. Но если при таком переносе частицу b одновременно заменить античастицей $\bar{b}$, то барионный заряд и справа уменьшится на B. Равенство барионных зарядов восстановится. То же относится и к другим

зарядам. Законы сохранения допускают возможность реакции

$$a \to c + d + \overline{b}. \tag{109.6a}$$

Вообще, *если какую-либо частицу или группу частиц перенести из одной части равенства в другую, заменив их античастицами, то получится соотношение, выражающее возможную новую реакцию.*

При доказательстве не использованы законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. Но их и не надо было учитывать, так как эти величины характеризуют не сами частицы, а состояние их движения. А эти состояния могут изменяться в широких пределах, определяемых не законами сохранения, а начальными условиями. Аналогично, при переносе частиц из-за вращения изоспинов в изотопическом пространстве получатся состояния с требуемыми суммарными изоспинами.

Приведем примеры. Возьмем реакцию распада нейтрона

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}. \tag{109.7}$$

Перенесем антинейтрино $\overline{\nu}_\mathrm{e}$ справа налево, заменив его на нейтрино ν_e. Получим

$$\nu_\mathrm{e} + \mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^-. \tag{109.8}$$

Мы получили реакцию взаимодействия нейтрино с нейтроном с образованием протона p и электрона e^-.

Возьмем, далее, процесс комптоновского рассеяния кванта на электроне

$$\gamma + \mathrm{e}^- \to \gamma + \mathrm{e}^-. \tag{109.9}$$

Здесь частица γ совпадает со своей античастицей. Перенесем ее слева направо, а электрон с соответствующей заменой — справа налево. Возникнет процесс

$$\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \to \gamma + \gamma, \tag{109.10}$$

выражающий аннигиляцию пары $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ с испусканием двух γ-квантов.

Более интересен следующий пример. Процесс распада

$$\Sigma^0 \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$$

в принципе возможен, но его не наблюдают, так как идет распад $\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma$, который на 12–13 порядков более вероятен. Однако взаимодействие, приводящее к этому процессу, можно изучать в нейтринных опытах:

$$\overline{\nu}_\mathrm{e} + \mathrm{p} \to \Sigma^0 + \mathrm{e}^+, \quad \overline{\nu}_\mu + \mathrm{p} \to \Sigma^0 + \mu^+.$$

§ 110. Кварковая модель адронов

1. Обилие уже открытых и вновь открываемых адронов (в том числе резонансов) наводит на мысль, что все они построены из каких-то других, более фундаментальных частиц. С наибольшим успехом эта идея реализована в кварковой модели адронов. Кварковая модель объясняет не только систематику, но и динамику адронов. Она приводит

к массе оправдывающихся предсказаний и в настоящее время считается общепризнанной.

В 1964 г. Гелл-Манном и независимо от него Цвейгом (р. 1937) была выдвинута гипотеза, подтвержденная дальнейшими исследованиями, что все адроны построены из более фундаментальных частиц, которые, по предложению Гелл-Манна, были названы *кварками.* На основе кварковой гипотезы не только была понята структура уже известных адронов, но и предсказано существование новых. Ниже дается понятие о кварковой модели без каких-бы то ни было претензий на полноту и обоснование полученных результатов.

К настоящему времени установлено существование пяти разновидностей (или так называемых *ароматов*) кварков: u, d, s, c, b. Их массы: $m_u \approx 5$ МэВ, $m_d \approx 7$ МэВ, $m_s \approx 150$ МэВ, $m_c \approx 1{,}3$ ГэВ, $m_b \approx 5$ ГэВ. На эти данные надо смотреть как на оценочные и грубо ориентировочные, так как кварки в свободном состоянии не наблюдались и поэтому их массы нельзя было измерить прямыми методами (см. п. 7). Неоднократно поступали предварительные сообщения об открытии t-кварка ($m_t \gtrsim 22$ ГэВ), но окончательно существование t-кварка еще не установлено. Каждому кварку соответствует свой антикварк.

Все кварки имеют спин $1/2$ и барионный заряд $1/3$. Кварки u, c, t называют *верхними*, так как они имеют дробный электрический заряд $+2/3$. Остальные кварки d, s, b с электрическим зарядом $-1/3$ принято называть *нижними.* В соответствии с этой терминологией кварки можно расположить в таблице:

$$u, c, t \text{ (заряд } 2/3); \quad d, s, b \text{ (заряд } -1/3). \tag{110.1}$$

Кварк s является носителем странности, c — очарования, b — красоты (прелести).

Протон состоит из двух u-кварков и одного d-кварка ($p \to uud$), нейтрон состоит из одного u-кварка и двух d-кварков ($n \to udd$). Их античастицы построены из антикварков: $\overline{p} \to \overline{u}\,\overline{u}\,\overline{d}$, $\overline{n} \to \overline{u}\,\overline{d}\,\overline{d}$.

2. Мезоны построены из двух частиц: кварка и антикварка. Поэтому их барионное число равно нулю. Посмотрим, какие комбинации из двух таких частиц могут быть составлены из трех самых легких кварков u, d, s и их антикварков $\overline{u}$, $\overline{d}$, $\overline{s}$. Очевидно, всего таких комбинаций будет девять:

$$\begin{matrix} u\overline{u}, & u\overline{d}, & u\overline{s}, \\ d\overline{u}, & d\overline{d}, & d\overline{s}, \\ s\overline{u}, & s\overline{d}, & s\overline{s}. \end{matrix} \tag{110.2}$$

Кварки и антикварки могут входить в эти (и всякие другие) комбинации с различными орбитальными угловыми моментами. Спины кварков и антикварков могут различно ориентироваться друг относительно друга. Общий угловой момент составленной из кварков и антикварков частицы (античастицы) найдется по правилу векторного сложения спинового и орбитального моментов.

Допустим, что все кварки не обладают орбитальными угловыми моментами; все их моменты чисто спиновые. Допустим, далее, что спины кварка и антикварка направлены противоположно. Тогда каждая комбинация представляет мезон со спином $J = 0$. Наиболее легкие заряженные мезоны представляются комбинациями $u\overline{d}$ и $d\overline{u}$. Это — π-мезоны:

$$\pi^+ = u\overline{d}, \quad \pi^- = d\overline{u}. \tag{110.3}$$

Нейтральный π^0-мезон состоит из таких же кварка и антикварка. Но он представляет собой линейную суперпозицию состояний $u\overline{u}$ и $d\overline{d}$. Он с равной вероятностью может находиться в состоянии $u\overline{u}$ и в состоянии $d\overline{d}$.

Более тяжелые K-мезоны содержат кварк s и антикварк $\overline{s}$:

$$\mathrm{K}^+ = u\overline{s}, \quad \mathrm{K}^0 = d\overline{s}, \quad \overline{\mathrm{K}}:0 = s\overline{d}, \quad \mathrm{K}^- = s\overline{u}. \tag{110.4}$$

K^+ и K^- являются частицей и античастицей по отношению друг к другу. То же относится к K^0- и $\overline{\mathrm{K}}^0$-мезонам, которые, таким образом, не являются истинно нейтральными частицами: K^0-мезон отличается от своей античастицы $\overline{\mathrm{K}}^0$ странностью. У $\overline{\mathrm{K}}^0$-мезона странность $+1$, а у K^0-мезона странность -1. С этим связано то, что K^0 в отличие от $\overline{\mathrm{K}}^0$ слабо поглощаются веществом. Дело в том, что странность всех барионов отрицательна или равна нулю. Поэтому поглощение K^0 веществом может происходить лишь с несохранением странности, т. е. из-за слабого взаимодействия. Масса $\mathrm{K}^\pm$-мезонов равна 493,7 МэВ, нейтрального K^0-мезона — 497,7 МэВ. Частицы, содержащие s-кварк, являются странными, а сам s-кварк называется *странным кварком*. Диагональные члены $u\overline{u}$, $d\overline{d}$, $s\overline{s}$ соответствуют нейтральным мезонам. Линейная суперпозиция двух первых из них, как уже отмечалось выше, представляет π^0-мезон. Двум остальным линейным суперпозициям $u\overline{u} + d\overline{d}$ и $s\overline{s}$ соответствуют истинно нейтральные частицы: η- и η'-мезоны с массами соответственно 548,8 и 957,6 МэВ.

Допустим по-прежнему, что орбитальных угловых моментов у кварков и антикварков нет, но их спины направлены параллельно. В этом случае возможны те же девять комбинаций кварков с антикварками. Однако спин каждой комбинации будет 1. Этим комбинациям соответствует девять более тяжелых мезонов:

$\rho^+\ \rho^-\ \rho^0$	$\mathrm{K}^{*+}\mathrm{K}^{*0}\mathrm{K}^{*-}\overline{\mathrm{K}}^{*0}$	ω^0	φ^0
770 МэВ	892 МэВ	783 МэВ	1020 МэВ

3. Обратимся теперь к барионам. Спин их полуцелый. Следовательно, если кварки не обладают орбитальными моментами, то барионы должны быть построены из нечетного числа частиц. Рассмотрим случай, когда такими частицами являются кварки u, d, s. Спин бариона может быть равен либо $1/2$ (когда спины двух кварков параллельны, а спин третьего направлен противоположно), либо $3/2$ (когда спины

всех кварков параллельны). В первом случае образуется октет (восьмерка) барионов:

$$p(uud), \quad n(udd), \quad \Lambda^0(uds),$$
$$\Sigma^-(dds), \quad \Sigma^0(uds), \quad \Sigma^+(uus), \quad \Xi^-(dss), \quad \Xi^0(uss).$$

Барионы со спином 3/2 образуют декуплет (десятку) барионов:

$ddd \quad udd \quad uud \quad uuu$	$\Delta^-\Delta^0\Delta^+\Delta^{++}$	1232 МэВ
$dss \quad uds \quad uus$	$\Sigma^-\Sigma^0\Sigma^+$	1385 МэВ
$dss \quad uss$	$\Xi^-\Xi^0$	1530 МэВ
sss	Ω^-	1672 МэВ

Ω^--гиперон, находящийся в вершине этого перевернутого треугольника, был предсказан на основании кварковой модели барионов и обнаружен экспериментально в 1964 г. Были предсказаны и его свойства — масса, странность, время жизни; все это подтвердилось на опыте.

4. Триумфом кварковой модели является открытие *очарованных частиц*. Первая очарованная частица была открыта в 1974 г. двумя группами экспериментаторов независимо друг от друга: на протонном ускорителе в Брукхейвене (США) при бомбардировке протонами ядер Be и на ускорителе со встречными электронно-позитронными пучками в Стэнфорде (США). Первая группа назвала открытую частицу мезоном J, а вторая — мезоном ψ. Поэтому обнаруженный мезон и получил двойное название J/ψ. Его масса 3,096 ГэВ. Замечательная особенность вновь открытой частицы состоит в ее относительно большой долговечности. Ее ширина 60 кэВ, тогда как обычные ширины для частиц таких энергий 10–70 МэВ, что примерно на три порядка больше. Этот факт, как и в случае странных частиц, указывает на запрет по какому-то новому квантовому числу. В результате было введено квантовое число C, получившее название *очарования*, или *шарма* (по-английски charm — очарование). Ему соответствует новый кварк c. В кварковой модели очарование определяется как разность между числом кварков (c) и антикварков ($\overline{c}$). Частицы с очарованием, отличным от нуля, называются *очарованными.* Очарование подобно странности сохраняется при сильных и электромагнитных взаимодействиях, но не сохраняется при слабых. Распады очарованных адронов происходит за счет *слабого взаимодействия*, при этом очарование меняется на единицу, J/ψ-мезон построен из кварка c и антикварка $\overline{c}$ ($J/\psi = c\overline{c}$). Его очарование равно нулю и относят его к числу мезонов со *скрытым очарованием.* Скрытое очарование у частиц проявляется в том, что они легко распадаются на очарованные частицы, если распад не запрещен законами сохранения энергии и импульса, а распады на неочарованные частицы сильно подавлены (так как подавлена аннигиляция $c\overline{c}$ в более мелкие кварки), т. е. происходят с малой вероятностью.

По своей структуре квантовая система $c\overline{c}$, называемая *чармонием*, напоминает атом водорода (скорее, позитрония). Однако последний всегда называется *атомом водорода* независимо от того, в каком из возбужденных состояний он находится. Напротив, различные возбужденные состояния чармония (и любых других кварковых систем) условились считать *различными частицами* и обозначать *различными символами.* Мезон J/ψ является одним из *возбужденных состояний чармония.* После него было открыто несколько возбужденных состояний чармония. Были открыты и мезоны с *явным очарованием*:

$D^+ - c\overline{d}$	$D^0 - c\overline{u}$	$F^+ - s\overline{c}$
$D^- - d\overline{c}$	$\overline{D}^0 - u\overline{c}$	$F^- - s\overline{c}$
1869 МэВ	1865 МэВ	2021 МэВ

Были открыты также и *очарованные барионы.*

5. История открытия нового кварка b аналогична истории открытия кварка c. В 1977 г. в Батавии (США) был открыт новый мезон, обозначенный через Υ. Он возникал при бомбардировке мишени из меди и свинца пучком протонов с энергией 400 ГэВ. Этот сверхтяжелый мезон при массе m_Υ характеризовался относительно малой шириной (около 0,04 МэВ). Свойства новой частицы не укладывались в схему четырехкварковой модели, и пришлось ввести пятый кварк b, который был назван *прелестным*, или *красивым.* (Адроны, в которые входит кварк b, называют *красивыми*, или *прелестными.*) Мезон Υ является одним из возбужденных состояний связанной системы $b\overline{b}$ со спином 1. В дальнейшем мезон Υ и другие возбужденные состояния той же системы $\Upsilon', \Upsilon'', \Upsilon'''$ получались во встречных электрон–позитронных пучках, а на встречных pp-пучках в ЦЕРН (Швейцария) был также обнаружен первый, самый легкий «красивый» барион $\Lambda_b = udb$ массой 5400 МэВ. Разность между числами b-кварков и их антикварков $\overline{b}$ называется *красотой. Красота сохраняется при сильных и электромагнитных взаимодействиях и может нарушаться при слабых.*

Если просмотреть все квантовые числа для адронов, то легко обнаружить, что электрический заряд адрона можно вычислить по формуле

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}\,(B + S + C + b). \tag{110.5}$$

В частности, эта формула применима для нуклонов. У них $S = C = b = 0$, $B = +1$, для протона $T_3 = +1/2$, для нейтрона $T_3 = -1/2$.

6. Успешная классификация адронов на основе кварковой модели явилась веским аргументом в ее пользу. Другим аргументом являются опыты по прямому просвечиванию нуклонов и других адронов высокоэнергетическими электронами. Происходящий при этом процесс называется *глубоконеупругим рассеянием.* Теоретический анализ его привел к заключению, что внутри адронов электроны рассеиваются на точечных частицах с зарядами $+2/3$ и $-1/3$ и спином $1/2$. На этих частицах электроны резко меняют свои импульсы и энергии, сообщая их кварку, подобно тому как это происходит с α-частицами при рассеянии на ядрах

в опытах Резерфорда. О конечных размерах кварков эти опыты ничего не говорят. Из них можно заключить только, что во всяком случае на расстояниях от силового центра больше 10^{-15} см кварки ведут себя еще как бесструктурные точечные частицы. Возможно, что за пятым кварком b и предполагаемым шестым t будут открыты и другие кварки. Возможно, что увеличение числа кварков будет небольшим и ограничено общими принципами или внутренними свойствами симметрии элементарных частиц. Возможно, что и бесструктурность кварков отражает лишь достигнутый уровень исследования этих материальных объектов.

7. Многочисленные поиски свободных кварков, производившиеся на ускорителях высоких энергий, в космических лучах и окружающей среде, оказались безуспешными. В частности, кварки искали при измерении заряда капель по методу Милликена (1868–1953). Обнаружение капель с дробным зарядом свидетельствовало бы о присутствии кварка, так как дробный заряд кварка не мог бы быть компенсирован целочисленным зарядом электрона или иона. Такие опыты производились в наше время с гораздо большей точностью, чем это мог делать Милликен. К отрицательному результату привел и очень точный масс-спектроскопический анализ воды, который дал для верхнего предела отношения числа свободных кварков к числу протонов величину порядка 10^{-27}. Сейчас большинство специалистов склоняется к тому, что в свободном состоянии кварки не существуют.

Итак, кварковая модель предполагает, что кварки внутри адронов существуют, но опыт вынуждает признать, что вылететь оттуда и появиться в свободном состоянии они не могут. Такое положение называют английским словом «конфаймент», которое означает «пленение, тюремное заключение». Кварк, получивший энергию в результате столкновения с электроном, не вылетает наружу из адрона, а растрачивает ее на образование кварк-антикварковых пар, т. е. на образование новых адронов, в основном мезонов.

Одной из причин ненаблюдаемости кварков в свободном состоянии, возможно, являются их очень большие массы. Это препятствует рождению кварков при тех энергиях, которые достигаются на современных ускорителях. Не исключена возможность, что в свободном состоянии кварки принципиально не могут появиться в силу специфики их взаимодействия. Приводились доводы экспериментального и теоретического характера, согласно которым силы взаимодействия между кварками не ослабевают с расстоянием. Если это так, то для отделения их друг от друга требуются бесконечно большие энергии, при которых такое отделение делается невозможным. Все это — только предположения, ни в какой степени не претендующие на достоверность и даже правдоподобность.

8. Волновые функции систем кварков, образующих барионы, должны быть *антисимметричными*, так как кварки имеют спин $1/2$. Между тем встречаются барионы с одинаковыми ориентациями спинов:

$\Delta^{++}(u_\uparrow u_\uparrow u_\uparrow)$, $\Omega^-(s_\uparrow s_\uparrow s_\uparrow)$, которые *симметричны* относительно перестановки кварков, если только последние не обладают какими-либо дополнительными характеристиками. Такие характеристики и пришлось ввести. Они называются *цветами.* Каждый тип (аромат) кварка характеризуется тремя цветами. Им условно присвоили названия: *красный* R (red), зеленый G (green) и голубой B (blue). Антикваркам присвоили *антицвета* $\overline{R}$, $\overline{G}$, $\overline{B}$. Каждый антицвет является *дополнительным* к своему цвету, так что комбинации $R\overline{R}$, $G\overline{G}$, $B\overline{B}$ считаются *бесцветными* (*белыми*). Точно также бесцветной будет и комбинация $R\overline{R} + G\overline{G} + B\overline{B}$.

По современным представлениям сильные взаимодействия осуществляются путем обмена между кварками безмассовыми частицами со спином 1 и нулевой массой покоя. Эти частицы называются *глюонами.* Предполагается существование восьми глюонов, обладающих характеристикой «цвет». Обмен глюонами между кварками меняет их цвет, но оставляет неизменными все остальные квантовые числа (электрический заряд, странность, очарование, красоту), т. е. сохраняет аромат кварка. Каждый глюон содержит цвет и антицвет. Из трех цветов и антицветов можно составить всего девять комбинаций:

$$\begin{matrix} R\overline{R}, & R\overline{G}, & R\overline{B}, \\ G\overline{R}, & G\overline{G}, & G\overline{B}, \\ B\overline{R}, & B\overline{G}, & B\overline{B}. \end{matrix}$$

Каждой из таких комбинаций соответствует глюон. Цвет, подобно электрическому заряду, сохраняется. Поэтому шесть недиагональных явно окрашенных комбинаций не могут перемешиваться между собой. Три диагональные комбинации бесцветны, и перемешивание их между собой не меняет цвет. Каждая из диагональных комбинаций может быть получена путем линейной суперпозиции двух остальных комбинаций. Существует, следовательно, всего восемь соответствующих им глюонов.

Представим схематически взаимодействие между кварками путем обмена глюонами. Будем изображать красный, зеленый и голубой кварки любого аромата символами q_R, q_G, q_B ($q \equiv u, d, s, c, b, t$). Тогда взаимодействие между красным и зеленым кварками запишется так:

$$q_R \to q_G + q_{R\overline{G}}, \quad q_G + q_{R\overline{G}} \to q_R.$$

Первое равенство означает, что красный кварк испустил красно-зеленый глюон и превратился в зеленый кварк q_G. Второе означает, что зеленый кварк, поглотив красно-зеленый глюон, превратился в красный кварк.

Изложенное имеет весьма формальный характер, а главное в общей физике не имеет каких-либо конкретных применений. Поэтому нет смысла заниматься этим дальше. Соответствующие вопросы относятся к специальной теоретической дисциплине — *квантовой хромодинамике* (КХД).

9. В заключение заметим, что к настоящему времени Вайнберг (р. 1915), Салам (р. 1926) и Глэшоу (р. 1932) создали теорию, в которой электромагнитное и слабое взаимодействия объединены в единое *электрослабое взаимодействие.* На расстояниях от силового центра, меньших радиуса действия слабых сил (10^{-16} см), различие между электромагнитными и слабыми взаимодействиями исчезает. На больших расстояниях, однако, сохраняется различие между ними, так что старая теория остается в силе. Мы не можем входить в рассмотрение этих вопросов по существу, так как они далеко выходят за пределы общего курса физики.

Отметим только, что за последние 15–20 лет в физике элементарных частиц произошли революционные открытия.

1. Достоверно установлено существование структуры у сильновзаимодействующих частиц — адронов (в том числе протона и нейтрона). Модель кварков не только объясняет систематику адронов, но и динамику их взаимодействия. На основе модели кварков предсказаны существование и свойства большого числа частиц, обнаруженных затем экспериментально.

2. Установлена общая природа электромагнитных и слабых взаимодействий. Открыты переносчики слабых взаимодействий: $\mathrm{W}^{\pm}$- и Z^0-бозоны.

3. Создана теория сильного взаимодействия кварков — квантовая хромодинамика. Подтверждены экспериментально свойства переносчиков этих взаимодействий — глюонов (в частности, спин 1). Предсказания КХД (в той области, где применима теория возмущений) блестяще подтверждаются на опыте.

4. Поставлен вопрос о единой природе всех сил (Великое объединение).

5. Обнаружена глубокая связь между физикой элементарных частиц и космологией.

Таблицы

I. Лептоны ($J = 1/2$, $L = 1$, $B = 0$)

Частица	L_e	L_μ	L_τ	Масса, МэВ	Время жизни, с	Основные каналы распада
e^-	+1	0	0	0,511003	∞ ($> 2 \cdot 10^{22}$ лет)	
ν_e	+1	0	0	< 46 эВ	∞	
μ^-	0	+1	0	105,6592	$2{,}19713 \cdot 10^{-6}$	$e^- \,\overline{\nu}_e \nu_\mu$ (98,6 %)
						$e^- \,\overline{\nu}_e \nu_\mu \gamma$ (1,4 %)
ν_μ	0	+1	0	$< 0{,}52$	∞	
τ^-	0	0	+1	1784	$(4{,}6 \pm 1{,}9) \cdot 10^{-13}$	$\rho^- \nu_\tau$ (22 %)
						$\mu^- \overline{\nu}_\mu \nu_\tau$ (18 %)
						$\pi^+ \pi^- \pi^- \nu_\tau$ (18 %)
						$e^- \overline{\nu}_e \nu_\tau$ (16 %)
						$\pi^- \nu_\tau$ (11 %)
						$\pi^- \rho^0 \nu_\tau$ (7 %)
ν_τ	0	0	+1	< 250	?	?

II. Кварки

Кварк	Масса, МэВ	J^P	L	B	S	C	T	T_3	Q	Участие во всех взаимодействиях
u	≈ 5	$1/2^+$	0	1/3	0	0	+1/2	+1/2	+2/3	—
d	≈ 7	$1/2^+$	0	1/3	0	0	1/2	−1/2	−1/3	—
c	≈ 1350	$1/2^+$	0	1/3	0	+1	0	0	+2/3	участвует
s	≈ 150	$1/2^+$	0	1/3	−1	0	0	0	−1/3	во всех
t?	$> 22\,000$	$1/2^+$	0	1/3	0	0	0	0	+2/3	взаимо-
b	≈ 4700	$1/2^+$	0	1/3	$b = +1$		0	0	−1/3	действиях

III. Квазистабильные мезоны [1] ($J^P = 0^{-1}$, $L = 0$, $B = 0$)

Частица	Кварковый состав	S	C	T	T_3	Масса, МэВ	Время жизни, с	Основные каналы распада
$\pi^{\pm}$	$u\overline{d}(d\overline{u})$	0	0	1	± 1	139,567	$2{,}603 \cdot 10^{-8}$	$\mu^{\pm}\nu_{\mu}(\widetilde{\nu}_{\mu})$ (100 %)
π^0	$u\overline{u}(d\overline{d})$	0	0	1	0	134,963	$0{,}83 \cdot 10^{-16}$	$\gamma\gamma$ (98,8 %)
η^0	$u\overline{u}, \overline{dd}, \overline{ss}$	0	0	0	0	548,8	$0{,}7 \cdot 10^{-18}$	$\gamma\gamma$ (39 %) $\pi^0\pi^0\pi^0$ (32 %) $\pi^+\pi^-\pi^0$ (24 %)
K^+	$u\overline{s}$	+1	0	1/2	+1/2	496,67	$1{,}237 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+\nu_{\mu}$ (63,5 %) $\pi^+\pi^0$ (22,2 %) $\pi^+\pi^+\pi^-$ (5,6 %) —
K^0_S							$0{,}89 \cdot 10^{-10}$	$\pi^+\pi^-$ (68,8 %) $\pi^0\pi^0$ (31,4 %)
K^0	$d\overline{s}$	+1	0	1/2	−1/2	497,7	—	—
K^0_L							$5{,}18 \cdot 10^{-8}$	$\pi^{\pm}\mathrm{e}^{\mp}\nu_{\mathrm{e}}(\nu_{\mathrm{e}})$ (38,7 %) $\pi^{\pm}\mu^{\mp}\overline{\nu}_{\mu}(\nu_{\mu})$ (27,1 %) $\pi^0\pi^0\pi^0$ (21,5 %) $\pi^+\pi^-\pi^0$ (12,4 %)
D^+	$c\overline{d}$	0	+1	1/2	+1/2	1869	$\approx 9 \cdot 10^{-13}$	$\overline{\mathrm{K}}^0\mathrm{X} + \mathrm{K}^0\mathrm{X}$ (≈ 50 %) $\mathrm{e}^{\pm}$ X (20 %) K^- X (15 %) $\overline{\mathrm{K}}^0\pi^+\pi^0$ (10 %)
D^0	$c\overline{u}$	0	+1	1/2	−1/2	1865	$\approx 5 \cdot 10^{-13}$	K^- X (≈ 45 %) $\overline{\mathrm{K}}^0\mathrm{X} + \mathrm{K}^0\mathrm{X}$ (≈ 30 %) $\mathrm{K}^-\pi^+\pi^0$ (10 %)
F^+	$c\overline{s}$	+1	+1	0	0	2021	$\approx 2 \cdot 10^{-13}$	?

[1] Символом X обозначены другие частицы.

IV. Стабильные и квазистабильные барионы ($J^P = 1/2^+$, $L = 0$, $B = +1$)

Частица	Кварковый состав	S	C	T	T_3	Масса, МэВ	Время жизни, с	Основные каналы распада
p	uud	0	0	1/2	+1/2	938,279	$> 10^{32}$ лет	
n	udd	0	0	1/2	−1/2	939,573	925 ± 11	$\mathrm{pe}^- \,\overline{\nu}_\mathrm{e}$ (100 %)
Λ^0	uds	−1	0	0	0	1115,6	$2{,}63 \cdot 10^{-10}$	$\mathrm{p}\pi^-$ (64 %)
								$\mathrm{n}\pi^0$ (36 %)
Σ^+	uus	−1	0	1	+1	1189,4	$0{,}80 \cdot 10^{-10}$	$\mathrm{p}\pi^0$ (52 %)
								$\mathrm{n}\pi^+$ (48 %)
Σ^0	uds	−1	0	1	0	1192,5	$5 \cdot 10^{-20}$	$\Lambda\gamma$ (100 %)
Σ^-	dds	−1	0	1	−1	1197,3	$1{,}48 \cdot 10^{-10}$	$\mathrm{n}\pi^-$ (100 %)
Ξ^0	uss	−2	0	1/2	+1/2	1315	$2{,}9 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda\pi^0$ (100 %)
Ξ^-	dss	−2	0	1/2	−1/2	1321,3	$1{,}64 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda\pi^-$ (100 %)
Ω^-	sss	−3	0	0	0	1672,5	$0{,}8 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda\mathrm{K}^-$ (69 %)
								$\Xi^0\pi^-$ (29 %)
								$\Xi^-\pi^0$ (8 %)
Λ_c^+	udc	0	+1	0	0	2282	$(1\text{–}2)\cdot 10^{-13}$	Наблюдалось 12 типов распадов
Λ_b^0	udb	0	0			~ 5400		

Именной указатель

Предметный указатель

Учебное издание

СИВУХИН Дмитрий Васильевич

ОБЩИЙ КУРС ФИЗИКИ

Том V

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

Редактор *Д. А. Миртова*
Оригинал-макет: *В. В. Худяков*
Оформление переплета: *А. А. Логунов*

ЛР № 071930 от 06.07.99
Подписано в печать 16.07.02. Формат 60×90/16
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная
Усл. печ. л. 49. Уч.-изд. л. 55,85. Тираж 5000 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117864 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

Издательство МФТИ
141700 Долгопрудный, Московская обл., Институтский пер., 9

При участии издательской и книготорговой фирмы «ФИЗМАТКНИГА»
141700 Долгопрудный, Московская обл., Институтский пер., 9
Тел.: (095) 408-76-81, 409-93-28

Интернет-магазин физико-математической литературы:
http://www.fizmatkniga.ru

Отпечатано с диапозитивов
в РГУП «Чебоксарская типография № 1»
428019 Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 5-9221-0230-3

9785922102308